

	<b>GESTIÓN DE RECURSOS Y SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>		<b>Código</b>	FO-GS-15
			<b>VERSIÓN</b>	02
	<b>ESQUEMA HOJA DE RESUMEN</b>		<b>FECHA</b>	03/04/2017
			<b>PÁGINA</b>	1 de 1
<b>ELABORÓ</b>		<b>REVISÓ</b>		<b>APROBÓ</b>
Jefe División de Biblioteca		Equipo Operativo de Calidad		Líder de Calidad

## RESUMEN TRABAJO DE GRADO

AUTOR(ES):

NOMBRE(S): TANIA YESENIA APELLIDOS: SIERRA FLORIAN

NOMBRE(S): \_\_\_\_\_ APELLIDOS: \_\_\_\_\_

FACULTAD: INGENIERIA

PLAN DE ESTUDIOS: INGENIERIA CIVIL

DIRECTOR:

NOMBRE(S): JOSE LEONARDO APELLIDOS: JACOME CARRASCAL

CO-DIRECTOR:

NOMBRE(S): \_\_\_\_\_ APELLIDOS: \_\_\_\_\_

TÍTULO DEL TRABAJO (TESIS): REALIZACION DE UN TEXTO GUIA EDUCATIVO E INTERACTIVO EN EL AREA DE ESTÁTICA PARA INGENIEROS, ENFOCADO A ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL

RESUMEN

Este proyecto consistió en la realización de un texto guía educativo e interactivo en el área de estática para ingenieros, enfocado a estudiantes de ingeniería civil. Para ello, se implementó una investigación tipo descriptiva, no experimental, cuantitativa y cualitativa. La información se obtuvo mediante bases virtuales de datos de la biblioteca Eduardo Cote Lamus. Se lograron identificar las condiciones actuales de enseñanza y el aprendizaje de esta materia. Posteriormente, se efectuó un análisis con los resultados obtenidos para elaborar una guía académica y práctica en la resolución de ejercicios en la materia de estática que permita fomentar este campo de conocimiento de ingeniería civil.

PALABRAS CLAVE: Texto Guía, Área de Estática, Enseñanza y Aprendizaje, Ingeniería Civil.

CARACTERÍSTICAS:

PÁGINAS: 353 PLANOS: \_\_\_\_\_ ILUSTRACIONES: \_\_\_\_\_ CD ROOM: 1

\*\*Copia No Controlada\*\*

REALIZACION DE UN TEXTO GUIA EDUCATIVO E INTERACTIVO EN EL AREA DE  
ESTÁTICA PARA INGENIEROS, ENFOCADO A ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL

TANIA YESENIA SIERRA FLORIAN

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERIA

PLAN DE ESTUDIOS DE INGENIERIA CIVIL

SAN JOSÉ DE CÚCUTA

2022

REALIZACION DE UN TEXTO GUIA EDUCATIVO E INTERACTIVO EN EL AREA DE  
ESTÁTICA PARA INGENIEROS, ENFOCADO A ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL

TANIA YESENIA SIERRA FLORIAN

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Ingeniera Civil

Director:

JOSE LEONARDO JACOME CARRASCAL

Ingeniero Civil

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERIA

PLAN DE ESTUDIOS DE INGENIERIA CIVIL

SAN JOSÉ DE CÚCUTA

2022

## ACTA DE SUSTENTACION DE TRABAJO DE GRADO

FECHA: 10 DE FEBRERO DE 2022 HORA: 4:00 p. m.

LUGAR: FU - 309

PLAN DE ESTUDIOS: INGENIERIA CIVIL

TITULO DE LA TESIS: "REALIZACION DE UN TEXTO GUIA EDUCATIVO E INTERACTIVO EN EL AREA DE ESTATICA PARA INGENIEROS, ENFOCADO A ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL".

JURADOS: ING. JAVIER ALFONSO CARDENAS GUTIERREZ  
ING. YORDANI ALEXIS ALVAREZ SEPULVEDA

DIRECTOR: ING. JOSE LEONARDO JACOME CARRASCAL

NOMBRE DE LOS ESTUDIANTES:	CODIGO	CALIFICACION	
		NUMERO	LETRA
TANIA YESENIA SIERRA FLORIAN	1112730	4,4	CUATRO, CUATRO

# APROBADA

  
ING. JAVIER ALFONSO CARDENAS GUTIERREZ

  
ING. YORDANI ALEXIS ALVAREZ SEPULVEDA

Vo. Bo.   
JAVIER ALFONSO CARDENAS GUTIERREZ  
Coordinador Comité Curricular

Betty M.



## Contenido

	<b>pág.</b>
Introducción	20
1. Problema	21
1.1 Título	21
1.2 Planteamiento del Problema	21
1.3 Formulación del Problema	24
1.4 Objetivos	24
1.4.1 Objetivo general	24
1.4.2 Objetivos específicos	24
1.5 Justificación	25
1.6 Alcances y Limitaciones	25
1.6.1 Los alcances	25
1.6.2 Las limitaciones	26
1.7 Delimitaciones	26
1.7.1 Delimitación espacial	26
1.7.2 Delimitación temporal	26
1.7.3 Delimitación conceptual	26
2. Marco Referencial	28
2.1 Antecedentes y Estado del Arte	28
2.2 Marco Teórico	31
2.2.1 La enseñanza	31
2.2.2 El aprendizaje	32
2.2.2.1 Generalidades	32

2.2.2.2 Enfoques	32
2.2.3 Estática	36
2.2.3.1 Definición	36
2.2.4 Principios fundamentales de estática	37
2.2.4.1 Ley del paralelogramo de las fuerzas	37
2.2.4.2 Principio de transmisibilidad de una fuerza	38
2.2.4.3 Principio de equilibrio estático	38
2.2.4.4 Leyes de Newton	39
2.2.5 Tipos de vectores	39
2.2.5.1 Vector fijo	39
2.2.6 Clasificación de estructuras	41
2.2.6.1 Estructuras horizontales	41
2.2.6.2 Estructuras verticales	42
2.2.6.3 Estructuras rígidas	42
2.2.6.4 Estructuras articuladas	42
2.2.6.5 Estructuras en concreto	42
2.2.7 Tipos de estructuras artificiales	42
2.2.7.1 Estructuras masivas	42
2.2.7.2 Estructuras abovedadas	43
2.2.7.3 Estructuras trianguladas	44
2.2.7.4 Estructuras entramadas o de armazón	45
2.2.7.5 Estructuras colgantes	46
2.2.8 Elementos de la estructura	47
2.2.9 Apoyos y enlaces entre elementos estructurales	48

2.2.9.1 Apoyo simple o apoyo articulado móvil	49
2.2.9.2 Apoyo doble, o apoyo articulado fijo	50
2.2.9.3 Empotramiento	51
2.2.10 Vigas	52
2.2.10.1 Vigas con carga concentrada	52
2.2.10.2 Vigas con cargas distribuidas	53
2.2.10.3 Vigas con carga triangular	55
2.2.10.4 Vigas con carga trapezoidal	56
2.2.11 Porticos	56
2.2.11.1 Pórticos isostáticos	56
2.2.11.2 Pórticos hiperestáticos	57
2.3 Marco Conceptual	57
2.3.1 Articulación	57
2.3.2 Columnas	57
2.3.3 Diagrama cortante	57
2.3.4 Diagrama de momento	58
2.3.5 Equilibrio	59
2.3.6 Estabilidad	59
2.3.7 Fuerzas	59
2.3.8 Fuerza axial	59
2.3.9 Rigidez	60
2.4 Marco Contextual	60
3. Diseño Metodológico	61
3.1 Tipo de Investigación	61

3.2 Población y Muestra	61
3.2.1 Población	61
3.2.2 Muestra	61
3.3 Instrumentos para la Recolección de Información	61
3.4 Fases y Actividades Específicas del Proyecto	62
3.4.1 Fase 1. Revisión de bibliografía	62
3.4.2 Fase 2. Selección de información	63
3.4.3 Fase 3. Consolidación	63
3.4.4 Fase 4. Realización de una guía académica en la materia de estática	63
4. Estática para Ingenieros	64
4.1 Introducción	64
4.1.1 ¿Qué es la mecánica?	64
4.1.2 Conceptos y principios fundamentales	65
4.1.2.1 Longitud	66
4.1.2.2 Tiempo	66
4.1.2.3 Masa	66
4.1.2.4 Fuerza	66
4.1.2.5 Espacio	67
4.1.2.6 Materia	67
4.1.2.7 Partícula	67
4.1.2.8 Cuerpo rígido	67
4.1.2.9 Fuerza concentrada	67
4.1.2.10 Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas	68
4.1.2.11 Principio de transmisibilidad	68

4.1.2.12 Primera ley de Newton	69
4.1.2.13 Segunda ley de Newton	69
4.1.2.14 Tercera ley de Newton	70
4.1.2.15 Ley de la atracción gravitacional de Newton	70
4.1.2.16 Peso	71
4.1.2.17 Las cifras significativas	71
4.1.2.18 Funciones trigonométricas	72
4.1.3 Sistema de unidades	75
4.1.3.1 Sistema internacional de unidades (SI)	75
4.1.3.2 Sistema de unidades U.S Customary System	79
4.2 Estática de Partículas	82
4.2.1 Fuerzas en un plano	82
4.2.2 Fuerzas en el espacio	83
4.2.3 Equilibrio de una partícula	88
4.2.3.1 Condiciones para el equilibrio de una partícula	88
4.2.4 Ecuaciones de equilibrio	90
4.2.4.1 Sistema de fuerzas bidimensional	90
4.2.4.2 Sistema de fuerzas tridimensional	91
4.2.4.3 Restricciones y determinación estática	91
4.2.5 Diagrama de cuerpo libre	93
4.3 Cuerpos rígidos: Sistema de Fuerzas Equivalentes	95
4.3.1 Fuerzas internas	95
4.3.2 Fuerzas externas	96
4.3.3 Fuerzas gravitatorias	97

4.3.4 Fuerzas de contacto	97
4.3.5 Fuerzas equivalentes (principio de transmisibilidad)	98
4.3.6 Momento de una fuerza	99
4.3.7 Momento de un par	100
4.3.8 Formulación escalar	100
4.3.9 Pares equivalentes	101
4.3.10 Simplificación de un momento de fuerza y de par	102
4.4 Equilibrio de Cuerpos Rígidos	103
4.4.1 Equilibrio de cuerpos rígidos en dos dimensiones	103
4.4.2 Reacciones en apoyos y conexiones en una estructura bidimensional	105
4.4.2.1 Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida	105
4.4.2.2 Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas	106
4.4.2.3 Reacciones equivalentes a una fuerza y a un par	106
4.4.3 Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones	110
4.4.4 Reacciones en puntos de apoyo y articulaciones es estructuras tridimensionales	112
4.5 Fuerza en Vigas y Pórticos	117
4.5.1 Fuerzas internas desarrolladas en elementos estructurales	117
4.5.1.1 Convención de signos	120
4.5.2 Diferentes tipos de apoyos y cargas en vigas	120
4.5.3 Fuerza cortante y momento flector de vigas y pórticos	124
4.5.4 Diagrama de fuerza cortante y momento flector	126
4.5.4.1 Método de secciones	126
4.5.4.2 Método de áreas	127
5. Guía Académica	130

5.1 Funciones Trigonómicas	130
5.2 Cálculo de Reacciones en Vigas y Pórticos	130
5.3 Diagramas de Fuerza Cortante y Momento Flector en Vigas y Pórticos	130
5.4 Ejercicios Propuestos	131
5.5 Lista de Respuestas a Ejercicios Propuestos	131
6. Análisis de Resultados	132
6.1 Resultados Obtenidos de la Encuesta Aplicada a los Alumnos	132
6.1.1 En cuanto a la asignatura en el pensum de ingeniería civil de la universidad Francisco de Paula Santander	132
6.1.2 En cuanto a dificultades y resolución de incógnitas presentes en la asignatura de estática	134
6.1.3 En cuanto a los conocimientos y bases para los semestres posteriores a la asignatura	137
6.1.4 En cuanto a la utilidad de una guía académica para la asignatura.	139
7. Conclusiones	141
8. Recomendaciones	142
Referencias Bibliográficas	143
Anexos	146

## Lista de Tablas

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Las tres metáforas del aprendizaje	33
Tabla 2. Funciones trigonométricas	74



## Lista de Figuras

	<b>pág.</b>
Figura 1. Criterios para el aprendizaje significativo	34
Figura 2. Tipología de actividades curriculares	35
Figura 3. Ramas de la física clásica	36
Figura 4. Representación de la definición del paralelogramo	38
Figura 5. Ilustración de vector fuerza	40
Figura 6. Componentes de una fuerza	41
Figura 7. Representación estructura masiva	43
Figura 8. Representación estructura abovedada	44
Figura 9. Representación estructura triangular	45
Figura 10. Representación estructura triangular	45
Figura 11. Representación estructura entramada o de armazón	46
Figura 12. Representación estructura colgante	46
Figura 13. Representación estructura colgante	47
Figura 14. Definición de los elementos estructurales	47
Figura 15. Representación de los elementos estructurales	48
Figura 16. Apoyo articulado móvil	49
Figura 17. Representación apoyo articulado móvil	49
Figura 18. Representación apoyo doble, o apoyo articulado fijo	50
Figura 19. Representación apoyo articulado móvil	50
Figura 20. Representación empotramiento	51
Figura 21. Representación empotramiento	51
Figura 22. Viga simplemente apoyada con carga concentrada	52

Figura 23. Viga simplemente apoyada con varias cargas concentrada	52
Figura 24. Viga empotrada	53
Figura 25. Viga simplemente apoyada con los apoyos en voladizo	53
Figura 26. Viga con cargas distribuidas	54
Figura 27. Viga simplemente apoyada con carga uniforme	54
Figura 28. Viga carga rectangular y empotrado	54
Figura 29. Viga simplemente apoyada con voladizos	55
Figura 30. Viga con carga triangular	55
Figura 31. Viga con carga trapezoidal	56
Figura 32. Pórticos isostáticos	56
Figura 33. Pórticos hiperestáticos	57
Figura 34. Representación cortante	58
Figura 35. Representación momento flector	58
Figura 36. Ejemplos aplicativos de momento	58
Figura 37. Representación de fuerza axial	59
Figura 38. Diagrama de fases y actividades específicas del proyecto	62
Figura 39. Representación de cuerpo rígido y fuerza concentrada	68
Figura 40. Diagrama representativo sobre la primera ley de Newton	69
Figura 41. Diagrama de representación sobre la segunda ley de Newton	69
Figura 42. Diagrama de representación sobre la tercera ley de Newton	70
Figura 43. Triángulo rectángulo	72
Figura 44. Componentes de un triángulo rectángulo	73
Figura 45. Unidades de base y sus símbolos	76
Figura 46. Unidades complementarias y sus símbolos	76

Figura 47. Unidades derivadas, símbolos y nombres particulares	77
Figura 48. Múltiplos de unidades SI	78
Figura 49. Principales unidades del SI usadas en mecánica	79
Figura 50. Unidades del SI en relación con el U.S Customary sistem	80
Figura 51. Unidades de uso común en EU y su equivalencia en SI	81
Figura 52. Representación de una fuerza sobre una partícula	82
Figura 53. Explicativo de las características de una fuerza	83
Figura 54. Representaciones vectores unitarios	84
Figura 55. Resumen de fundamentos de algebra vectorial aplicados a mecánica	87
Figura 56. Representación de equilibrio en la vida cotidiana	88
Figura 57. Descripción de equilibrio en partículas en tres dimensiones	89
Figura 58. Ejemplo restricciones redundantes	92
Figura 59. Ejemplo restricciones impropias	93
Figura 60. Pasos propuestos para realizar un DCL	94
Figura 61. Ejemplo de diagrama de cuerpo libre en elemento	95
Figura 62. Representación fuerzas internas	95
Figura 63. Representación fuerzas externas	96
Figura 64. Representación fuerza gravitatoria	97
Figura 65. Representación fuerza gravitatoria	98
Figura 66. Fuerzas equivalentes	98
Figura 67. Fuerzas equivalentes	99
Figura 68. Explicación de momento de una fuerza	99
Figura 69. Representación formulación escalar	101
Figura 70. Ejemplos pares equivalentes	101

Figura 71. Simplificación de un momento de fuerza	102
Figura 72. Simplificación de un momento de par	103
Figura 73. Ejemplo de fuerzas bidimensionales	104
Figura 74. Apoyos o conexiones en estructuras bidimensionales	107
Figura 75. Soportes o apoyos sometidos a fuerzas bidimensionales	109
Figura 76. Ilustración real de apoyos o soportes enfrentados a fuerzas bidimensionales	110
Figura 77. Puntos de apoyo y articulaciones sometidos a fuerzas tridimensionales	113
Figura 78. Soportes o apoyos sometidos a fuerzas bidimensionales	115
Figura 79. Ilustración real de apoyos o soportes enfrentados a fuerzas tridimensionales	116
Figura 80. Representación de fuerzas internas en elementos estructurales	117
Figura 81. Representación cargas resultantes internas en 2d y 3d	118
Figura 82. Deformaciones producidas por las fuerzas internas	119
Figura 83. Convención de signos en las fuerzas internas	120
Figura 84. Representación tipo de cargas en vigas y pórticos	121
Figura 85. Tipo de apoyos en vigas	122
Figura 86. Vigas estáticamente determinadas e indeterminadas	123
Figura 87. Resumen del proceso analítico para cálculo de M y V	124
Figura 88. Direcciones de las fuerzas y su representación positiva o negativa	125
Figura 89. Efectos de las fuerzas externas e internas M y V	125
Figura 90. Método de secciones	127
Figura 91. Resumen de las Funciones de fuerza cortante y momento flector en base al tipo de carga	129
Figura 92. Representación gráfica pregunta número 15 de la encuesta aplicada	133
Figura 93. Representación gráfica pregunta número 6 de la encuesta aplicada	134

Figura 94. Representación gráfica pregunta número 7 de la encuesta aplicada	135
Figura 95. Representación gráfica pregunta número 11 de la encuesta aplicada	136
Figura 96. Representación gráfica pregunta número 12 de la encuesta aplicada	137
Figura 97. Representación gráfica pregunta número 8 de la encuesta aplicada	138
Figura 98. Representación gráfica pregunta número 9 de la encuesta aplicada	138
Figura 99. Representación gráfica pregunta número 14 de la encuesta aplicada	139

## Lista de Anexos

	<b>pág.</b>
Anexo 1. Funciones trigonométricas	147
Anexo 2. Guía académica	148
Anexo 3. Encuesta realizada a estudiantes de ingeniería civil enfocada en la materia de estática	350

## **Resumen**

Este proyecto consistió en la realización de un texto guía educativo e interactivo en el área de estática para ingenieros, enfocado a estudiantes de ingeniería civil. Para ello, se implementó una investigación tipo descriptiva, no experimental, cuantitativa y cualitativa, ya que se basó en el procesamiento de datos. La información se obtuvo mediante bases virtuales de datos de la biblioteca Eduardo Cote Lamus de la Universidad Francisco de Paula Santander y fuentes virtuales de universidades a nivel nacional e internacional. Se logró complementar con la guía académica el aprendizaje del contenido programático que se emplea en la materia estática perteneciente al programa ingeniería civil de la Universidad Francisco de Paula Santander. Seguidamente, se identificaron las condiciones actuales de enseñanza y el aprendizaje de esta materia, a fin de complementar y reducir las falencias encontradas. Posteriormente, se efectuó un análisis con los resultados obtenidos para elaborar una guía académica y práctica en la resolución de ejercicios en la materia de estática que permita fomentar este campo de conocimiento de ingeniería civil.

## Introducción

Un ingeniero civil, se caracteriza por ser un profesional con conocimientos de carácter integral, constantemente debe estar actualizado en los avances de materias como diseño, construcción y mantenimiento de infraestructura, es importante resaltar la fundamentación teórica que está detrás, ésta nos permite establecer nuestro criterio y capacidad de opinión, referente al tema en cuestión.

En la malla curricular de ingeniería civil de la universidad Francisco de Paula Santander, encontramos materias que ameritan un esfuerzo de aprendizaje mayor a otras, una de ellas es la estática, la cual desempeña un papel significativo en la formación académica debido a su contenido, el cual genera una gran complejidad en la solución y entendimiento de ejercicios aplicativos para los estudiantes.

Como consecuencia de lo anterior, resulta la necesidad de crear una guía académica, la cual es una metodología que tiene por objetivo facilitar la comprensión y aprendizaje de los temas expuestos en dicha materia, se desarrollara en base a material consolidado de distintos docentes junto con su material de enseñanza.

Durante el semestre, la guía académica optimizará las técnicas de aprendizaje utilizadas por el titular de la materia, enfocándose en plasmar conceptos y representaciones graficas de una manera didáctica y metódica, explicando a fondo conceptos básicos, características e ilustraciones en la vida profesional cotidiana que muchas veces se omiten en la explicación del docente y que generan vacíos en la formación.



## **1. Problema**

### **1.1 Título**

REALIZACIÓN DE UN TEXTO GUIA EDUCATIVO E INTERACTIVO EN EL AREA DE ESTÁTICA PARA INGENIEROS, ENFOCADO A ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL.

### **1.2 Planteamiento del Problema**

La educación es uno de los pilares de nuestra sociedad ya que con el enfatizamos y damos forma a nuestro criterio y opinión; nos permite desarrollar distintos aspectos, destrezas, valores, costumbres, en términos generales, se refiere a adaptar y ampliar nuestros horizontes con fundamentos formales e informales.

La educación formal se estructura por etapas tales como, educación preescolar, primaria, secundaria y universitaria o la que se puede tener en algún instituto, son etapas que suministran certificación o confirmación que nos puede promover a un estudio superior o a un progreso de nivel educativo posterior; la educación informal o empírica se fundamenta en las entidades o grupos representativos que generan conocimientos respecto a la experiencia aplicada a los diferentes campos de acción.

La productividad o el desempeño de un estudiante es el resultado de la evaluación y, por consiguiente, aprobación o desaprobación de los saberes en cada una de las áreas relacionadas a su formación. En este orden de ideas se determinan las competencias del alumno y sus alcances en términos de medición o promedio respecto a los demás estudiantes, también hace referencia a la capacidad de responder a los desarrollos integrales educativos ya que existen diferentes

métodos de comprensión y estudio.

Partiendo de un mismo concepto, la evaluación general de las materias vistas en el transcurso de nuestra formación educativa tiene como parámetro común el estudio y la búsqueda de herramientas que complementen nuestro entendimiento y comprensión, de esta manera poder manifestar nuestro conocimiento y dominio con los temas vistos con anterioridad.

Conocemos la modalidad de difundir cantidad de información manejada en diferentes plataformas digitales y por otra parte, la información habitual como libros y medios físicos, con estas modalidades se puede determinar el método más aceptado y utilizado, recurrimos a los saberes plasmados en los escritos de profesionales en el tema a tratar y nos apoyamos de las distintas posibilidades tecnológicas para ratificar más conceptos y principios prácticos en cuanto a relacionar resultados y crear una comparación entre los métodos mencionados.

La información recolectada de plataformas tecnológicas nos permite integrar diferentes metodologías y adaptarlas en una mejor presentación, más completa y que represente menor cantidad de incógnitas en cuanto al tema que haga referencia en su momento.

Basándonos en la formación académica que desempeña un estudiante de ingeniería civil de la universidad Francisco de Paula Santander, puede verse favorecida una de las asignaturas más importantes en el pénsum académico como lo es estática, tomándose como punto de partida para ser integrada a las herramientas de información actuales, aplicado en un marco determinado por profesionales en la materia, generando un respaldo según se establece en el contenido programático de la misma, y así ofrecer una mejor visión acerca del comportamiento de las estructuras y sus respectivas soluciones y métodos empleados.

Mencionando algunas de las falencias observadas, obtenemos que:

- Dificultad en la resolución de problemas en el aula a nivel matemático o al emplear algún método específico.
- Determinar la resolución de ejercicios de manera mecánica sin saber su justificación en cuanto a valores y parámetros.
- No se encuentra un material simplemente estructurado referente a la materia, que tenga un avance gradual tal como se ve en el transcurso de la materia en el aula de clase.
- En múltiples casos, No se tiene en cuenta dar a conocer los diferentes gráficos e ilustraciones en la vida laboral y real de las construcciones civiles.
- Dificultades en contextualizar unidades de medida y su análisis.

Las posibles causas que originan estas falencias pueden ser contempladas en:

- Limitaciones en la comprensión de la metodología y por ende en la escasa apropiación de criterio necesario para emplear en la etapa laboral o profesional, ya que no se desarrolla una opinión analítica y lógica respecto a los resultados obtenidos.
- Deficiencia en los conceptos de materias previas llegando así a la baja resolución de problemáticas aplicativas en ejercicios propuestos y al aumento de las incógnitas de análisis.
- Métodos de enseñanza poco didácticos y muy repetitivos sin permitir expandir la visión del estudiante ante las diversas problemáticas a las que se puede presentar en el futuro.

- En culminación es de múltiple importancia saber que los saberes adquiridos son bases fundamentales en el desarrollo de la destreza como profesional y otorga un pensamiento de nivel superior.

### **1.3 Formulación del Problema**

¿Cuál es el principal factor que influye en la falta de comprensión y correcto aprendizaje de la materia estática que se refleja en el programa ingeniería civil de la Universidad Francisco de Paula Santander y, que tan frecuente es?

### **1.4 Objetivos**

**1.4.1 Objetivo general.** Complementar con la guía académica el aprendizaje del contenido programático que se emplea en la materia estática perteneciente al programa ingeniería civil de la universidad Francisco de Paula Santander.

**1.4.2 Objetivos específicos.** Los objetivos específicos se muestran a continuación:

Identificar las condiciones actuales de enseñanza y el aprendizaje de esta materia, a fin de complementar y reducir las falencias encontradas.

Efectuar un análisis a los resultados obtenidos por medio del método empleado en la identificación de condiciones actuales de enseñanza y aprendizaje en la materia de estática.

Realizar una guía académica y práctica en la resolución de ejercicios en la materia de estática a fin de conducir el proceso de una manera metódica en el contenido programático actual.

## **1.5 Justificación**

La utilización de metodologías es de carácter importante en el correcto desarrollo de los saberes en cualquier área, según Ruiz (2019), “el proceso dinámico de estructuración del acto mental conlleva la selección de las estrategias necesarias para buscar y elegir la información relevante con el fin de crear nuevos mensajes de aprendizaje que puedan ser transferidos a la vida” (p.46).

Este proyecto se realiza debido a la necesidad de encontrar una herramienta que ayude a interpretar e idealizar de un modo complementario la temática a los estudiantes de ingeniería civil de la universidad Francisco De Paula Santander. Con la guía académica se pretende fomentar la interacción constante entre docente y alumno ya que, al comprender mejor los temas, aumenta la participación en clase exponiéndose dudas e inquietudes que se desarrollan en el trabajo individual.

Con esta ruta facilitadora los estudiantes se podrán apropiarse del proceso de aprendizaje guiado por el conjunto de estrategias que determine el docente fortaleciendo su labor.

## **1.6 Alcances y Limitaciones**

**1.6.1 Los alcances.** Este proyecto tendrá como alcance el desarrollo instruccional de una guía académica que optimice el entendimiento y aprendizaje de la materia de estática. Considerando los resultados de aplicabilidad que arroje la implementación de dicha guía se podrán añadir pautas a la metodología convencional brindando nuevas alternativas de estudio, contemplando siempre, el contenido programático presentado y establecido por docentes encargados de dicha materia.

**1.6.2 Las limitaciones.** Debido a la situación actual que se está viviendo a nivel mundial, Colombia se encuentra en estado de emergencia sanitaria y establece distanciamiento social por motivo del COVID-19, por consiguiente, se tienen medidas que generan dificultad en el intercambio de información directa con los docentes y profesionales en el área, de tal forma que se puede ver afectado el desarrollo del presente proyecto con la fluidez esperada.

Restricciones en la disposición, tiempo y aptitud de los docentes y profesionales en el área.

## **1.7 Delimitaciones**

**1.7.1 Delimitación espacial.** Este proyecto estará centrado en la universidad Francisco de Paula Santander ubicado en el municipio de san José de Cúcuta, departamento Norte de Santander, Colombia.

**1.7.2 Delimitación temporal.** El proyecto de investigación tendrá un lapso de tiempo mínimo de cuatro (4) meses, de acuerdo a lo establecido en las directrices universitarias.

**1.7.3 Delimitación conceptual.** En el desarrollo de este proyecto de investigación se contempla la revisión de las diferentes metodologías existentes para la enseñanza y el respectivo aprendizaje en la materia de estática, empleando como parámetro fijo las competencias establecidas por la universidad Francisco de Paula Santander.

Esta recolección de información se efectuará en los diferentes soportes académicos que ofrecen sus referencias en plataformas a través de internet buscando diferentes metodologías que puedan manifestarse en trabajos de grado existentes referentes a la estática, las fuentes mencionadas anteriormente serán fundamentalmente bases de datos académicas como la que ofrece la Universidad Francisco de Paula Santander, páginas web, referencias en línea y soportes

del saber cómo libros que permitan su acceso de lectura por medio de plataformas digitales, nos apoyaremos también en la información que se pueda recolectar de profesionales, especialistas y magister de la institución enfocados en el área.

## 2. Marco Referencial

### 2.1 Antecedentes y Estado del Arte

Para la fundamentación de la guía académica, se tienen en cuenta diferentes fuentes de información que puntualizan el tema propiamente, y otras que hacen un aporte complementario.

En relación con Moerschell (2009):

Los ejemplos de innovación e implementación de tecnología respaldaron la literatura al describir el fenómeno de la resistencia al cambio, particularmente en la academia. Dichos ejemplos señalan la naturaleza sistemática del cambio, la naturaleza compleja de los comportamientos de resistencia al cambio y las peculiaridades de la implementación de nuevas tecnologías en un entorno académico. (p.6)

Comúnmente vemos las mismas pautas en los lineamientos de las asignaturas con el transcurrir de los años, sin tener en cuenta el avance y facilidades que se pueden implementar para motivar y despertar el desempeño e interés en el estudiante. Por lo anterior, recalcamos la intensión de este proyecto para plasmar contenido que puede perderse en el aula de clase sin llegar a su objetivo necesariamente y facilitar su comprensión.

Según Ruiz (2019), en el mundo:

Los avances tecnológicos y científicos han generado cambios en los modelos de enseñanza al interior de las instituciones de educación superior, se están incorporando técnicas y procesos instruccionales para mejorar el aprendizaje y fortalecer las habilidades, que, aunque están implícitas, en ocasiones no se potencializan y dificultan que estudiante responda a las competencias de los cursos que formación, por esto se



busca establecer métodos didácticos con los cuales los estudiantes puedan superar las deficiencias. (p.13)

Entonces, concluimos que las técnicas y procesos incorporadas en los modelos de enseñanza han tenido un cambio beneficioso a los estudiantes, aunque en algunas ocasiones las debilidades en el entendimiento, no se puntualizan y entorpecen el proceso de formación del estudiante, impidiendo el adecuado desarrollo.

En base a Ruiz (2019):

En lo que respecta a la calidad de la educación superior, el rendimiento académico de los estudiantes es uno de los indicadores más resaltantes. Está relacionado con conceptos como la excelencia académica y la eficiencia escolar. Las universidades necesitan un conjunto completo de sistemas de acción de educación psicológica para asegurar que los estudiantes logren un progreso satisfactorio y asegurar que sus egresados reciban una formación académica integral y de alta calidad educativa (...). (p.14)

Podemos observar que en Perú se hizo el respectivo análisis que revelo Múltiples aspectos hacen parte implícita del correcto desarrollo educativo ya que afectan la retención y procesamiento de información, tendremos en cuenta estos factores para la realización de la guía académica debido a que esta soluciona netamente componentes académicos en los que existan cuestionamientos, más no afectaciones personales. Por consiguiente, no debemos castigar la eficiencia de la guía instruccional por factores externos al contenido conceptual y aplicativo.

Por otra parte, Bordas (2001). En su investigación titulada “Estrategias de evaluación de los aprendizajes centrados en el proceso” donde señala a la materia de estática como una de las bases

de la ingeniería, debido a que la evidencia del aprendizaje se manifiesta mediante la solución de ejercicios que permiten demostrar que nivel de aprendizaje ejecutan dependiendo del grado de complejidad, comúnmente los ejercicios propuestos y evaluados son extraídos de los libros que pautan el desarrollo de su respectivo contenido programático a ejecutar por su docente. La resolución de estos ejercicios favorece la memorización haciendo que la evaluación no tenga sentido claro, ya que se demuestra la capacidad de desarrollarlos de manera mecánica sin ningún tipo de argumento adquirido en el verdadero entendimiento y aprendizaje que deja un aporte a nuestra guía académica con respecto a su finalidad ya que el resultado de ésta se verá reflejado en el sistema evaluativo y en la utilización adecuada de su información, logrando así el completo análisis de los conceptos y contrarrestando la memorización de ejercicios por resolver.

Fundamentándonos en “los ingenieros privilegian la exposición magistral y los talleres, no tienen muchas variantes didácticas que permitan mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje” (Vargas, 2009, p.10), podemos reiterar la importancia de la guía de aprendizaje, ya que podemos corroborar que no se trata de la resolución de ejercicios mecánicos y que, por ende, existen múltiples factores implícitos que favorecen la participación del estudiante de esta manera.

En base al proceso de investigación, Perico (2016), pretende encontrar alternativas que faciliten y promuevan la resolución de incógnitas, Presentó los principales resultados de un proceso de investigación que trata de promover una mejor práctica educativa a través de la investigación-acción participativa a través de la pedagogía y la didáctica que se desarrolla en la sección Tunja de la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Santo Tomas. Abogar por una mejor comprensión de los objetivos de la educación, para formar mejores personas, lo que significa una formación conducente a disciplinas, y luego una formación profesional. Del mismo modo, las personas buscan nuevos y mejores métodos de enseñanza para reflexionar en el aula y

promover un aprendizaje más eficaz. Al acercar a los estudiantes al método de enseñanza, con el respeto como intermediario, se pueden lograr mejores resultados, y los estudiantes también pueden acumular conocimientos con más entusiasmo. En el mismo orden de ideas, resaltamos la importancia de la entrega y manifestación de información por parte del educador, ya que su enseñanza no debe derivar del cumplimiento de un protocolo, por el contrario, considerar la influencia que puede tener para el estudiante en el momento que manifieste esta información y pueda usarla en cierta situación o momento determinado. Esto impulsa a generar un contenido debidamente estructurado que fortalezca la participación en clase para la resolución de preguntas y cuestionamientos.

Continuando con la idea anterior, Elliot (2005) puntualiza, “la investigación- acción participativa aplicada a la educación pretende mejorar la percepción de los programas ya que puede detectar fortalezas y falencias en el aprendizaje y de esta manera, descubrir si existe mejoría o no de manera significativa” (p.1). Por consiguiente, El estudiante puede tomarse la tarea cuando lo necesite de apoyarse en el autoestudio instruccional de la guía académica propuesta por este proyecto, de manera que esté en sintonía con el desarrollo secuencial y programático pautado por el docente.

## **2.2 Marco Teórico**

**2.2.1 La enseñanza.** En base a Davini (2008), la enseñanza, “es una acción voluntaria y conscientemente dirigida para que alguien aprenda algo que no puede aprender solo, de modo espontáneo o por sus propios medios” (p.11). Lo anterior, sustenta la relación entre el aprendizaje y la enseñanza misma, debido a la agrupación de las habilidades en el procesamiento de la información se genera la respuesta inicial a la información verbal y orientaciones y preferencias

de estudio, de esta manera se construye conocimiento, por ende, justifica los criterios adquiridos posteriormente.

**2.2.2 El aprendizaje.** El fundamento teórico del aprendizaje se muestra a continuación:

**2.2.2.1 Generalidades.** El autor de “procesos del aprendizaje significativo”, habla de este tema basándose en que, Aunque no hay una definición de aprendizaje plenamente satisfactoria y absolutamente compartida por todos los especialistas, existe una definición que recibe el máximo consenso, y es plasmada por Beltrán (1996), donde expone que, se entiende como aprendizaje el cambio permanente o parcial en la conducta, y se deriva como consecuencia de la práctica.

Así mismo, Sánchez, Molina, Del Valle, Pascual & Alvial (2011), plasma que, una guía académica tiene como propósito entregar orientaciones concretas al estudiante sobre la "ruta" más sencilla y eficaz para obtener resultados de aprendizaje según las competencias determinadas y generalidades establecidas. La Guía de Aprendizaje es un instrumento que debe estar presto y a disposición de todos aquellos estudiantes que se interesen en la comprensión, resolución o interpretación de ejercicios enfocados en la materia o en profesionales que la deseen utilizar como apoyo en sus clases.

**2.2.2.2 Enfoques.** En efecto, Mayer (1992), ha distinguido estas tres metáforas: el aprendizaje como medio para adquirir respuestas, el aprendizaje como medio para reunir conocimiento y el aprendizaje como medio para construir significado. Las restricciones de las primeras metáforas han generado espacio para nuevas metáforas en un movimiento enfocado en superación e integración de las anteriores en las posteriores que no ha terminado todavía. Posteriormente, en la tabla 1, se describirá el contenido de cada metáfora según el autor y las diferencias que se encuentran a la hora de comprender el aprendizaje y su naturaleza escolar.

**Tabla 1. Las tres metáforas del aprendizaje**

<b>Aprendizaje</b>	<b>Enseñanza</b>	<b>Foco instruccional</b>	<b>Resultados</b>
Adquisición de respuestas	Suministro de feedback	Centrado en el currículo (Conductas correctas)	Cuantitativos (Fuerza de las asociaciones)
Adquisición de conocimiento	Transmisión de información	Centrado en el currículo (Información apropiada)	Cuantitativos (Cantidad de información)
Construcción de significado	Orientación del procesamiento cognitivo	Centrado en el estudiante (Procesamiento significativo)	Cualitativos (Estructura del conocimiento)

Fuente: Beltrán, 2002.

Al mismo tiempo, Beltrán (2002), define estas metáforas, a continuación, se plasman sus los enfoques del aprendizaje, según él.

**Enfoque conductista (el aprendizaje como medio para adquirir respuestas).** Se asocia con un lineamiento asociacionista o de proveniencia empírica que busca registrar los mensajes informativos acompañados de impresiones sensoriales logrando así guardar la mayor cantidad de conocimiento. Tomando su idea principal, se entiende por conductista al hecho de actuar por responder y no por aprender, de esta manera no exige ningún esfuerzo mayor al de acumular materiales informativos respecto al tema, simplemente será un acumulado de información mas no de conocimiento, simplemente, un recibir y aceptar por parte del estudiante.

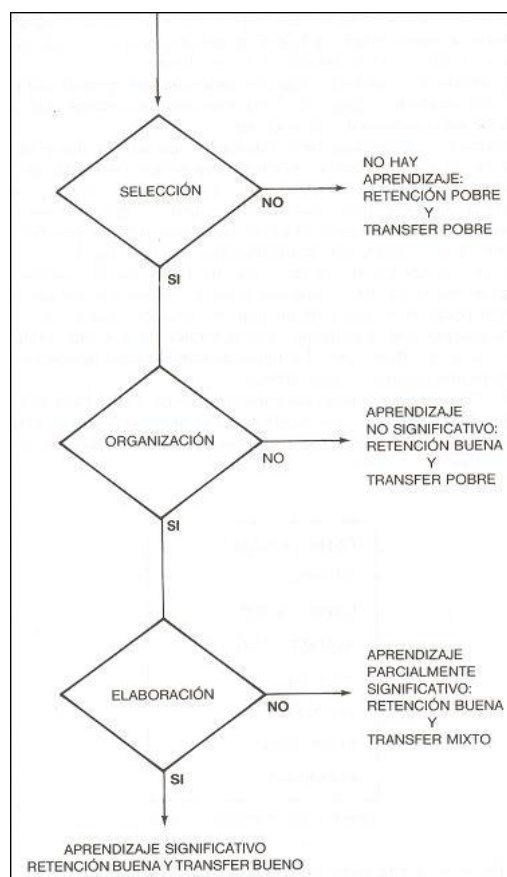
**Enfoque cognitivo.** Plantea la idea de que los conocimientos en vez de ser adquiridos, son descubiertos, de esta manera, se puntualiza la autonomía académica del estudiante y así, la independencia de sus conocimientos.

**El aprendizaje como medio para reunir conocimiento.** Se adquieren conceptos e información que amparan el desarrollo del conocimiento. Se manifiesta en cuanto ha avanzado el estudiante en su aprendizaje.

**El aprendizaje como medio para construir significado.** El estudiante posee el control de su propio aprendizaje, es decir que toma acción sobre sus propios procesos cognitivos.

Enfatizando estos resultados, añade que al proporcionar una guía instruccional debidamente organizada se obtienen mejores resultados ya que toda la información está consolidada en un mismo documento.

En otras palabras, el aprendizaje depende de lo que el estudiante efectúe con los saberes, es decir, los procesos que ponga en marcha al formarse y, por tanto, de las estrategias que desarrollan esos procesos (Pérez, 1990).



**Figura 1. Criterios para el aprendizaje significativo**

Fuente: Beltrán, 2002.

Las estrategias de aprendizaje pueden definirse como conductas y pensamientos que un aprendiz utiliza durante el mismo proceso con el propósito de influir en su proceso de formación, (Weinstein & Mayer, 1986). Estas conductas varían en cuanto a la respuesta que se establece coherencia y secuencia entre lo textual y la acción.

Para Monereo (1994), se definen estrategias de aprendizaje como la toma de decisiones que pueden ser conscientes e intencionales donde el estudiante puede elegir y redefinir, de manera secuencial, conocimientos y saberes necesarios para complementar un objetivo determinado, tomando como referencia las características educativas en que se provoca el ejercicio de aprender.

Estas actividades, se pueden representar en 3 grupos principalmente según Sánchez et al. (2011), Presenciales, mixtas y autónomas. De esta manera el autor generaliza conceptos en los que el estudiante se desempeña en el aprendizaje y la retroalimentación.

Actividades Presenciales	Actividades Mixtas	Actividades Autónomas
Corresponde al trabajo presencial directo con el profesor y donde están presentes todos los estudiantes del curso. Incluye actividades como: cátedra, presentaciones o proyectos de aula, talleres grupales o laboratorios guiados por el profesor, trabajo sincrónico en entornos virtuales de aprendizaje (EDUCA), etc.	Corresponde al trabajo guiado por un profesor o ayudante, con un rol fundamental del estudiante, y donde no necesariamente está presente todo el grupo curso. Puede incluir actividades como: tutorías individuales o colectivas, actividades de terreno o práctica, ejercicios y ayudantías, trabajo asincrónico en entornos virtuales de aprendizaje (EDUCA), etc. Las actividades mixtas implican que todo el grupo de estudiantes está trabajando al mismo tiempo, pero no necesariamente todos frente al profesor, el cual puede estar con uno, varios o todos los estudiantes.	Trabajo autónomo del estudiante, no dirigido directamente por un profesor. Incluye, por ejemplo: estudio y lectura personal, preparación de pruebas y exámenes, tareas y ejercicios individuales, trabajos de investigación, desarrollo de proyectos, ensayos, ejercicios en laboratorio, trabajos de grupo, etc.

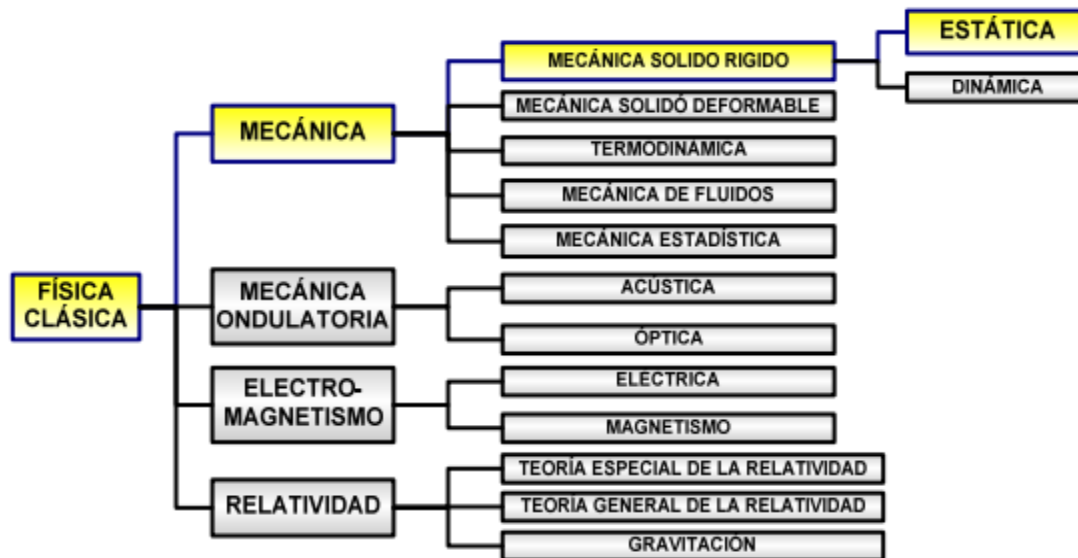
**Figura 2. Tipología de actividades curriculares**

Fuente: Sánchez et al., 2011.

**2.2.3 Estática.** La definición de estática se muestra a continuación:

**2.2.3.1 Definición.** Según la definición planteada por Beer & Johnston (1999), la estática hace referencia a una fracción de la mecánica que plantea y soluciona las circunstancias de equilibrio en reposo de cuerpos, basándose en las acciones que se efectúan sobre ellos (Fuerzas y momentos). Concluimos que, la mecánica de estos cuerpos rígidos se divide dos ramas, estática donde se contemplan cuerpos en reposo y dinámica que contempla cuerpos en movimiento.

Es de carácter importante recordar que ninguna estructura o sólido real se comportan completamente rígidos, esto considerando que se encuentran bajo la acción de las cargas a las que se someten y pueden deformarse.



**Figura 3. Ramas de la física clásica**

Fuente: Beer & Johnston, 1999.

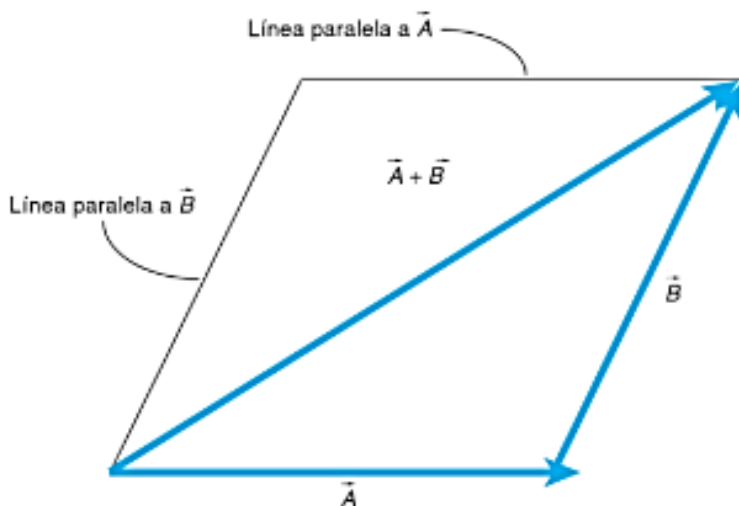
Para Llano (1999), el significado de fuerza se refiere a la capacidad que tiene un cuerpo o masa para producir efecto o acción física sobre otro cuerpo o masa. Ésta puede ser transmitida



por contacto directo o ejercida a distancia. Cuando hablamos de efecto nos referimos a ejemplos como la fuerza de empuje del agua o de la tierra, la presión del viento, el rozamiento. Esto se simboliza por un vector aplicado y por un vector axial cuando al cuerpo se le supone rígido. Por otro lado, las acciones físicas estarías ejemplificadas por las fuerzas gravitacionales o magnéticas. De cualquier forma, estas magnitudes físicas son determinadas por sus factores como su intensidad, dirección, sentido y punto de aplicación cuando actúan sobre un cuerpo que pueda presentar deformabilidad.

**2.2.4 Principios fundamentales de estática.** En el libro *Estática aplicada* de Llano (1999), se encuentran plasmados diferentes principios conceptuales necesarios para la comprensión de los temas posteriores. Para El autor de dicho libro, el estudio de la estática se fundamenta en cuatro principios de carácter físico determinados principios fundamentales o postulados de la estática. En base al autor, indicaremos las definiciones correspondientes a:

**2.2.4.1 Ley del paralelogramo de las fuerzas.** Llano (1999), expresa que, “Dos fuerzas que actúan simultáneamente sobre un punto material pueden ser reemplazados por una sola, llamada resultante, dada por la diagonal del paralelogramo que tiene lados paralelos e iguales a las fuerzas dada” (p.22).



**Figura 4. Representación de la definición del paralelogramo**

Fuente: Corvera, 2014.

**2.2.4.2 Principio de transmisibilidad de una fuerza.** Para Llano (1999), este principio “Establece que una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido no altera su efecto si se desplaza su punto de aplicación a lo largo de su recta de acción” (p.12).

Al mencionar el aspecto de que no altera su efecto nos da a entender que no se transforman las condiciones en las que se encuentre, sea reposo o movimiento del cuerpo o masa en cuestión. Si el cuerpo tiene características deformables no será posible transmitir la fuerza en la longitud de su recta de acción sin alterar la deformabilidad que la fuerza origina en el cuerpo propiamente.

**2.2.4.3 Principio de equilibrio estático.** Llano (1999), en su libro, explica por qué es sólo un caso particular de la ley fundamental de la mecánica refiriéndose a la Ley de Newton, donde dice que dice: “Cuando actúa una o más fuerzas sobre un punto material, se adquirirá una aceleración de dirección y sentido consecuente con la dirección y sentido de la resultante de las fuerzas, y de intensidad proporcional a la de esta resultante” (p.9). Su expresión matemática queda dada por la

ecuación:

$$F = m \cdot a \text{ (ecuación 2.1)}$$

Donde F se refiere a la resultante, la letra “a” se refiere a la aceleración y la letra “m” se refiere a la masa el punto material expresando así el factor de proporcionalidad mecánico entre la fuerza actuante y la aceleración adquirida.

**2.2.4.4 Leyes de Newton.** Según la base teórica expuesta por De la Cruz (1996), determinamos que:

**Primera Ley.** Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente conservaba esta condición) o por el contrario presentará una rapidez constante en línea recta (si originalmente presentaba esta condición).

**Segunda Ley.** Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula tiene un valor diferente de cero, dicha partícula obtendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en dirección de esta fuerza resultante también. Se puede escribir así:

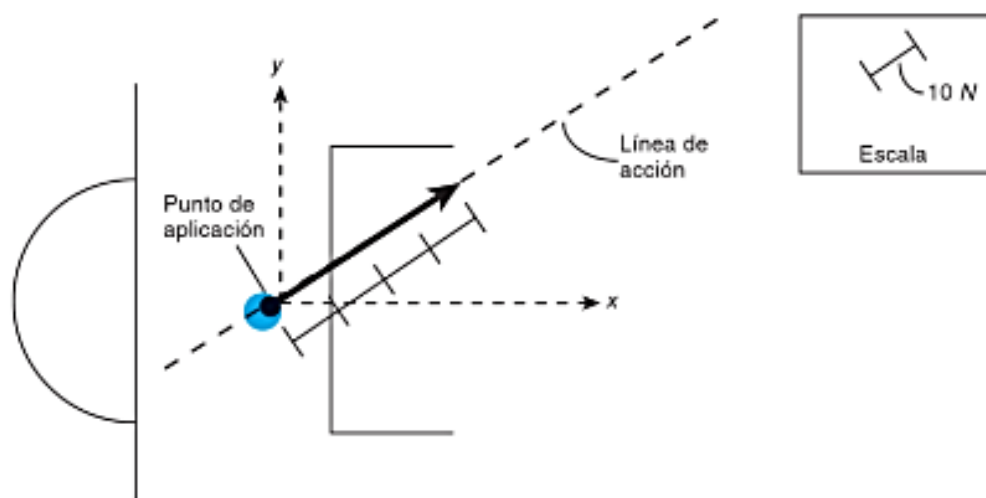
$$F = m \cdot a \text{ (ecuación 2.1)}$$

**Tercera Ley.** Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, La misma línea de acción y sentidos opuestos.

**2.2.5 Tipos de vectores.** Los tipos de vectores se evidencian de la siguiente manera:

**2.2.5.1 Vector fijo.** En concordancia con De la Cruz (1996), Cuando un vector representa una fuerza que actúa sobre una partícula dada, posee un punto de aplicación definido, y este sería la

propia partícula. Bajo este parámetro, se denomina vector fijo, no puede realizar movimiento sin modificar las condiciones iniciales de sí mismo.

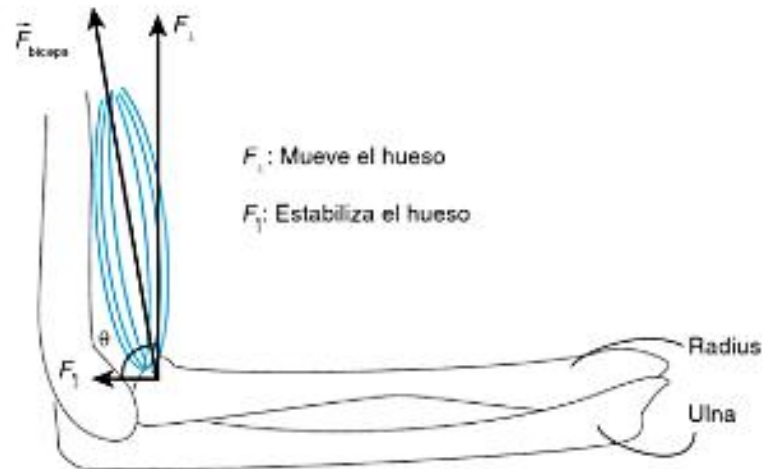


**Figura 5. Ilustración de vector fuerza**

Fuente: Corvera, 2014.

**Vectores libres.** Según De la Cruz (1996), los pares de fuerzas son representados por vectores que logran desplazarse libremente en el espacio. De ahí su denominación.

**Vectores deslizantes.** De la Cruz (1996), concluye que, se determinan vectores deslizantes a las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, ya que pueden moverse o deslizarse a lo largo de la línea de acción.



**Figura 6. Componentes de una fuerza**

Fuente: Corvera, 2014.

**2.2.6 Clasificación de estructuras.** La estructura es la repartición de las partes de un cuerpo determinado, aunque también puede usarse en otros contextos y diversos sentidos.

Según Duque (2015), se pueden dividir en dos grupos las estructuras, y este criterio varía según la posición de sus elementos sean horizontal-vertical, y la movilidad de sus elementos ya sean rígidas-verticales

**2.2.6.1 Estructuras horizontales.** En base a Villa (2012), las estructuras horizontales:

Son aquellas en las que los elementos que soportan los mayores esfuerzos, se hallan colocadas horizontalmente. En este tipo de estructuras los elementos que son sometidos a mayor esfuerzo trabajan a flexión. En las estructuras horizontales se emplean figuras geométricas curvas como el arco. (p.23)

Acá podemos concluir, el tener como ejemplo las vigas con ejemplos de carga aplicada.

**2.2.6.2 Estructuras verticales.** Estructuras comprendidas por elementos que soportan los mayores esfuerzos, colocados en posición vertical.

**2.2.6.3 Estructuras rígidas.** Estructuras que no presentan deformación cuando se les aplica diferentes fuerzas, excepto si existe falla o se rompen sus elementos.

**2.2.6.4 Estructuras articuladas.** Se define por Villa (2012), como aquellas estructuras que, al presentar una carga, la estructura se deforma, controladamente, al desplazarse los elementos que la integran. Para ejemplificar, se considera estructura rígida al triángulo, en cambio, existen otras figuras geométricas que pueden articularse por sus vértices las formas como el cuadrado, pentágono, hexágono, entre otras. Aun así, se pueden transformar en estructuras rígidas si se les añade algún elemento como puede ser una escuadra, cartelas, arcos, tirantes, barras puestas de forma que le aportan rigidez a la estructura en sí.

**2.2.6.5 Estructuras en concreto.** Según Villa (2012), Las observaciones y deformaciones presentadas de manera periódica varían de acuerdo a cada tipo de estructura. Las diferencias en los materiales de construcción son uno de los mayores factores que tienen incidencia en la deformación de la estructura. se comportan diferente a medida que los materiales lo permitan y al entorno que se enfrenten.

**2.2.7 Tipos de estructuras artificiales.** Las tipologías de estructuras descritas a continuación se basan en los conceptos dados por García (1935), según el autor, las estructuras pueden ser: Masivas, abovedadas, trianguladas, entramadas y colgantes.

**2.2.7.1 Estructuras masivas.** Son definidas como estructuras sólidas y notablemente macizas que son construidas instalando material en grandes masas o bloques, también mediante material

instalado continuamente, como hormigón. Se puede ejemplificar con grandes cimentaciones y construcciones macizas en piedra tal como las pirámides. En resumen, están hechas del mismo material según García (1935).



**Figura 7. Representación estructura masiva**

Fuente: García, 1935.

**2.2.7.2 Estructuras abovedadas.** Son estructuras que como su misma denominación describe, se forman por arcos y bóvedas que permiten cubrir espacios de gran tamaño y ensanchar los vacíos o huecos en las mismas. Las piezas que forman Dichos arcos y bóvedas son denominadas dovelas, estas resisten y transmiten las fuerzas, las fuerzas que transmiten son llamadas empujes, mediante esfuerzos de compresión. Existen muchas curvas en la estructura como tal, esta es su principal característica.



**Figura 8. Representación estructura abovedada**

Fuente: García, 1935.

**2.2.7.3 Estructuras trianguladas.** Estas estructuras son formadas por componentes lineales de poca sección mayormente conocidas como barras que dan como resultado superficies estructurales planas o tridimensionales según el diseño mediante la sucesión y repetición de figuras triangulares. Se resalta que los nodos o uniones entre las mismas barras normalmente no son rígidas, esto para evitar rigideces nocivas para la propia estructura o para la vida útil de la misma, pero de igual forma, que no exista la posibilidad de que las barras se deformen, por eso hay que lograr que los triángulos que forman la pieza base de las estructuras se comporten como indeformables.





**Figura 9. Representación estructura triangular**

Fuente: García, 1935.



**Figura 10. Representación estructura triangular**

Fuente: García, 1935.

**2.2.7.4 Estructuras entramadas o de armazón.** Son conocidas como las estructuras más comunes en la construcción, presentan bases con pilares y vigas de hormigón armado o de acero regularmente, forman pórticos planos que se unen a otros pórticos planos mediante otros elementos, forman propiamente un armazón estructural que actúa de armazón para la edificación. Formadas por vigas y columnas.



**Figura 11. Representación estructura entramada o de armazón**

Fuente: García, 1935.

**2.2.7.5 Estructuras colgantes.** Utilizan básicamente elementos de tipo cable o cuerda, que son denominados tirantes; estos elementos funcionan exclusivamente a tracción y son empleados para sostener otros elementos. Es la estructura típica de los puentes colgantes.



**Figura 12. Representación estructura colgante**

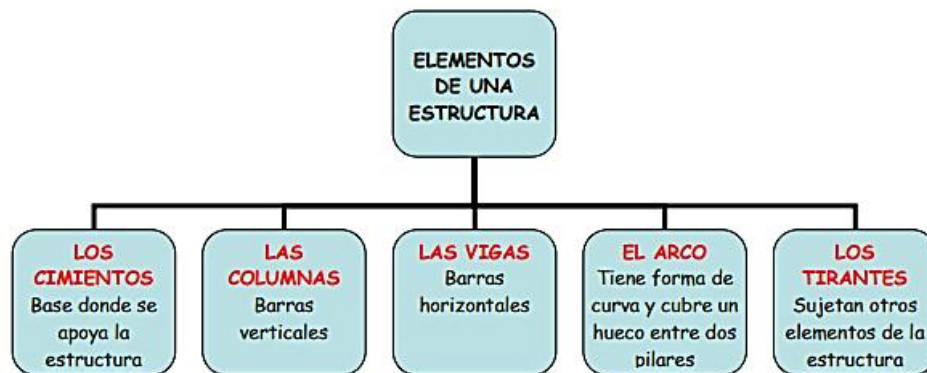
Fuente: García, 1935.



**Figura 13. Representación estructura colgante**

Fuente: García, 1935.

**2.2.8 Elementos de la estructura.** Los elementos de la estructura se muestran a continuación:



**Figura 14. Definición de los elementos estructurales**

Fuente: García, 1935.



**Figura 15. Representación de los elementos estructurales**

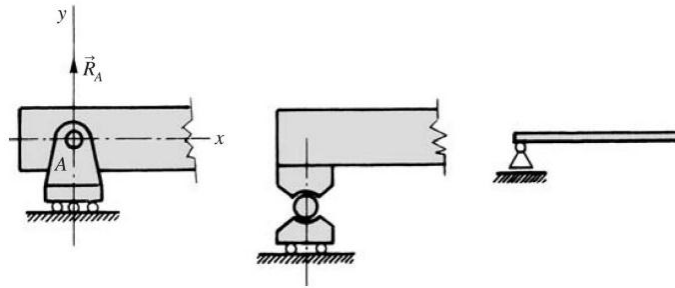
Fuente: García, 1935.

**2.2.9 Apoyos y enlaces entre elementos estructurales.** Según Torres (2014), las uniones y los apoyos son dispositivos que limitan los movimientos del sistema estructural y admiten la correcta transmisión de los esfuerzos del sistema.

Un ejemplo claro de unión es el de los cimientos que adhieren la estructura al suelo que actúa como estabilizante o sustento. Existen enlaces o uniones y apoyos entre varios elementos estructurales (tales como relación viga-pilar, relación pilar-cimiento, entre otros) y no a nivel global y generalizado.

Las limitaciones al movimiento están ligadas a las fuerzas de reacción en dichas uniones o enlaces, Estas reacciones son las acciones necesarias para coaccionar los movimientos que los enlaces restringen. Estas fuerzas se denominan de reacción porque sólo se producen en respuesta a un intento de realizar el movimiento que el enlace impide o restringe.

**2.2.9.1 Apoyo simple o apoyo articulado móvil.** Basándonos en Torres (2014), se denomina a un apoyo articulado móvil al acto que se produce entre dos superficies que se tocan en un punto denominado punto de tangencia, esto permite el deslizamiento relativo entre ambas. Se considera libre el movimiento en el eje  $x$ , así como el giro en el plano  $xy$  de igual forma. La reacción es una fuerza perpendicular al plano  $x$ .



**Figura 16. Apoyo articulado móvil**

Fuente: Villarino, 2010.

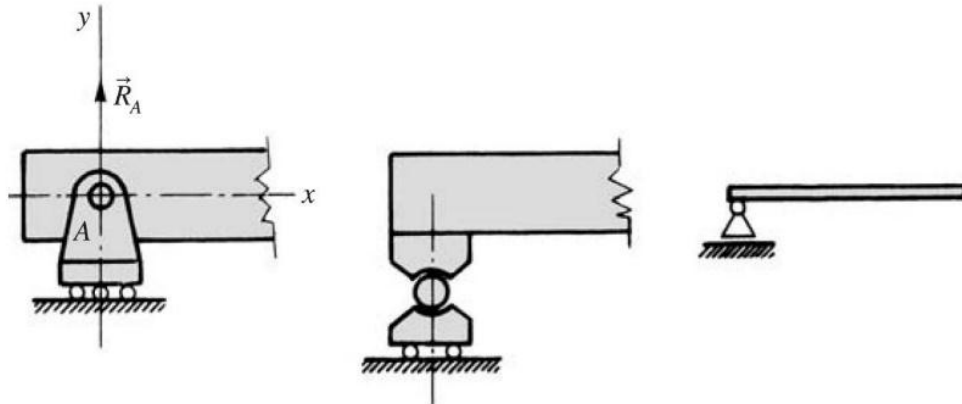


**Figura 17. Representación apoyo articulado móvil**

Fuente: Villarino, 2010.



**2.2.9.2 Apoyo doble, o apoyo articulado fijo.** Torres (2014), caracteriza este apoyo mencionando la restricción en su desplazamiento en el eje  $x$  y en el eje  $y$ . Presenta reacciones en las dos direcciones del eje, sólo se permite el giro.



**Figura 18. Representación apoyo doble, o apoyo articulado fijo**

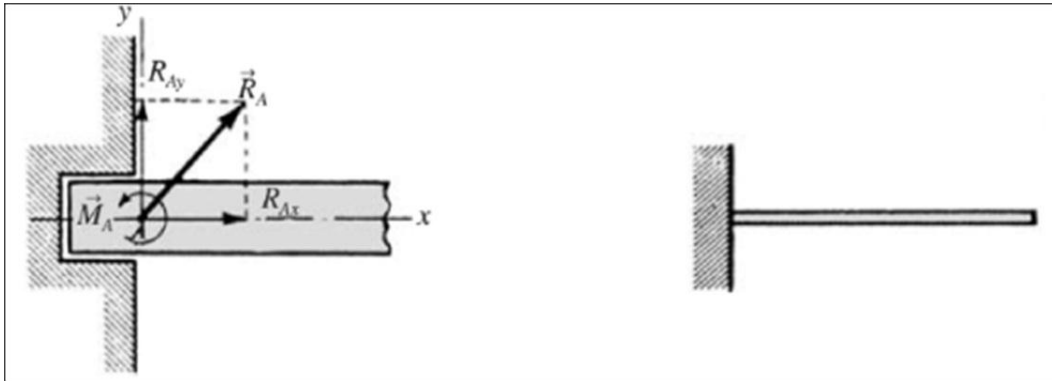
Fuente: Villarino, 2010.



**Figura 19. Representación apoyo articulado móvil**

Fuente: Torres 2014.

**2.2.9.3 Empotramiento.** En base a Torres (2014), se restringen movimientos en las direcciones en el eje x y en el eje y, tampoco permite giro. Las reacciones son denominadas fuerzas en dirección de x y de y, presenta un momento que impide el giro en dicho punto.



**Figura 20. Representación empotramiento**

Fuente: Villarino, 2010.



**Figura 21. Representación empotramiento**

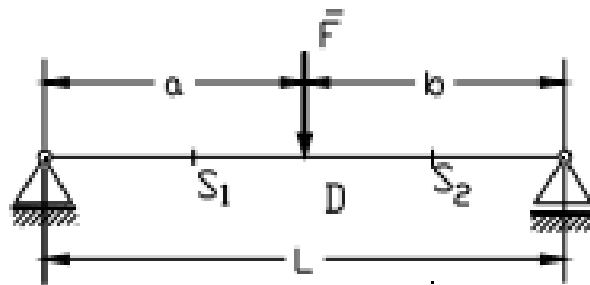
Fuente: Torres, 2014.

**2.2.10 Vigas.** En base a Llano (1999), se define como viga a una estructura diseñada para sostener cargas transversales estando apoyada en puntos aislados a lo largo de su eje, generalmente en sus extremos.

A continuación, se mencionarán las diferentes tipologías presentadas en viga por el autor Llano (1999), “Estática aplicada”.

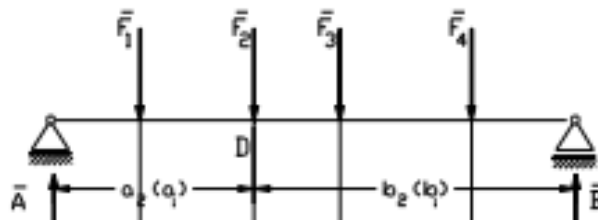
**2.2.10.1 Vigas con carga concentrada.** Las vigas de carga concentrada se muestran a continuación:

**Viga simplemente apoyada.** Se precisa como la carga concentrada que actúa en un sistema estructural.



**Figura 22. Viga simplemente apoyada con carga concentrada**

Fuente: Llano, 1999.

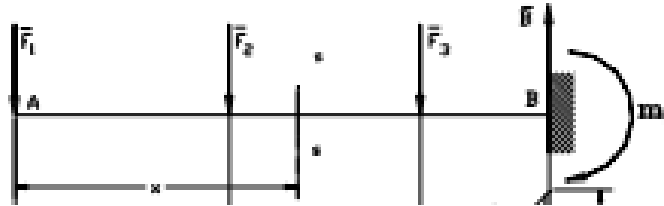


**Figura 23. Viga simplemente apoyada con varias cargas concentrada**

Fuente: Llano, 1999.



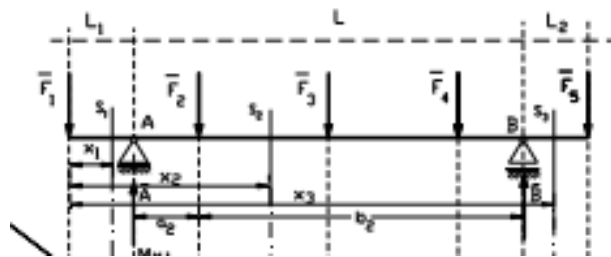
**Viga empotrada.** Se considera una viga empotrada a una viga que se comprende por tener libre en el extremo izquierdo A y empotrada en el derecho B, enfrenta cargas que se encuentran concentradas perpendiculares al eje en el que está la viga.



**Figura 24. Viga empotrada**

Fuente: Llano, 1999.

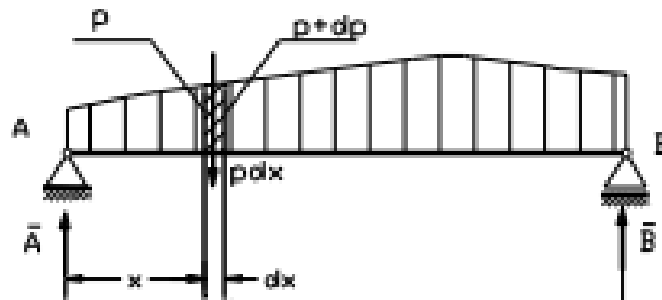
**Viga simplemente apoyada con extremos volados.** Se refiere a una viga rectilínea en la que sus apoyos no están situados en los extremos sino en puntos intermedios, de tal forma que sus extremos quedan representando un voladizo cargado con fuerzas concentradas.



**Figura 25. Viga simplemente apoyada con los apoyos en voladizo**

Fuente: Llano, 1999.

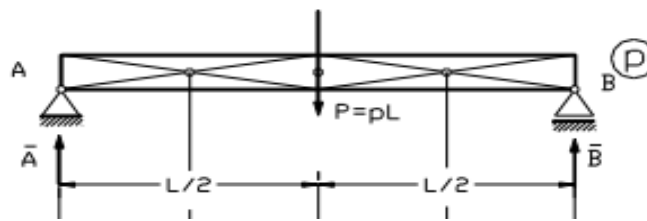
**2.2.10.2 Vigas con cargas distribuidas.** Se refiere a una viga que a lo largo de su estructura muestra una carga que se manifiesta en diferentes magnitudes y áreas representativas.



**Figura 26. Viga con cargas distribuidas**

Fuente: Llano, 1999.

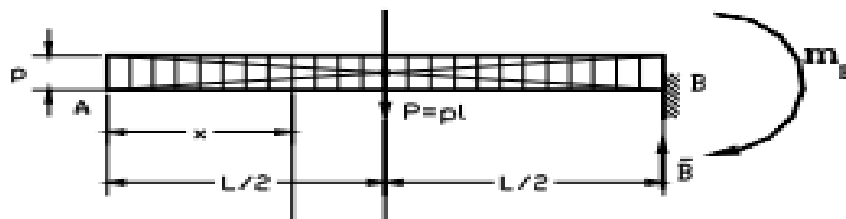
**Viga simplemente apoyada con carga uniforme.** Se trata de una viga que a lo largo de su figura manifiesta una misma carga, una carga uniforme.



**Figura 27. Viga simplemente apoyada con carga uniforme**

Fuente: Llano, 1999.

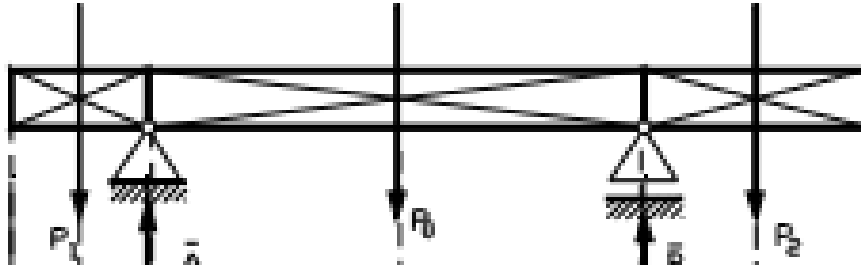
**Vigas empotradas y carga rectangular:**



**Figura 28. Viga carga rectangular y empotrado**

Fuente: Llano, 1999.

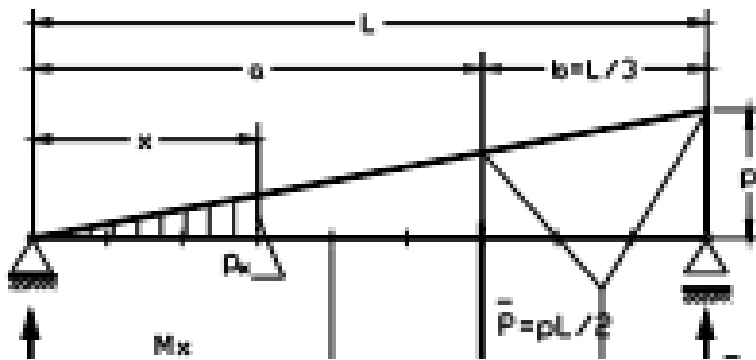
**Viga simplemente apoyada con voladizos:**



**Figura 29. Viga simplemente apoyada con voladizos**

Fuente: Llano, 1999.

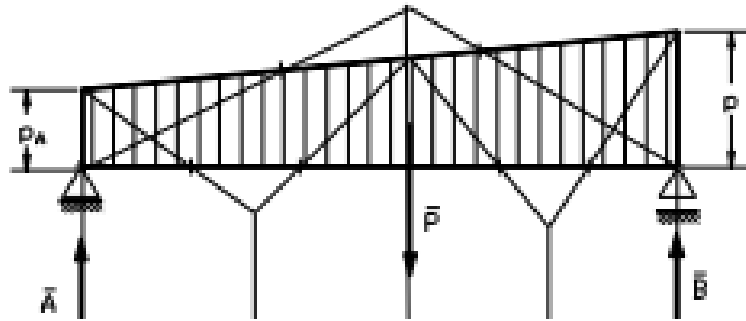
**2.2.10.3 Vigas con carga triangular.** Las vigas de carga triangular se evidencian a continuación:



**Figura 30. Viga con carga triangular**

Fuente: Llano, 1999.

**2.2.10.4 Vigas con carga trapezoidal.** Las vigas de carga trapezoidal se muestran a continuación:

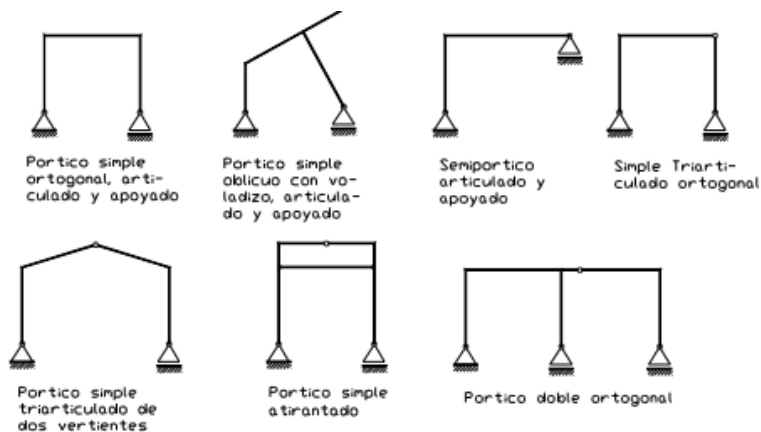


**Figura 31. Viga con carga trapezoidal**

Fuente: Llano, 1999.

**2.2.11 Porticos.** A razón de Llano (1999), se definen como estructuras compuestas por fragmentos prismáticas, generalmente rectas, que se enlazan entre sí en nudos rígidos. Los elementos verticales o muy inclinados se llaman pilares o columnas y los horizontales vigas o dinteles.

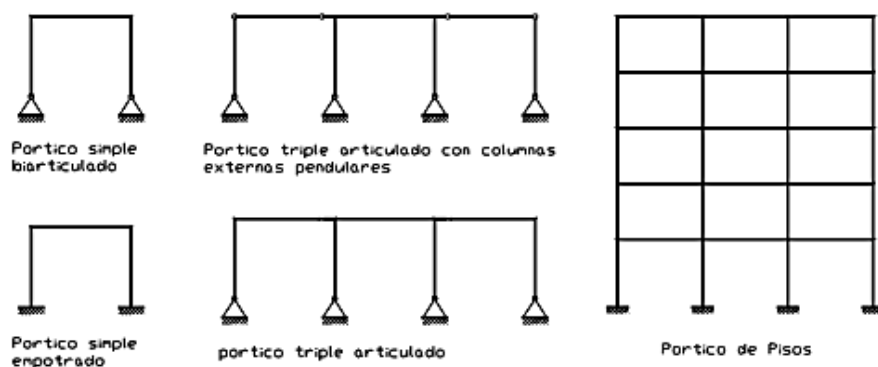
**2.2.11.1 Pórticos isostáticos.** Los pórticos isostáticos se evidencian de la siguiente manera:



**Figura 32. Pórticos isostáticos**

Fuente: Llano, 1999.

**2.2.11.2 Pórticos hiperestáticos.** Los pórticos isostáticos se muestran a continuación:



**Figura 33. Pórticos hiperestáticos**

Fuente: Llano, 1999.

## 2.3 Marco Conceptual

**2.3.1 Articulación.** Se materializa en las articulaciones que permiten la rotación fuera del plano, es decir, en tres dimensiones, y evitan el desplazamiento en cualquier dirección. En lugar de un eje cilíndrico que también está rodeado por una pista cilíndrica, la rótula está configurada por un extremo esférico que también está contenido en una cavidad esférica. En el cuerpo humano, los codos, las rodillas y los tobillos son articulaciones de este tipo (García, 1935).

**2.3.2 Columnas.** Se denominan como elementos verticales que principalmente soportan esfuerzos a compresión, y seguidamente de cortante, esto se presenta mayormente en los elementos que son más esbeltos, pandeo (Torres 2014).

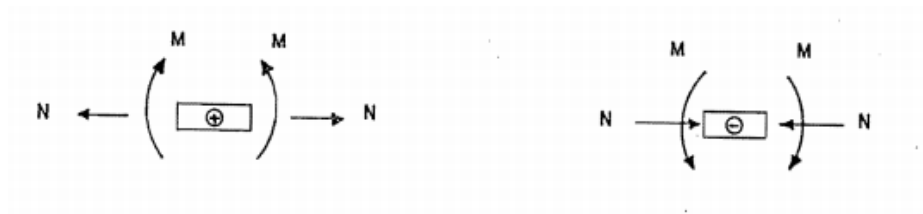
**2.3.3 Diagrama cortante.** El “Texto guía de estática y resistencia de materiales” De la cruz (1996). Define dicho diagrama de la siguiente manera. Se precisa el diagrama que Corta el cuerpo o barra, actúa en el plano perpendicular al eje.



**Figura 34. Representación cortante**

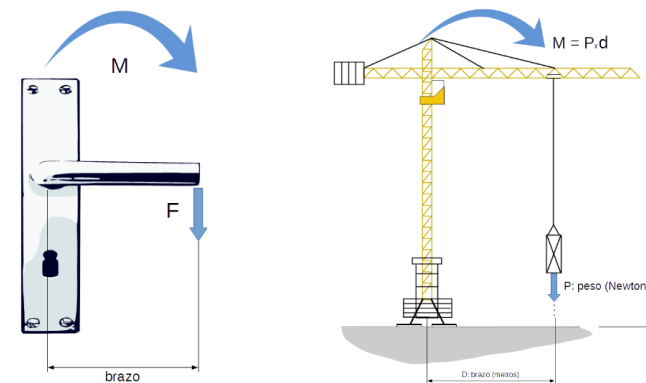
Fuente: De la Cruz, 1996.

**2.3.4 Diagrama de momento.** Definido por De la Cruz (1996), este concepto lo refiere como un diagrama que representa como se dobla el cuerpo.



**Figura 35. Representación momento flector**

Fuente: De la Cruz, 1996.



**Figura 36. Ejemplos aplicativos de momento**

Fuente: Torres, 2014.

**2.3.5 Equilibrio.** Basados en Duque (2015), se determina como garantía de que el edificio no se moverá. Tienen cierto grado de movimiento, pero en comparación con el tamaño del edificio, el desplazamiento de este edificio es muy pequeño, y a primera vista parece inmóvil sin ninguna deformación. Un objeto no se mueve en una sola dirección, si se aplican otras fuerzas de igual magnitud en la dirección opuesta, lo anularán. Cuando esto sucede, el cuerpo se encuentra en un estado de equilibrio.

**2.3.6 Estabilidad.** Duque (2015), resalta que, corresponde al riesgo de movimiento inaceptable de todo el edificio. Debe estar bien equilibrado. Cuando un huracán actúa sobre un edificio alto, si no está debidamente conectado a tierra o equilibrado por su propio peso, puede volcarse sin desintegrarse. Desde el punto de vista de la rotación, el edificio es inestable, peligro que también existe cuando el edificio no está bien equilibrado y se encuentra en un piso de resistencia desigual. Los edificios construidos en laderas empinadas pueden deslizarse hacia abajo debido a su propio peso. Todas estas condiciones inestables están relacionadas con el terreno y los cimientos del edificio.

**2.3.7 Fuerzas.** Se denomina generalmente fuerza a cualquier principio que comprende (acción, esfuerzo o influencia); considerando que ésta puede alterar el estado de cualquier cuerpo que se encuentre en movimiento o reposo o bien sea, lograr deformarlo (Torres, 2014).

**2.3.8 Fuerza axial.** Estira o acorta (según tracción o compresión).



**Figura 37. Representación de fuerza axial**

Fuente: De la Cruz, 1996.

**2.3.9 Rigidez.** De la Cruz (1999), la define como Oposición a ser deformado.

## **2.4 Marco Contextual**

Mediante este proyecto académico se realiza una consolidación de información en el área de estática, en base a la información existente a nivel educativo y el apoyo de los diferentes docentes del programa de ingeniería civil perteneciente a la universidad Francisco de Paula Santander, con el fin de aportar un material didáctico y de apoyo a los estudiantes de tercer semestre que cursan esta materia.



### **3. Diseño Metodológico**

#### **3.1 Tipo de Investigación**

Para la presente investigación se considera de tipo: descriptiva, no experimental, cuantitativo y cualitativo. Es descriptiva, por el tipo de la investigación. Esta tesis incluye las condiciones metodológicas de una información de tipo apropiada, en razón a que se requiere comprender aspectos basados en estudios ya existentes, esto quiere decir en investigaciones ya realizadas con relación al tema. Este tipo de investigación resulta no experimental, por ser una investigación en la que no se hará uso del laboratorio para obtener los resultados. De tipo cualitativo, debido a que la investigación se organiza por medio de la recolección de información y de publicaciones ya ejecutadas. Cuantitativo ya que uno de los objetivos específicos de este trabajo de grado requiere procesamiento de datos.

#### **3.2 Población y Muestra**

**3.2.1 Población.** La población de estudio que corresponde a esta investigación está referida principalmente a los elementos que hacen parte y que están relacionados con los conocimientos, conceptos y representaciones en el área de estática.

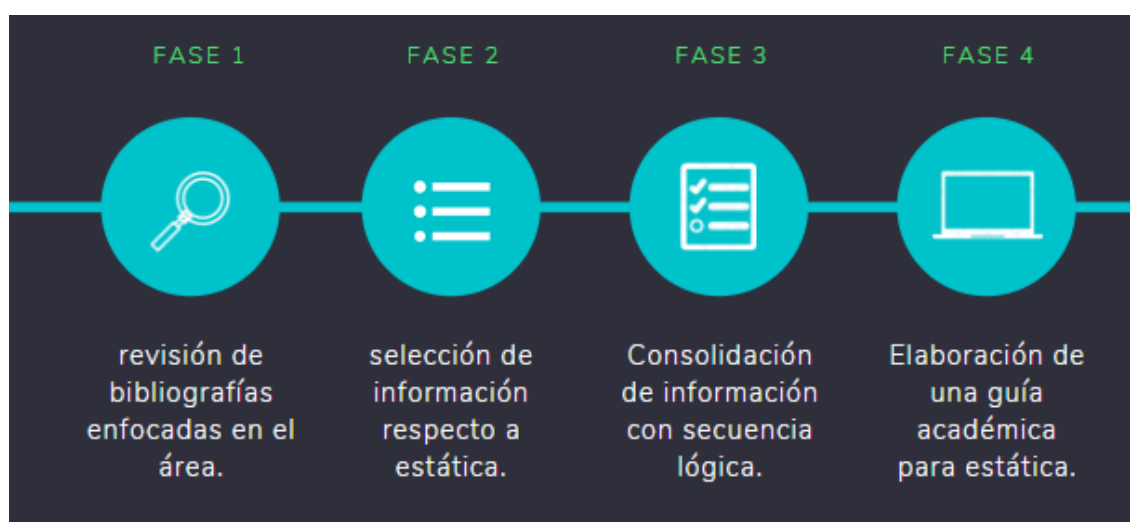
**3.2.2 Muestra.** La muestra correspondiente a este proyecto de investigación hace referencia a las estructuras isostáticas.

#### **3.3 Instrumentos para la Recolección de Información**

Los recursos para la recolección de la información empleados en este proyecto de investigación, estarán basados en fuentes secundarias como, las bases virtuales de datos de la biblioteca Eduardo Cote Lamus de la Universidad Francisco de Paula Santander y demás fuentes

virtuales de Universidades a nivel nacional e internacional. De igual forma, información recolectada de los artículos científicos, trabajos de grado, libros, normas, entre otras. Logrando así que estas referencias nos ayuden a instruir conocimientos para llevar a cabo el objetivo principal de este proyecto académico que es la realización de una guía instruccional enfocada en la materia de estática.

### 3.4 Fases y Actividades Específicas del Proyecto



**Figura 38. Diagrama de fases y actividades específicas del proyecto**

**3.4.1 Fase 1. Revisión de bibliografía.** Para efectuar este proyecto, se debe revisar la bibliografía alusiva a los temas representados en el contenido programático de estática, incluyendo conceptos previos, entre otros aspectos. Esta información revisada se consultará en bases de datos proporcionadas por la Universidad Francisco de Paula Santander y fuentes que proporcionen ingreso a su contenido educativo y académico, integrando trabajos de grado semejantes, artículos y libros relacionados.

**3.4.2 Fase 2. Selección de información.** Extraer lo más resaltante a fin de fundamentar bases teóricas y representaciones gráficas que acompañen el desarrollo constructivo en el conocimiento del estudiante, evitando el exceso de contenido que pueda desviar la finalidad de este proyecto.

**3.4.3 Fase 3. Consolidación.** Reunir la información proveniente de varias fuentes de información a fin de establecer una secuencia lógica que se adapte al contenido programático de la materia de estática.

**3.4.4 Fase 4. Realización de una guía académica en la materia de estática.** La ejecución de esta etapa demanda la realización del modelado en software de las ilustraciones que se encuentren en los ejercicios ejemplares y propuestos de la guía académica para favorecer el total aprendizaje, en cuanto a fuerzas, diagramas, reacciones, cargas, cálculos analíticos y la utilidad de conocer las aplicaciones de estos conceptos para aplicarlos a la vida profesional.

## 4. Estática para Ingenieros

### 4.1 Introducción

**4.1.1 ¿Qué es la mecánica?** En base al libro de “*Mecánica vectorial para ingenieros: estática.*”. Se considera a la mecánica como la rama de las ciencias físicas que estudia el comportamiento de los cuerpos que se encuentran sometidos a la acción de diferentes fuerzas, ya sea que se encuentre en reposo o movimiento (Hibbeler, 2004).

Como aspecto general que resalta el autor mencionado anteriormente, “esta materia puede ser dividida en tres ramas: mecánica de cuerpos rígidos, mecánica de cuerpos deformables y mecánica de fluidos” (Hibbeler, 2004, p.1). Como base fundamental expone la mecánica de cuerpos rígidos ya que se necesitará para las otras ramas mencionadas posteriormente en nuestra formación profesional.

La mecánica de cuerpos rígidos se establece por dos pilares, estática y dinámica; la diferencia entre una y otra parte desde su comportamiento en los cuerpos o masas, la primera basa su estudio en el equilibrio de los cuerpos o su movimiento a una velocidad relativamente constante, mientras que la segunda lo hace con respecto al movimiento de los mismos.

En bases a Beer, Johnston, Eisenberg & Sarubbi (1967), se puede inferir que fundamentalmente se supone en el estudio de esta materia que los cuerpos son perfectamente rígidos. No obstante, las estructuras y las máquinas en el comportamiento de la vida real nunca lo son y se presentan deformaciones debido a las cargas a las que se encuentren sometidas.

Pese a esto, afortunadamente las deformaciones se manifiestan en pequeñas muestras y casi en ningún caso compromete las condiciones de equilibrio del sistema estructural, sin embargo, se

deben tener presentes al momento de considerar las posibles fallas que se pueden presentar en dicho sistema y que posteriormente se evalúan en la mecánica de materiales que se refiere a la mecánica de cuerpos deformables.

La tercera sección de la mecánica considerada inicialmente es la mecánica de fluidos, ésta se divide en dos ramas igualmente, en el estudio de los fluidos incomprensibles y el de los fluidos comprensibles. (Beer et al., 1967).

Según, Beer et al. (1967), la mecánica es considerada el pilar de mayor impacto en las ciencias que contempla la ingeniería, ésta misma es resaltada como una ciencia aplicada ya que toma como principio y fundamento el acto de predecir los fenómenos físicos creando así las bases para la ingeniería.

Debido a que la mecánica se considera la primera ciencia física aplicada a la vida cotidiana o diaria, la ingeniería mecánica es denominada la rama más antigua de la ingeniería (Pytel & Kiusalaas, 1999).

En este proyecto se consolidará información resaltante de cada aspecto y concepto necesario para llevar a cabo una buena interpretación de los ejercicios y situaciones problemáticas (teoría, glosario, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos), todo esto se verá consolidado en el texto principal y en el anexo 2.

**4.1.2 Conceptos y principios fundamentales.** Es importante recordar que los conceptos no pueden ser definidos de forma exacta, deben fundamentarse sobre las bases de la intuición y experiencia, logrando así emplear un marco de referencia en el estudio de la mecánica. Pero a su vez, tienen parámetros en común que permiten que se hable en un idioma relativamente

universal. Tenemos que:

En concordancia con lo anterior, se destacan cuatro unidades que se destacan en la mecánica (Hibbeler, 2004).

**4.1.2.1 Longitud.** “La longitud es usada para localizar la posición de un punto en el espacio y por lo tanto describe el tamaño de un sistema físico” (Hibbeler, 2004, p.4). Luego de definir la unidad estándar de longitud, se puede usar para precisar distancias y propiedades geométricas de un cuerpo o masa como múltiplos de esta unidad.

**4.1.2.2 Tiempo.** En efecto, el tiempo se describe como una serie de eventos que presentan una secuencia. Es considerado como una magnitud absoluta y no se expresa en función de otras unidades en la mecánica newtoniana.

**4.1.2.3 Masa.** La masa es la medición que se le realiza una cantidad dada de materia y se usa para comparar la acción de un cuerpo con la de otro. “Esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitacional entre dos cuerpos y proporciona una medida de la resistencia de la materia a un cambio en su velocidad” (Hibbeler, 2004, p.3). Es considerada como una magnitud absoluta y no se expresa en función de otras unidades en la mecánica newtoniana.

**4.1.2.4 Fuerza.** Acción que ejerce un cuerpo sobre otro. Continuando con la idea, Beer et al. (1967), expone que esta puede ejercerse por contacto directo y real o por medio de la distancia, como ejemplo de este último, tendríamos las fuerzas gravitacionales y magnéticas.

De igual forma, otros autores presentan sus aportes y lo que a su consideración es de vital importancia para la construcción teórica y conceptual. Es el caso de Riley & Sturges (1996), donde su texto incluye otros fundamentos tales como:

**4.1.2.5 Espacio.** Se define como la región geométrica donde suceden los hechos físicos de interés en mecánica. Esta región se extiende sin límite en todas las direcciones.

**4.1.2.6 Materia.** Toda sustancia que ocupe espacio se define como materia. Un ejemplo de esta sería la partícula ya que se identifica como una pequeña cantidad de materia que ocupa un lugar en el espacio.

Hibbeler (2004), en su libro *“Mecánica vectorial para ingenieros: estática”*, destaca lo que él titula idealizaciones, esto se refiere a modelos que son usados para simplificar la acción de la teoría. Tales como:

**4.1.2.7 Partícula.** Como se mencionó anteriormente en el texto, la dimensión de la partícula puede pasarse por alto de alguna manera debido a su minúsculo tamaño. En definitiva, al momento en el que se caracteriza a un ejercicio de materia como partícula, no será contemplada la geometría del cuerpo.

**4.1.2.8 Cuerpo rígido.** Unión de gran número de partículas donde ellas presentan una distancia definida entre sí mismas. Las cargas que se logran incorporar o aplicar no cambian esta característica.

**4.1.2.9 Fuerza concentrada.** Simboliza el efecto que presenta una carga en un determinado punto de un cuerpo. Para ejemplificar, el autor muestra la rueda de un ferrocarril que puede ser considerado como un cuerpo rígido sobre el que actúa la fuerza concentrada del riel.

Considerando que el acero es un material que poco se deforma bajo la presencia de cargas.



**Figura 39. Representación de cuerpo rígido y fuerza concentrada**

Fuente: Hibbeler, 2004.

Para Beer et al. (1967), la mecánica elemental descansa sobre seis principios, estos son:

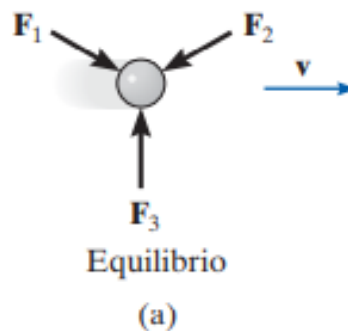
**4.1.2.10 Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas.** Dicha ley, Establece que dos fuerzas que se presentan sobre una partícula pueden ser reemplazadas por una sola fuerza denominada fuerza resultante. Esta se obtiene luego del trazar una diagonal en el paralelogramo que tiene los lados semejantes a las fuerzas aplicadas o señaladas.

**4.1.2.11 Principio de transmisibilidad.** Si una fuerza que actúa en un punto del cuerpo rígido se sustituye por otra de igual magnitud y dirección, las condiciones de equilibrio o movimiento según corresponda de un cuerpo o masa permanecerán sin alteración alguna siempre y cuando actúe en un punto diferente conservando la línea de acción.

La mecánica elemental se fundamentó sobre las bases expuestas en la publicación de *“Philosophiae naturalis principia mathematica”* de Isaac Newton en 1687. Son expuestas por Hibbeler (2004), acompañadas de sus gráficos demostrativos. Estas leyes se rigen mediante el movimiento que realice una partícula sin contemplar la aceleración, de modo que:



**4.1.2.12 Primera ley de Newton.** Relata que en caso de encontrar una partícula originalmente en reposo o que se mueva en línea recta contemplando una velocidad constante, permanecerá en ese estado siempre que no se enfrente a una fuerza denominada no balanceada.

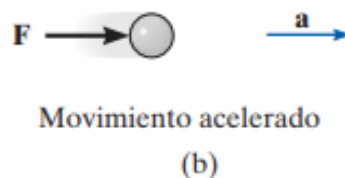


**Figura 40. Diagrama representativo sobre la primera ley de Newton**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.1.2.13 Segunda ley de Newton.** Expone que, si la fuerza  $\mathbf{F}$  resultante que actúa sobre una masa  $\mathbf{m}$  no es cero, esta tendrá una aceleración  $\mathbf{a}$  proporcional a la magnitud de dicha resultante y en la dirección de esta misma.

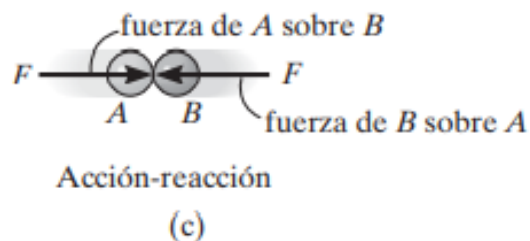
$$F = m \cdot a \text{ (ecuación 2.1.)}$$



**Figura 41. Diagrama de representación sobre la segunda ley de Newton**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.1.2.14 Tercera ley de Newton.** Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto conservan la misma magnitud, la línea de acción igual, pero sentidos opuestos.



**Figura 42. Diagrama de representación sobre la tercera ley de Newton**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.1.2.15 Ley de la atracción gravitacional de Newton.** Después de hacer públicas las tres leyes anteriores, relacionadas al movimiento, presentó la postulación de una ley que contempla la atracción gravitacional entre dos partículas, esta ley se representa por la siguiente fórmula:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ (ecuación 4.1)}$$

F: Fuerza de gravitación entre dos partículas

G: Constante de gravitación conocida.  $G = 66.73 (10^{-12}) \text{ m}^3 / (\text{kg} * \text{s}^2)$

$m_1$  y  $m_2$ : masa de las partículas respectivamente

r: distancia entre las partículas comprendidas.

En el caso de una partícula localizada en la superficie de la tierra, la única fuerza gravitacional que tiene dicha partícula es la que existe entre la propia tierra y la misma partícula,

a esta fuerza se le denomina Peso y menciona parámetros tales como:

**4.1.2.16 Peso.** Es posible desarrollar una expresión aproximadamente exacta para determinar el peso  $W$  de un cuerpo o partícula que tiene masa  $m$  utilizando la ecuación anterior, siempre y cuando se asuma a la tierra como una esfera que no gira, maneja densidad constante y considerando la masa  $m_2$  como  $M_T$ , por consiguiente, la  $r$  será la distancia entre el centro de la tierra y la partícula misma. Tendremos que:

$$W = G \frac{m * M_T}{r^2} \text{ (ecuación 4.2)}$$

Siendo  $g = GM_T/r^2$  entonces:

$$W = mg \quad \text{(ecuación 4.3)}$$

En comparación con la ecuación 2.1 utilizada en la segunda ley de Newton, llegamos a la conclusión de que  $g$  es la aceleración de la gravedad. El peso de un objeto depende de  $r$ , por lo que no es una cantidad absoluta.

Al mismo tiempo, existen conceptos y fundamentos que debemos tener en cuenta a la hora de resolver ejercicios propuestos o interpretar los ejercicios resueltos de cualquier libro o texto, Bedford & Fowler (1996), relacionan que:

**4.1.2.17 Las cifras significativas.** Se refieren al número de dígitos exactos en una cifra, siendo tomados de izquierda a derecha a partir del primer dígito que no se considere nulo. En máquinas como calculadoras o computadoras puede estar limitado debido a la cantidad de

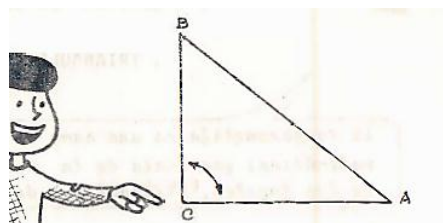
caracteres que permita.

De igual forma, Jiménez, Pizarro & Cortes (1978), explica las funciones trigonométricas necesarias para el desarrollo integral y en conjunto de saberes que son adquiridos en otras áreas, en el mismo orden de ideas, se explicará brevemente que diferencia a una función de otra y, más adelante, se ejemplificará el rol que desempeña cada una en un ejercicio práctico.

**4.1.2.18 Funciones trigonométricas.** Las funciones trigonométricas se plantean de la siguiente manera:

**Trigonometría.** Según el autor, esta palabra significa Triángulo y medida y trata de la medida de ángulos, triángulos y distancias.

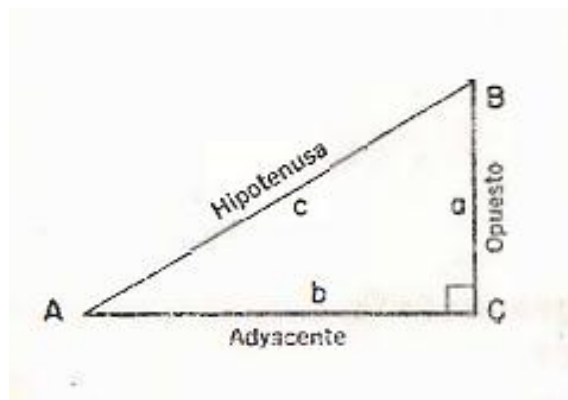
**Triángulo rectángulo.** Ángulo que comprende un ángulo recto tal como lo indica su descripción.



**Figura 43. Triángulo rectángulo**

Fuente: Jiménez et al. 1978.

En el triángulo podemos localizar catetos (opuesto y adyacente) y la hipotenusa que corresponde al lado más largo de la figura.



**Figura 44. Componentes de un triángulo rectángulo**

Fuente: Jiménez et al. 1978.

Como podemos ver en esta figura, el triángulo rectángulo comprende tres componentes: hipotenusa hace referencia al lado más largo que tiene la figura o el opuesto al ángulo recto; Cateto adyacente se refiere a la línea que va del ángulo A al ángulo C; cateto opuesto se refiere a la línea que se encuentra reflejada justo en frente del ángulo agudo.

**Función trigonométrica.** Relación entre dos de los lados que componen el triángulo rectángulo respecto a un ángulo agudo, Estas funciones son fórmulas que nos permiten resolver incógnitas tales como la medida de un lado de un triángulo rectángulo o un ángulo que pertenezca al mismo.

En el anexo 2 de este documento, primer segmento, se muestran ejemplos básicos de aplicación sobre las funciones trigonométricas.

**Tabla 2. Funciones trigonométricas**

Nombre	Abreviatura
<b>Seno</b>	Sen
<b>Coseno</b>	Cos
<b>Tangente</b>	Tan
<b>Cotangente</b>	Cot
<b>Secante</b>	Sec
<b>Cosecante</b>	Csc

Seno (Sen): se refiere a la relación entre el cateto opuesto **CO** al ángulo agudo y la hipotenusa **h**, de modo que:

$$\text{Sen}\theta = \frac{CO}{h} \quad (\text{ecuación 4.4})$$

Coseno (Cos): se refiere a la relación entre el cateto adyacente **CA** al ángulo agudo y la hipotenusa **h**, de modo que:

$$\text{Cos}\theta = \frac{CA}{h} \quad (\text{ecuación 4.5})$$

Tangente (Tan): se refiere a la relación entre el cateto opuesto **CO** y el cateto adyacente **CA** al ángulo agudo, de modo que:

$$\text{Tan}\theta = \frac{CO}{CA} \quad (\text{ecuación 4.6})$$

Cotangente (Cot): se refiere a la relación entre el cateto adyacente **CA** y el cateto opuesto **CO** al ángulo agudo, de modo que:

$$\text{Cot}\theta = \frac{CA}{CO} \quad (\text{ecuación 4.7})$$

Secante (Sec): se refiere a la relación entre la hipotenusa **h** y el cateto adyacente **CA** al ángulo agudo, de modo que:

$$\text{Sec}\theta = \frac{h}{CA} \text{ (ecuación 4.8)}$$

Cosecante (Csc): se refiere a la relación entre la hipotenusa **h** y el cateto opuesto **CO** al ángulo agudo, de modo que:

$$\text{Csc}\theta = \frac{h}{CO} \text{ (ecuación 4.9)}$$

En Grecia, el matemático y astrónomo Hiparco de Nicea en el S.II a.C, diseñó las tablas denominadas de “cuerdas” empleadas en la resolución de triángulos planos, estas posteriormente se convirtieron en las tablas de las funciones trigonométricas utilizadas en la actualidad. En ellas se iban relacionando las medidas angulares con las lineales, estableciendo valores generales que hoy se pueden tomar como guía en caso de no contar con herramientas a la mano como una calculadora (ver anexo 1).

**4.1.3 Sistema de unidades.** Las unidades empleadas para medir las cantidades elementales o resultantes en los ejercicios, no pueden seleccionarse al azar (Beer et al. 1967). Se encuentran categorizadas por sistemas y se empleará el que justifique en su momento.

Se plasmará la información más resaltante con respecto a los sistemas que son empleados mayormente en la mecánica, de modo que tenemos:

**4.1.3.1 Sistema internacional de unidades (SI).** Según Hibbeler (2004), El Sistema Internacional de Unidades, se abrevia SI por el francés “*Système International d’Unités*”, comprende una versión moderna correspondiente al sistema métrico que ha recibido

reconocimiento en todo el mundo.

En un inicio, el sistema SI define la longitud en metros **m**, el tiempo en segundos **s**, la masa en kilogramos **kg**, y la unidad de fuerza se define como newton **N**. La mayoría de autores citados en este texto, plasman las unidades en figuras de fácil entendimiento, en congruencia con este fundamento, tenemos que:

Tabla 1.2 UNIDADES DE BASE Y SUS SÍMBOLOS		
Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

**Figura 45. Unidades de base y sus símbolos**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.

Tabla 1.3 UNIDADES COMPLEMENTARIAS Y SUS SÍMBOLOS		
Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo
Ángulo plano	radián	rad
Ángulo sólido	estereorradián	sr

**Figura 46. Unidades complementarias y sus símbolos**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.



Tabla 1.4 UNIDADES DERIVADAS, SUS SIMBOLOS Y NOMBRES PARTICULARES			
Magnitud	Unidad SI derivada	Símbolo	Nombre particular
Área	metro cuadrado	m <sup>2</sup>	—
Volumen	metro cúbico	m <sup>3</sup>	—
Velocidad lineal	metro por segundo	m/s	—
Velocidad angular	radián por segundo	rad/s	—
Aceleración lineal	metro por segundo al cuadrado	m/s <sup>2</sup>	—
Frecuencia	(ciclo) por segundo	Hz	hertz
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m <sup>3</sup>	—
Fuerza	kilogramo · metro por segundo al cuadrado	N	newton
Momento de una fuerza	newton · metro	N · m	—
Presión	newton por metro cuadrado	Pa	pascal
Esfuerzo	newton por metro cuadrado	Pa	pascal
Trabajo	newton · metro	J	joule
Energía	newton · metro	J	joule
Potencia	joule por segundo	W	watt

**Figura 47. Unidades derivadas, símbolos y nombres particulares**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.

Los signos se obtienen por medio de fundamentos matemáticos como multiplicación y división. Según Riley & Sturges. (1996). Para poder formar los respectivos nombres y símbolos de múltiplos (múltiplos y submúltiplos decimales) en el sistema internacional de unidades (SI) se utilizan ciertos prefijos que el describe en la siguiente figura:

Tabla 1.5 MÚLTIPLOS DE UNIDADES SI		
Factor por el cual se multiplica la unidad	Prefijo	
	Nombre	Símbolo
$10^{18}$	exa	E
$10^{15}$	peta	P
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^2$	hecto <sup>d</sup>	h
10	deca <sup>d</sup>	da
$10^{-1}$	deci <sup>d</sup>	d
$10^{-2}$	centi <sup>d</sup>	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f
$10^{-18}$	atto	a

**Figura 48. Múltiplos de unidades SI**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.

A manera de fácil entendimiento o secuencia coherente y lógica, en la siguiente figura Beer et al. (1967), destaca en su texto las principales unidades utilizadas en mecánica junto con su respectiva simbología:

**Tabla 1.2. Principales unidades del SI usadas en mecánica**

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	$m/s^2$
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	$rad/s^2$
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	$rad/s$
Área	Metro cuadrado	. . .	$m^2$
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	$kg/m^3$
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	$s^{-1}$
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	$J/s$
Presión	Pascal	Pa	$N/m^2$
Esfuerzo	Pascal	Pa	$N/m^2$
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	$m/s$
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	$m^3$
Líquidos	Litro	L	$10^{-3} m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

**Figura 49. Principales unidades del SI usadas en mecánica**

Fuente: Beer et al. 1967.

**4.1.3.2 Sistema de unidades U.S Customary System.** Mas conocido como “sistema gravitatorio británico” o de uso común en estados unidos. Según Riley & Sturges (1996), este sistema se fundamenta en el que las unidades fundamentales son el pie (ft) para longitud, la libra (lb) para fuerza y el segundo (s) para tiempo.

En relación con lo anterior, expone un comparativo entre los dos sistemas y así permite tener esta información a la mano, de modo que:

Tabla 1.6 FACTORES DE CONVERSIÓN ENTRE UNIDADES SI Y DEL U.S. CUSTOMARY SYSTEM		
Magnitud	U.S.C.S a SI	SI a U.S.C.S.
Longitud	1 in. = 25,40 mm	1 m = 39,37 in.
	1 ft = 0,3048 m	1 m = 3,281 ft
	1 mi = 1,609 km	1 km = 0,6214 mi
Área	1 in. <sup>2</sup> = 645,2 mm <sup>2</sup>	1 m <sup>2</sup> = 1550 in. <sup>2</sup>
	1 ft <sup>2</sup> = 0,0929 m <sup>2</sup>	1 m <sup>2</sup> = 10,76 ft <sup>2</sup>
Volumen	1 in. <sup>3</sup> = 16,39(10 <sup>3</sup> )mm <sup>3</sup>	1 mm <sup>3</sup> = 61,02(10 <sup>-6</sup> ) in. <sup>3</sup>
	1 ft <sup>3</sup> = 0,02832 m <sup>3</sup>	1 m <sup>3</sup> = 35,31 ft <sup>3</sup>
	1 gal = 3,785 L <sup>a</sup>	1 L = 0,2646 gal
Velocidad	1 in./s = 0,0254 m/s	1 m/s = 39,37 in./s
	1 ft/s = 0,3048 m/s	1 m/s = 3,281 ft/s
	1 mi/h = 1,609 km/h	1 km/h = 0,6214 mi/h
Aceleración	1 in./s <sup>2</sup> = 0,0254 m/s <sup>2</sup>	1 m/s <sup>2</sup> = 39,37 in./s <sup>2</sup>
	1 ft/s <sup>2</sup> = 0,3048 m/s <sup>2</sup>	1 m/s <sup>2</sup> = 3,281 ft/s <sup>2</sup>
Masa	1 slug = 14,59 kg	1 kg = 0,06854 slug
Momento segundo de superficie	1 in. <sup>4</sup> = 0,4162(10 <sup>6</sup> ) mm <sup>4</sup>	1 mm <sup>4</sup> = 2,402(10 <sup>-6</sup> ) in. <sup>4</sup>
Fuerza	1 lb = 4,448 N	1 N = 0,2248 lb
Carga distribuida	1 lb/ft = 14,59 N/m	1 kN/m = 68,54 lb/ft
Presión o esfuerzo	1 psi = 6,895 kPa	1 kPa = 0,1450 psi
	1 ksi = 6,895 MPa	1 MPa = 145,0 psi
Momento (flexor, de una fuerza o un par)	1 ft · lb = 1,356 N · m	1 N · m = 0,7376 ft · lb
Trabajo o energía	1 ft · lb = 1,356 J	1 J = 0,7376 ft · lb
Potencia	1 ft · lb/s = 1,356 W	1 W = 0,7376 ft · lb/s
	1 hp = 745,7 W	1 kW = 1,341 hp

<sup>a</sup>Para el litro de usan los símbolos L y l. Como "l" puede confundirse con el número "1", el National Institute of Standards and Technology recomienda para los Estados Unidos el símbolo "L" (v. NIST special publication 811, sept.1991).

**Figura 50. Unidades del SI en relación con el U.S Customary system.**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.

El sistema se diferencia del SI que se contempló anteriormente de manera evidente ya que no comparten simbología similar en las mismas unidades, es muy importante tener presente este criterio para la resolución de ejercicios o entrega de información.

De igual forma, Beer et al. (1967), nos proporciona la siguiente figura para complementar las incógnitas que surjan en la resolución de ejercicios a manera conceptual.

**Tabla 1.3. Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI**

Cantidad	Unidad de uso común en EU	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s <sup>2</sup>	0.3048 m/s <sup>2</sup>
	in./s <sup>2</sup>	0.0254 m/s <sup>2</sup>
Área	ft <sup>2</sup>	0.0929 m <sup>2</sup>
	in. <sup>2</sup>	645.2 mm <sup>2</sup>
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	short ton (tonelada corta)	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
	de un área	in. <sup>4</sup>
de una masa	lb · ft · s <sup>2</sup>	1.356 kg · m <sup>2</sup>
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft <sup>2</sup>	47.88 Pa
	lb/in. <sup>2</sup> (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft <sup>3</sup>	0.02832 m <sup>3</sup>
	in. <sup>3</sup>	16.39 cm <sup>3</sup>
	Líquidos	gal
Trabajo	qt	0.9464 L
	ft · lb	1.356 J

**Figura 51. Unidades de uso común en EU y su equivalencia en SI**

Fuente: Beer et al. 1967.



## 4.2 Estática de Partículas

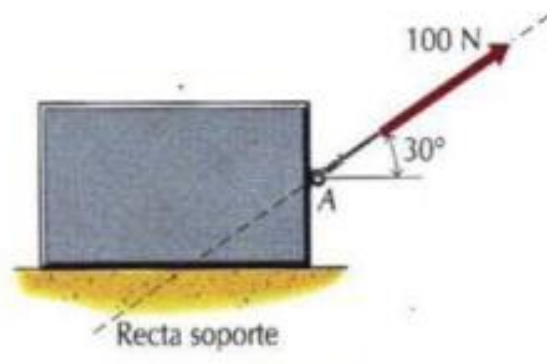
**4.2.1 Fuerzas en un plano.** En base a Beer et al. (1967), una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro, esta se caracteriza por parámetros como punto de aplicación, magnitud y dirección. Las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. La magnitud de una fuerza se define por diferentes connotaciones y esto depende del sistema de unidades que estemos empleando. La dirección de una fuerza estará definida por la línea de acción y el sentido que presente la fuerza. La línea de acción se refiere a una línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se determina por el ángulo que forma con algún eje fijo encontrado.



**Figura 52. Representación de una fuerza sobre una partícula**

Fuente: Beer et al. 1967.

En la anterior figura observamos dos casos similares, podemos ver una partícula **A**, que se enfrenta a una carga. Lo que diferencia a una figura de la otra es la dirección que asume la fuerza, por tanto, es importante recordar que el sentido de la fuerza está dado al final del segmento lineal que la representa en el diagrama.



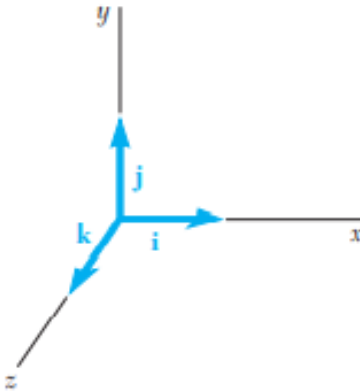
**Figura 53. Explicativo de las características de una fuerza**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.

Según el autor de la figura, se entiende que la fuerza que aplicada al bloque es de 100 N lo cual nos señala el módulo, esta se encuentra dirigida hacia la derecha del bloque y forma con la horizontal un ángulo de  $30^\circ$  hacia arriba (nos indican dirección y sentido) y el punto de aplicación está dado por el punto **A**.

Las fuerzas acá mencionadas únicamente involucraron dos dimensiones y pudieron ser formuladas y resueltas en un solo plano, de ahí su denominación.

**4.2.2 Fuerzas en el espacio.** Como definición para Beer et al. (1967), en esta sección se analizan situaciones problemáticas que involucran las tres dimensiones del espacio, por tanto, consideramos los tres ejes coordenados (**x**, **y**, **z**). posteriormente, serán representados los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, dirigidos a lo largo de los ejes **x**, **y** y **z**, respectivamente, tal como se muestra a continuación:



**Figura 54. Representaciones vectores unitarios**


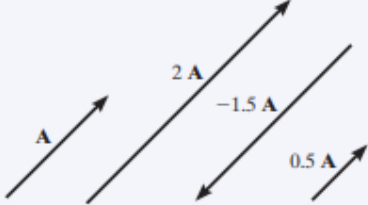
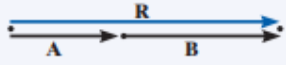
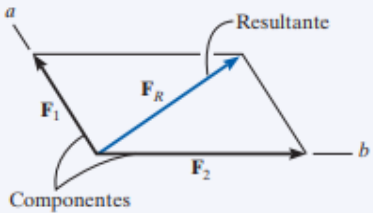
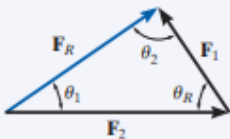
Fuente: Beer et al. 1967.

Es importante refrescar o estudiar nuevamente conocimientos de álgebra vectorial, enfatizando el estudio de fuerzas y pares, ya que el conocimiento del álgebra vectorial un fundamento necesario para el estudio de la estática y de muchas otras áreas de la mecánica para ingenieros. Estos se pueden consultar en textos ya publicados que se respaldan en un orden conceptual lógico y proporcionan un análisis más detallado de cada ecuación y procedimiento.

A manera de repaso, se colocará una figura donde el autor relaciona, conceptos fundamentales que involucran vectores, fórmulas y representación gráfica respectiva a cada proceso. Esto con el fin de colocar respaldos a los ítems anteriormente definidos.

Hay que recordar que estos temas están resumidos, y se debe estudiar a fondo cada uno para incentivar el autoanálisis y los criterios necesarios para la resolución de ejercicios que se presentaran en la guía académica de este escrito.



<p>Un escalar es un número positivo o negativo; por ejemplo, masa y temperatura.</p> <p>Un vector tiene magnitud y dirección, y la punta de la flecha indica el sentido del vector.</p>		
<p>La multiplicación o la división de un vector por, o entre, un escalar sólo cambiará la magnitud del vector. Si el escalar es negativo, el sentido del vector cambiará de manera que actúe en el sentido opuesto.</p>		
<p>Si los vectores son colineales, la resultante es simplemente la suma algebraica o escalar.</p>	$R = A + B$	
<p><b>Ley del paralelogramo</b></p> <p>Dos fuerzas se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Las <i>componentes</i> forman los lados del paralelogramo y la <i>resultante</i> es la diagonal.</p> <p>Para encontrar las componentes de una fuerza a lo largo de cualesquiera de los dos ejes, extienda líneas desde la cabeza de la fuerza, paralelas a los ejes, a fin de formar las componentes.</p> <p>Para obtener las componentes de la resultante, muestre la forma en que se suman las fuerzas de punta a cola usando la regla del triángulo; después utilice la ley de los cosenos y la ley de los senos para calcular sus valores.</p>	$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \theta_R}$ $\frac{F_1}{\sin \theta_1} = \frac{F_2}{\sin \theta_2} = \frac{F_R}{\sin \theta_R}$	 

**Componentes rectangulares: dos dimensiones**

Los vectores  $F_x$  y  $F_y$  son componentes rectangulares de  $F$ .

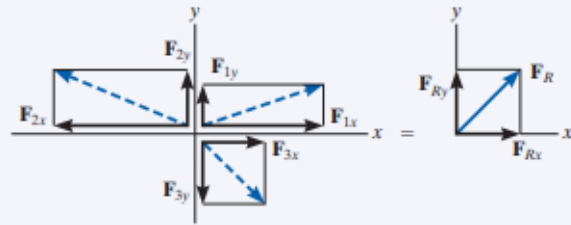
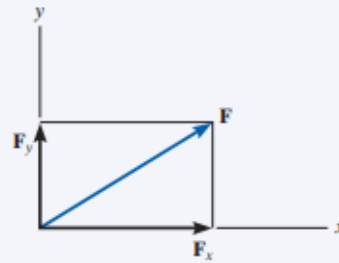
La fuerza resultante se determina a partir de la suma algebraica de sus componentes.

$$F_{Rx} = \Sigma F_x$$

$$F_{Ry} = \Sigma F_y$$

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

**Vectores cartesianos**

El vector unitario  $u$  tiene una longitud de uno, sin unidades, y apunta en la dirección del vector  $F$ .

Una fuerza puede descomponerse en sus componentes cartesianos a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de manera que  $F = F_x i + F_y j + F_z k$ .

La magnitud de  $F$  se determina a partir de la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes.

Los ángulos directores coordenados  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  se determinan al formular un vector unitario en la dirección de  $F$ . Las componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de  $u$  representan  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ .

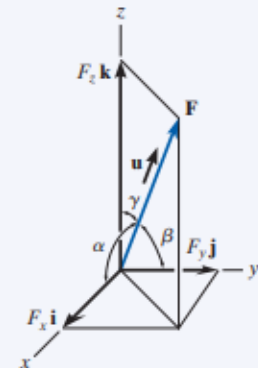
$$u = \frac{F}{F}$$

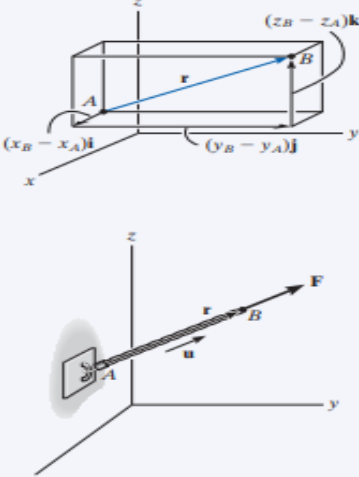
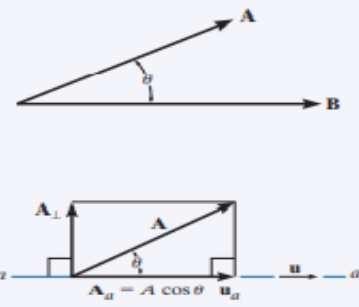


$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$u = \frac{F}{F} = \frac{F_x}{F} i + \frac{F_y}{F} j + \frac{F_z}{F} k$$

$$u = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k$$



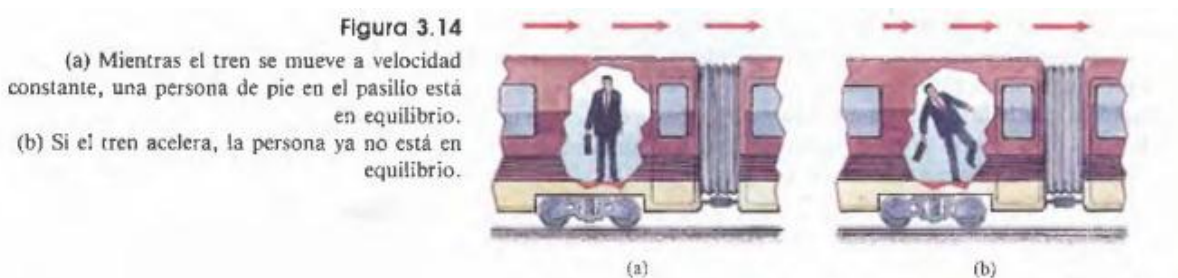
<p>Los ángulos directores coordenados están relacionados de manera que sólo dos de los tres ángulos son independientes entre sí.</p> <p>Para encontrar la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes, exprese cada fuerza como un vector cartesiano y sume las componentes <math>\mathbf{i}</math>, <math>\mathbf{j}</math>, <math>\mathbf{k}</math> de todas las fuerzas en el sistema.</p>	$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}$	
<p><b>Vectores de posición y fuerza</b></p> <p>Un vector de posición ubica un punto en el espacio con relación a otro. La forma más fácil de formular las componentes de un vector de posición es determinar la distancia y dirección que debe recorrerse a lo largo de las direcciones <math>x</math>, <math>y</math> y <math>z</math> —desde la cola hasta la cabeza del vector.</p> <p>Si la línea de acción de una fuerza pasa a través de los puntos <math>A</math> y <math>B</math>, entonces la fuerza actúa en la misma dirección que el vector de posición <math>\mathbf{r}</math>, que se define mediante el vector unitario <math>\mathbf{u}</math>. De esta manera, la fuerza puede expresarse como un vector cartesiano.</p>	$\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$ $\mathbf{F} = F\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$	
<p><b>Producto punto</b></p> <p>El producto punto entre dos vectores <math>\mathbf{A}</math> y <math>\mathbf{B}</math> genera un escalar. Si <math>\mathbf{A}</math> y <math>\mathbf{B}</math> se expresan en forma vectorial cartesiana, entonces el producto punto es la suma de los productos de sus componentes <math>x</math>, <math>y</math> y <math>z</math>.</p> <p>El producto punto puede usarse para determinar el ángulo entre <math>\mathbf{A}</math> y <math>\mathbf{B}</math>.</p> <p>El producto punto también se utiliza para determinar la componente proyectada de un vector <math>\mathbf{A}</math> sobre un eje <math>aa</math> que se define por medio de su vector unitario <math>\mathbf{u}_a</math>.</p>	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right)$ $\mathbf{A}_a = A \cos \theta \mathbf{u}_a = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_a)\mathbf{u}_a$	

**Figura 55. Resumen de fundamentos de algebra vectorial aplicados a mecánica**

Fuente: Hibbeler, 2004.

La figura anterior, nos menciona algunos de los conceptos que debemos emplear en la mecánica, nos da una vista general de cada concepto y nos proporciona las fórmulas necesarias para tenerlas a la mano.

**4.2.3 Equilibrio de una partícula.** Por definición del autor Pytel & Kiusalaas (1999), precisamos equilibrio por parámetros como, por ejemplo: si la fuerza resultante perteneciente al mismo sistema de fuerzas que actúa sobre un objeto desaparece, el objeto está en equilibrio. Cuando la fuerza total de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, se dice que la partícula está en equilibrio. Entonces, la partícula permanece quieta (si inicialmente está en reposo) o se mueve en línea recta a una velocidad uniforme.



**Figura 56. Representación de equilibrio en la vida cotidiana**

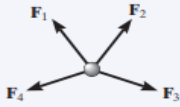
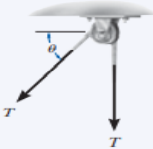
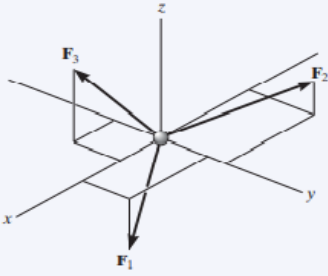
Fuente: Bedford & Fowler, 1996.

En esta figura se aprecia la definición de equilibrio, ya que se basa en que el elemento o partícula se encuentre en un estado invariable; el autor explica que en el apartado a) se conserva velocidad constante por un tramo recto, esto implica que los cuerpos en el interior del tren se encuentran en equilibrio y que no hay condiciones que los alteren. Diferente a lo que ocurre en el apartado b) donde se presenta algún cambio de condiciones.

**4.2.3.1 Condiciones para el equilibrio de una partícula.** La suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio debe ser igual a cero. Se usará el símbolo  $\sum F$  para denotar la suma de las fuerzas externas.

$$\sum F = 0 \quad (\text{ecuación 4.10})$$

Esta ecuación es suficiente para determinar el equilibrio en las partículas o cuerpos. Se determina como una consecuencia de la segunda ley del movimiento de Newton, la cual define que:  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Se observa que el sistema de fuerzas satisface la ecuación, entonces será  $m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , y por lo tanto la aceleración de la partícula también será  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Como resultado, la partícula se mueve con velocidad constante o permanece en reposo totalmente.

<p><b>Partícula en equilibrio</b></p> <p>Cuando una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante, se dice que está en equilibrio. Esto requiere que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula formen una fuerza resultante que sea igual a cero.</p> <p>Para tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, es necesario trazar su diagrama de cuerpo libre. Este diagrama es un perfil delineado de la partícula que muestra todas las fuerzas enlistadas con sus magnitudes y direcciones conocidas o desconocidas.</p>	$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$	
<p><b>Dos dimensiones</b></p> <p>Las dos ecuaciones escalares de equilibrio de fuerzas pueden aplicarse con referencia a un sistema coordenado <math>x, y</math> establecido.</p> <p>La fuerza de tensión desarrollada en un <i>cable continuo</i> que pasa sobre una polea sin fricción debe tener una magnitud <i>constante</i> a lo largo del cable para poder mantenerlo en equilibrio.</p> <p>Si el problema implica un resorte elástico lineal, entonces el alargamiento o la compresión <math>s</math> del resorte puede relacionarse con la fuerza aplicada a éste.</p>	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$  $F = ks$	 <p>El cable está en tensión</p>
<p><b>Tres dimensiones</b></p> <p>Si la geometría tridimensional es difícil de visualizar, la ecuación de equilibrio debe aplicarse con un análisis de vector cartesiano. Esto requiere expresar primero cada fuerza incluida en el diagrama de cuerpo libre como un vector cartesiano. Cuando las fuerzas se suman y se igualan a cero, las componentes <math>\mathbf{i}</math>, <math>\mathbf{j}</math> y <math>\mathbf{k}</math> también son iguales a cero.</p>	$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ $\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$	

**Figura 57. Descripción de equilibrio en partículas en tres dimensiones**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.2.4 Ecuaciones de equilibrio.** Como explica Hibbeler (2004), en su texto, las condiciones requeridas para lograr que un cuerpo rígido sometido a un sistema de fuerzas se encuentre en equilibrio, se reduce a que la fuerza resultante y el momento de par resultante que actúan sobre el cuerpo sean iguales a cero. Para esto se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\sum F = 0 \quad (\text{ecuación 4.10})$$

$$\sum M_o = 0 \quad (\text{ecuación 4.11})$$

Se refiere a  $\sum F$  como la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y  $\sum M_o$  define la suma de los momentos de todas las fuerzas con relación a cualquier punto denominado “O” que puede ser localizado en el cuerpo o fuera de él.

**4.2.4.1 Sistema de fuerzas bidimensional.** Bedford & Fowler (1996), precisan este sistema como las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio en un plano bidimensional o coplanar. Señala un sistema coordenado de manera que las fuerzas queden en el plano x-y. Considerando las ecuaciones de equilibrio, se debe tener en cuenta los ejes que influyen en la resolución de este tipo de problemas. Por lo tanto, se utilizarán las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = 0 \quad (\text{ecuación 4.12})$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{ecuación 4.13})$$

Es importante recordar que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio deben ser igual a cero.

**4.2.4.2 Sistema de fuerzas tridimensional.** Continuando con la definición dada por el autor mencionado en el ítem anterior, este caso se puntualiza cuando el sistema de fuerzas externas que operan sobre un cuerpo en equilibrio es tridimensional, se puede expresar la suma de las fuerzas externas con las siguientes fórmulas:

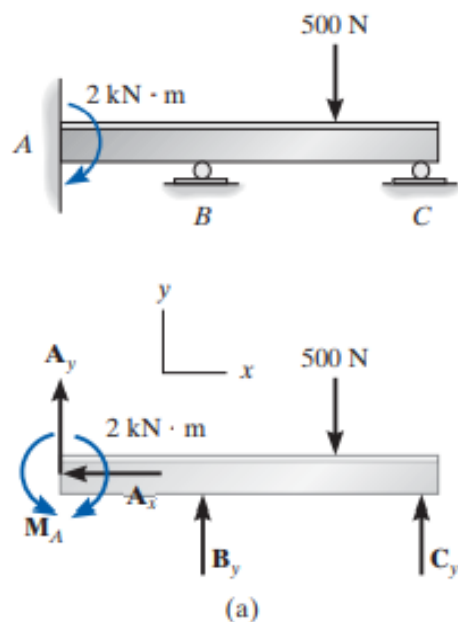
$$\Sigma F_x = 0 \quad (\text{ecuación 4.12})$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (\text{ecuación 4.13})$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad (\text{ecuación 4.14})$$

**4.2.4.3 Restricciones y determinación estática.** En base a Hibbeler (2004), se puede resumir que, no sólo es necesario satisfacer las ecuaciones de equilibrio para asegurar el mismo en un cuerpo rígido, el cuerpo también debe estar restringido propiamente por sus soportes. Se presentan casos de cuerpos que pueden tener más soportes que los necesarios para el equilibrio, o como caso contrario, cuerpos que pueden no tener suficientes o estar colocados de manera que causen el movimiento del cuerpo. El autor describe dos tipos de restricciones que serán expuestas a continuación:

**Restricciones redundantes.** Cuando un cuerpo presenta soportes redundantes, o más de los necesarios para mantenerse en equilibrio, se define como estáticamente indeterminado lo cual significa que tendrá más cargas desconocidas sobre el cuerpo que ecuaciones de equilibrio disponibles para la solución.



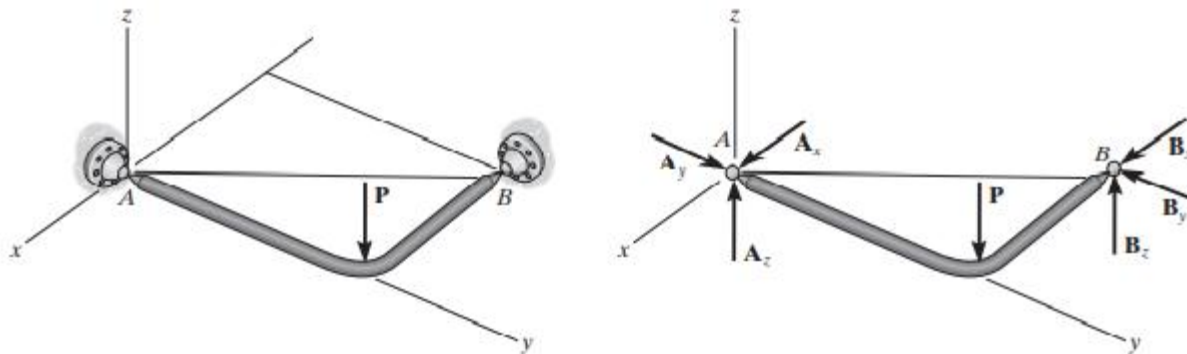
**Figura 58. Ejemplo restricciones redundantes**

Fuente: Hibbeler, 2004.

Como se puede observar en la anterior figura, la viga presenta tres tipos de apoyo, los cuales, a la hora de resolver, se van a tomar como incógnitas dependiendo de su característica, de su movimiento y restricción ( $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$ ,  $M_A$ ). Puede ayudar a determinar esta condición de estáticamente indeterminado, una vez realizamos el diagrama de cuerpo libre y hacemos conteo de las incógnitas.

**Restricciones impropias.** Se identifica cuando se tienen tantas fuerzas desconocidas como cantidad de ecuaciones de equilibrio, esto no siempre garantiza que un cuerpo sea estable cuando está sometido a una carga particular.





**Figura 59. Ejemplo restricciones impropias**

Fuente: Hibbeler, 2004.

Se puede observar que se encuentran dos apoyos de rodillo en este caso, y las reacciones que reflejan ambos interceptan el eje AB, lo cual indica que los momentos de estas fuerzas con respecto a AB, tendrán valor de cero y esto hará que la carga P gire con respecto al mismo eje.

**4.2.5 Diagrama de cuerpo libre.** En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se refiere a una situación física real o hipotética, en ambos casos, se debe realizar un esquema que plasme las condiciones físicas del problema, y este se conoce como diagrama de cuerpo libre. (Beer et al. 1967).

Pytel & Kiusalaas (1999), describe lo importante que es trazar de manera correcta los diagramas de cuerpo libre (DCL) en la solución o interpretación de problemas de equilibrio. Esto para ampliar el concepto de las reacciones causadas por las diversas conexiones y soportes.

En base a Riley & Sturges (1996), cada fuerza conocida estará representada en el mapa físico con su módulo, dirección y significado correctos. Para módulos con fuerzas desconocidas, se deben usar símbolos de texto. Si una fuerza tiene un soporte en línea recta Conocido, pero se desconoce su módulo y significado, se asumirá este último. Cuando se borra el módulo

desconocido, se borrará la dirección correcta. Por definición, el módulo de fuerza es siempre positivo; por lo tanto, si la solución da un módulo negativo, significa que la dirección de la fuerza es opuesta a la dirección asumida en el diagrama de dimensión libre.

**Procedimiento para trazar un diagrama de cuerpo libre**

Para aplicar las ecuaciones de equilibrio, debemos tomar en cuenta *todas las fuerzas que actúan sobre una partícula*, por tal motivo no se debe exagerar en enfatizar la importancia de trazar primero un diagrama de cuerpo libre. Para construir un diagrama de cuerpo libre, se requiere llevar a cabo los tres pasos siguientes.

**Trace un perfil delineado.**  
Imagine que la partícula está *aislada* o “liberada” de su entorno al trazar su perfil delineado.

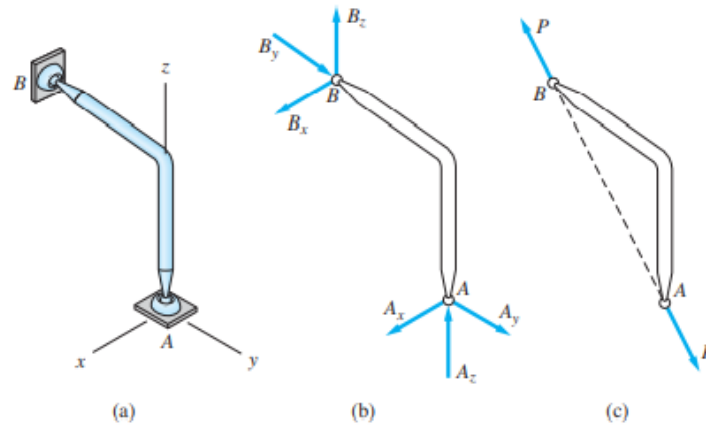
**Muestre todas las fuerzas.**  
Indique sobre este bosquejo *todas* las fuerzas que *actúan sobre la partícula*. Éstas pueden ser *fuerzas activas*, que tienden a poner la partícula en movimiento, o *fuerzas reactivas*, que son el resultado de las restricciones o soportes que tienden a evitar el movimiento. Para tomar en cuenta todas esas fuerzas, puede resultar útil trazar los límites de la partícula, y señalar con cuidado cada fuerza que actúa sobre ella.

**Identifique cada una de las fuerzas.**  
Las fuerzas que son *conocidas* deben ser marcadas con sus propias magnitudes y direcciones. Para representar las magnitudes y direcciones de las fuerzas desconocidas se usan letras.

**Figura 60. Pasos propuestos para realizar un DCL**

Fuente: Hibbeler, 2004.

Dependiendo de las facultades de cada alumno, se pueden variar o suprimir algunos pasos, pero en esta figura, se toman todos los aspectos en consideración, por lo tanto, se recomienda siempre tomar la teoría a favor y ajustarlo a nuestras capacidades o debilidades, todo a fin de entender mejor la problemática y otorgar una solución lógica.



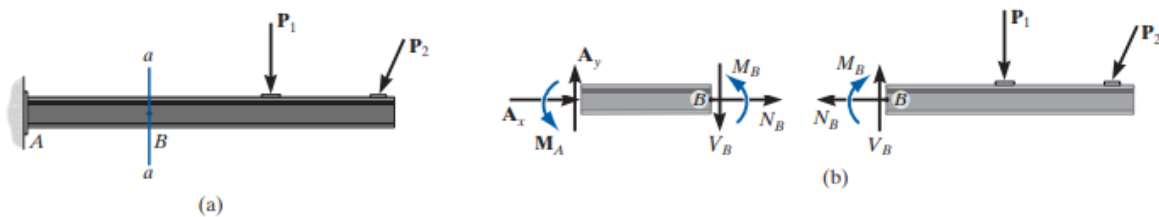
**Figura 61. Ejemplo de diagrama de cuerpo libre en elemento**

Fuente: Pytel & Kiusalaas, 1999.

En esta figura, se despeja la situación que debe ser resuelta, la posicionamos en los ejes coordenados y otorgamos variables correspondientes a cada punto de acción.

### 4.3 Cuerpos rígidos: Sistema de Fuerzas Equivalentes

**4.3.1 Fuerzas internas.** Son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman un cuerpo rígido. Si su estructura consta de varias partes, la fuerza que mantiene unidas estas partes también se define como fuerza interna (Beer et al. 1967).



**Figura 62. Representación fuerzas internas**

Fuente: Pytel & Kiusalaas, 1999.

**4.3.2 Fuerzas externas.** Se refieren a la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido considerado. Son las que ocasionan el comportamiento externo del cuerpo. Estas fuerzas externas producen que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo (Beer et al. 1967).



Figura 3.1

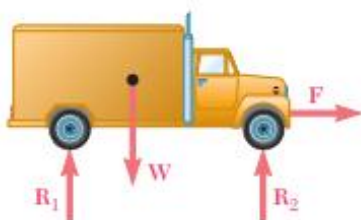


Figura 3.2

### Figura 63. Representación fuerzas externas

Fuente: Beer et al. 1967.

En esta figura vemos el caso de un camión que es arrastrado por tres hombres hacia adelante mediante cuerdas atadas a la parte frontal del mismo, realizando el diagrama de cuerpo libre se observa, el peso del camión ( $W$ ), las variables  $R_1$  Y  $R_2$  traducen la fuerza que opone la tierra hacia el camión y la fuerza que realizan los hombres por medio de la cuerda se referencia por la letra  $F$ .

Es importante reconocer que elementos podrían estar involucrados y así tener en cuenta todas las variables, para ejemplificar, podría existir la presencia de un gato mecánico o cualquier soporte que altere las condiciones.

**4.3.3 Fuerzas gravitatorias.** En el texto “*Mecánica para ingeniería: dinámica.*” Bedford & Fowler (1996), describen esta fuerza en su texto debido a la importancia de entenderla, la fuerza gravitatoria o peso del cuerpo puede ser definido como la fuerza ejercida sobre un cuerpo por la gravedad de la tierra, esta se puede representar por medio de un vector, de modo que:



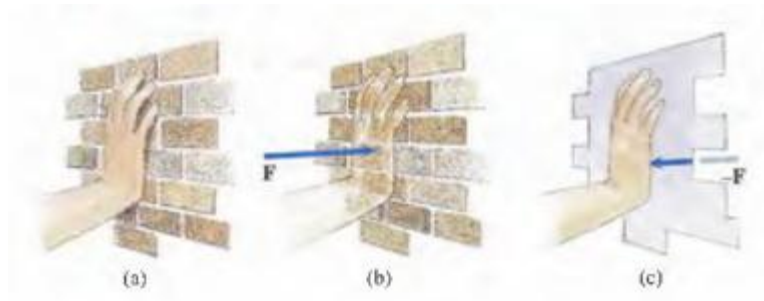
**Figura 64. Representación fuerza gravitatoria**

Fuente: Bedford & Fowler, 1996.

Observamos el peso que proviene del objeto y que se obtiene de la fórmula descrita a continuación donde **m** señala la masa del cuerpo o peso y la letra **g** indica el valor de la gravedad que se traduce como una constante y se determina su valor dependiendo del sistema de unidades que se emplee ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (**SI**) ó,  $g = 32.2 \text{ pie/s}^2$  (**sistema inglés**)).

$$W = m * g \text{ (ecuación 4.15)}$$

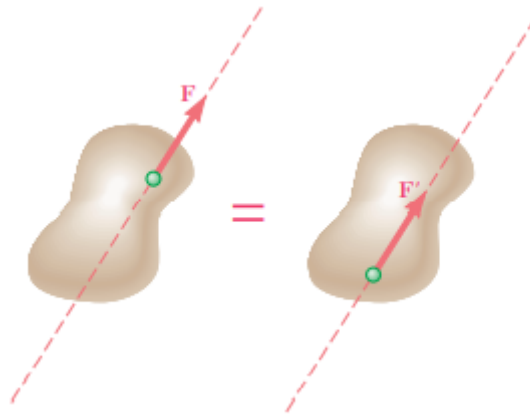
**4.3.4 Fuerzas de contacto.** En base al autor del párrafo anterior, tal como su nombre lo indica, son las fuerzas que se reflejan en el contacto entre cuerpos, para ejemplificar, al realizar una fuerza de empuje sobre una pared, la superficie de la mano ejerce una fuerza sobre la superficie de la pared y esta se puede representar por un vector **F**, de igual forma, la pared ejerce una fuerza de igual magnitud y opuesta **-F** sobre la mano (tercera ley de Newton).



**Figura 65. Representación fuerza gravitatoria**

Fuente: Bedford & Fowler, 1996.

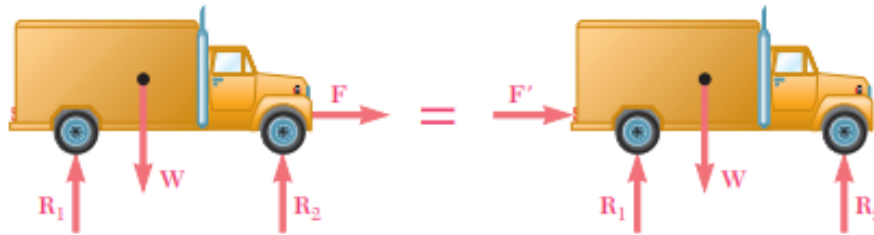
**4.3.5 Fuerzas equivalentes (principio de transmisibilidad).** Fundamentalmente Beer et al. (1967), relata que las condiciones bien sean de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán sin alterarse si una fuerza  $\mathbf{F}$  que opera en un punto dado de ese cuerpo es remplazada por una fuerza  $\mathbf{F}'$  que presenta la misma magnitud y dirección, pero se desempeña en un punto distinto, pero conservan la misma línea de acción.



**Figura 66. Fuerzas equivalentes**

Fuente: Beer et al. 1967.

Si se conserva la línea de acción, se presentará la misma magnitud y dirección de la Fuerza empleada.

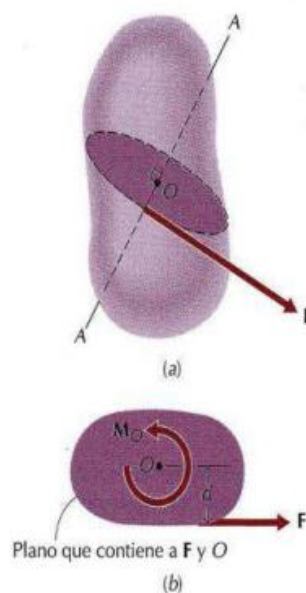


**Figura 67. Fuerzas equivalentes**

Fuente: Beer et al. 1967.

En la vida real, conservando el mismo ejemplo del camión, se concluye que la fuerza que se realiza desde la parte frontal por cuerdas será la misma que se puede realizar desde la parte posterior por empuje, ya que conserva la misma línea de acción, pero cambia de posición.

**4.3.6 Momento de una fuerza.** Según Riley & Sturges (1996), el momento de una fuerza respecto a un punto o respecto a un eje se define como una medida de la fuerza que tiende a hacer girar el cuerpo alrededor del punto o del eje determinado.



**Figura 68. Explicación de momento de una fuerza**

Fuente: Riley & Sturges, 1996.

El momento de la fuerza  $F$  respecto al punto  $O$  (fig. 4-1a)' es una medida de la tendencia de la fuerza a hacer girar al cuerpo alrededor del eje  $AA$ . La recta  $AA$  es perpendicular al plano que contiene a la fuerza  $F$  y al punto  $O$ .

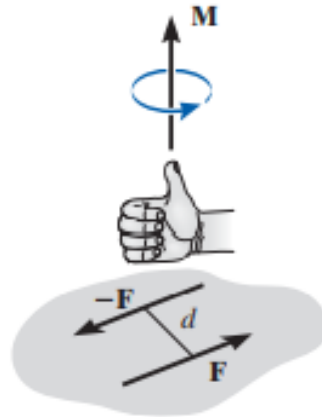
Por lo tanto, se define a momento como el producto del módulo de fuerza por la distancia desde la recta de soporte al eje. En el sistema U.S. Customary System, las unidades que se utilizan comúnmente para el momento son la  $\text{lb} \cdot \text{ft}$  y la  $\text{lb} \cdot \text{in.}$  o bien  $\text{in.} \cdot \text{lb}$ ,  $\text{ft} \cdot \text{lb}$  y  $\text{ft} \cdot \text{kip}$  según corresponda. Por otro lado, en el sistema SI, las unidades que se utilizan principalmente para medir momentos son el  $\text{N} \cdot \text{m}$ ,  $\text{kN} \cdot \text{m}$ , entre otros.

$$M = F * d \text{ (ecuación 4.16)}$$

**4.3.7 Momento de un par.** Un par es definido como dos fuerzas paralelas que presentan la misma magnitud, con direcciones opuestas, y se encuentran separadas por una distancia perpendicular denominada “ $d$ ”. En el momento la fuerza resultante es cero, por lo tanto, el único efecto de un par será efectuar una rotación o tendencia a rotar en una dirección específica (Hibbeler 2004).

**4.3.8 Formulación escalar.** Se emplea la ecuación 4.16 de forma que, la dirección y el sentido del momento de par es determinado mediante la regla de la mano derecha, esta comprende que el pulgar indica la dirección cuando los dedos se cierran con el sentido de rotación que es causado por las dos fuerzas.

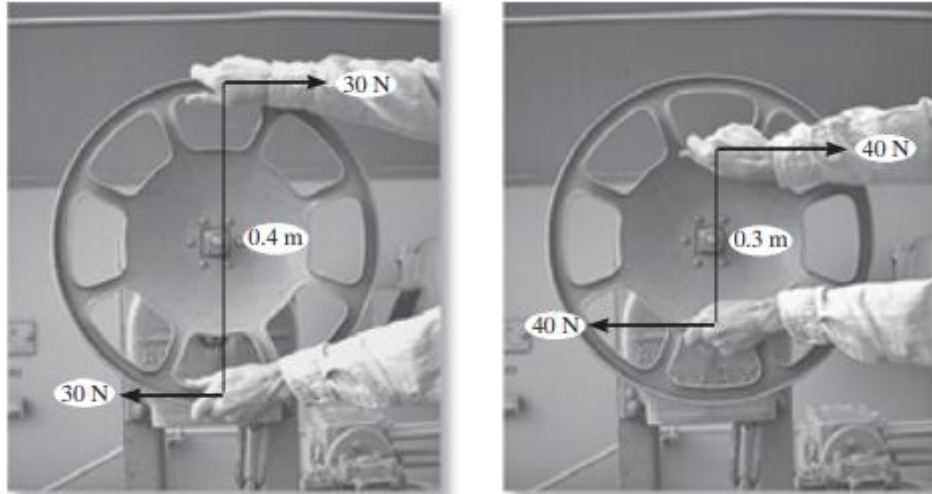




**Figura 69. Representación formulación escalar**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.3.9 Pares equivalentes.** Se definen dos pares equivalentes cuando efectúan un momento con la misma magnitud y dirección (Hibbeler, 2004).



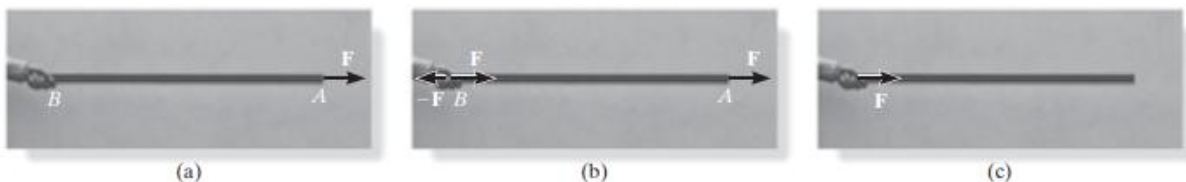
**Figura 70. Ejemplos pares equivalentes**

Fuente: Hibbeler, 2004.

En esta figura se observan pares equivalentes ya que empleando la fórmula de momento, concluimos que cada uno tiene una magnitud de  $M = 30 \text{ N}(0.4 \text{ m}) = 40 \text{ N}(0.3 \text{ m}) = 12 \text{ N} \cdot \text{m}$ , y

cada uno de ellos se dirige hacia el mismo plano. Se puede deducir que el segundo caso requiere una fuerza mayor para poder provocar el giro, debido a que las manos se encuentran más cerca una de la otra.

**4.3.10 Simplificación de un momento de fuerza y de par.** Para Hibbeler (2004), En ocasiones es conveniente simplificar el sistema de fuerzas y momentos de par que actúan sobre un cuerpo en una forma más simple, si se reemplaza con un sistema equivalente por una sola fuerza resultante que actúa sobre un punto específico y los momentos de par resultantes. El efecto externo del sistema sobre el cuerpo es el mismo que el efecto externo causado por el sistema original de fuerza y momento, el sistema es equivalente. En este caso, el efecto externo del sistema se refiere a la traslación y rotación del objeto cuando se mueve libremente, o si el cuerpo permanece fijo, se refiere a la fuerza de reacción en el soporte.

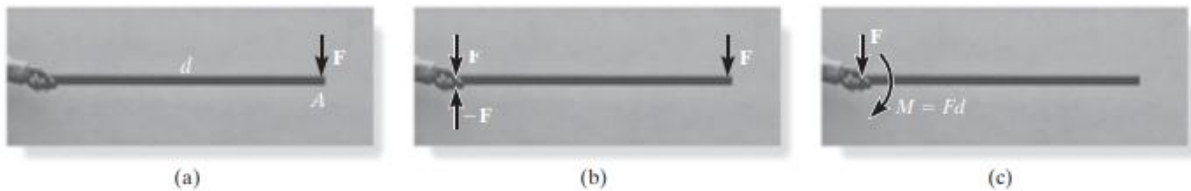


**Figura 71. Simplificación de un momento de fuerza**

Fuente: Hibbeler, 2004.

Observamos que una barra está sujeta a una fuerza  $F$  en el punto  $A$ . Si un par de fuerzas iguales pero opuestas ( $F$  y  $-F$ ) se agregan al punto  $B$  en la línea de acción de  $F$ , observamos que en  $-F$  y  $F$  en  $A$  se cancelan entre sí, dejando solo  $F$  en  $B$ . Por lo tanto, la fuerza  $F$  se mueve de  $A$  a  $B$  sin cambiar su influencia externa sobre el elemento, es decir, la fuerza de reacción en el agarre permanece sin cambios. Lo anterior demuestra el principio de transmisibilidad, que determina que la fuerza que actúa sobre un objeto (barra) es un vector deslizante porque puede aplicarse a

cualquier punto de su línea de acción.



**Figura 72. Simplificación de un momento de par**

Fuente: Hibbeler, 2004.

También podemos usar el proceso anterior para mover la fuerza a un punto que no esté en la línea de acción de la fuerza. Si  $F$  se aplica perpendicular a la barra, podemos agregar un par de fuerzas iguales pero opuestas  $F$  y  $-F$  a  $B$ . Ahora se aplica la fuerza  $F$  a  $B$ , y las otras dos fuerzas,  $F$  en  $A$  y  $-F$  en  $B$ , forman un par, lo que da como resultado un momento par  $M = F \cdot d$ . Por lo tanto, siempre que se agregue el momento  $M$  para mantener el sistema equivalente, la fuerza  $F$  se puede mover de  $A$  a  $B$ .

#### 4.4 Equilibrio de Cuerpos Rígidos

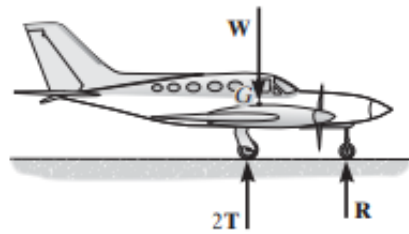
La estática se fundamenta en el análisis de cuerpos en equilibrio, incluidos puentes, presas, edificios y operadores de robot. En el presente texto ya se contempló el cálculo y concepto de momento, de forma que se pueden afrontar problemas de equilibrio más interesantes en modelos simples de algunos soportes utilizados en ingeniería. Posteriormente, se plasmarán pautas para usar ecuaciones de equilibrio y así obtener información sobre el sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo.

**4.4.1 Equilibrio de cuerpos rígidos en dos dimensiones.** Hibbeler (2004), considera que, un sistema de fuerzas que opera sobre un cuerpo rígido se encuentra o puede proyectarse en un solo

plano y, además, cualquier momento de par que actúa sobre un cuerpo rígido es normal a ese plano. Este tipo de sistema de fuerza y momento de par a menudo se denomina sistema de fuerza coplanar o bidimensional.

Muchas aplicaciones en ingeniería involucran sistemas de fuerza y momento. Por ejemplo, las fuerzas y momentos ejercidos sobre diferentes vigas y estructuras planas, accesorios, algunas grúas y otras máquinas, y ciertos tipos de puentes y presas. Aquí se analizan soportes, diagramas de cuerpo libre y ecuaciones de equilibrio para aplicaciones 2D (Bedford & Fowler, 1996).

En base a Hibbeler (2004), se establece que la mejor manera de entender estas fuerzas es trazar un diagrama de cuerpo libre del objeto, lo que representa estar aislado o "libre" de su entorno, de ahí su definición, un "cuerpo libre". En este esquema, se especifican todas las fuerzas y momentos de par que el mismo entorno ejerce sobre el cuerpo para que puedan ocurrir ciertos efectos, para luego considerarse al aplicar las ecuaciones de equilibrio.



**Figura 73. Ejemplo de fuerzas bidimensionales**

Fuente: Hibbeler, 2004.

El autor del texto anteriormente mencionado, presenta este ejemplo donde expone un avión que presenta plano simétrico a través de su eje central, por lo cual, se entiende que las cargas que actúan conservan también esta condición de simetría. Cada una de las dos llantas de las alas

soportará la misma carga denominada  $\mathbf{T}$ , y es representada en la vista lateral (bidimensional) del avión como  $2\mathbf{T}$ .

Para evaluar la condición de equilibrio de un cuerpo rígido en estructuras bidimensionales, se seleccionan únicamente los ejes X y Y en el plano de una estructura, por lo tanto, se tienen en cuenta las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = 0 \text{ (ecuación 4.12)}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ (ecuación 4.13)}$$

$$\sum M = 0 \text{ (ecuación 4.17)}$$

**4.4.2 Reacciones en apoyos y conexiones en una estructura bidimensional.** Hibbeler (2004), presenta dos reglas generales al momento de considerar los diversos tipos de reacciones que ocurren en soportes y puntos de contacto entre cuerpos pertenecientes a sistemas coplanares de fuerza, estas se basan en lo siguiente:

- Si un soporte o punto de contacto impide la traslación de un cuerpo en una dirección determinada, entonces resulta una fuerza sobre el mismo cuerpo en esa dirección.
- Si se evita cualquier rotación, se produce un momento de par sobre el cuerpo o estructura.

En congruencia con Beer et al. (1967), las reacciones que se efectúan sobre un cuerpo o estructura bidimensional pueden ser contempladas en tres tipos de apoyo o conexiones:

**4.4.2.1 Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.** Los apoyos y conexiones de esta característica, pueden anular el movimiento únicamente en una

dirección. Las reacciones que se presentan en este caso involucran a una sola incógnita, es decir, la magnitud de la reacción. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre con una letra apropiada.

Para tomar como ejemplo, los apoyos y conexiones que causan reacciones de este tipo incluyen rodillos, balancines, superficies sin fricción, eslabones o bielas y cables cortos, collarines sobre barras sin fricción y pernos sin fricción en ranuras lisas.

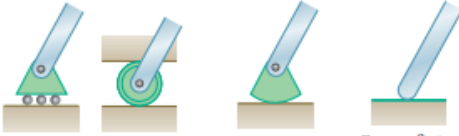
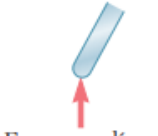
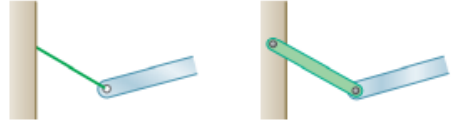
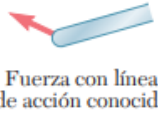
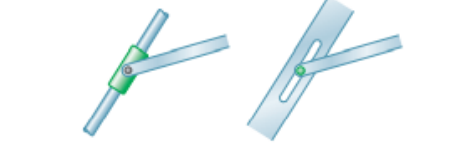
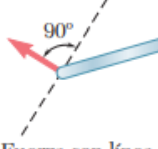

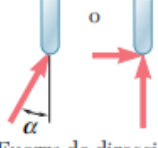

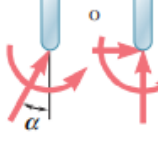
**4.4.2.2 Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.** Los apoyos y conexiones que pertenecen a esta sección, pueden impedir el movimiento del cuerpo rígido en todas direcciones, pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Usualmente se representan por sus componentes  $x$  y  $y$ , ya que involucran dos incógnitas.

Para tomar como ejemplo y referencia, los apoyos y conexiones que causan reacciones de este tipo incluyen pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones o bisagras y superficies rugosas.

**4.4.2.3 Reacciones equivalentes a una fuerza y a un par.** Estas reacciones son provocadas por soportes fijos que se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre, confinándolo así por completo. Los soportes fijos generan fuerzas a través de la superficie de contacto, sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran tres incógnitas, dos componentes de la fuerza y el momento del par.

Para una mejor comprensión, el autor presenta una figura donde muestra los diferentes tipos de apoyos con su tipo de reacción y el número de incógnitas en cada caso, sin embargo, existen

mas tipos de apoyos que se pueden encontrar en la estructura y se muestran de la siguiente forma:

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 <p>Rodillos o patines      Balancín      Superficie sin fricción</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Cable corto      Eslabón corto</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Collarín sobre una barra sin fricción      Perno sin fricción en una ranura lisa</p>	 <p>Fuerza con línea de acción conocida</p>	1
 <p>Perno sin fricción, articulación o bisagra      Superficie rugosa</p>	 <p>Fuerza de dirección desconocida</p>	2
 <p>Apoyo fijo</p>	 <p>Fuerza y par</p>	3

**Figura 74. Apoyos o conexiones en estructuras bidimensionales**

Fuente: Beer et al. 1967.

Se puede hacer la comparación con otros textos que representan estos soportes o conexiones para generar una mejor claridad en caso de que una fuente no sea suficiente.


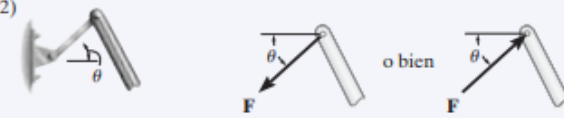

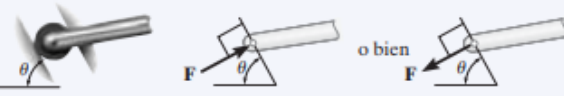

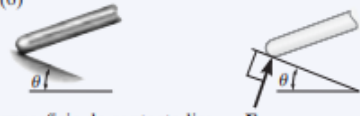
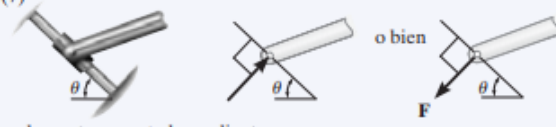

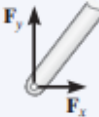
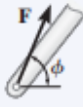

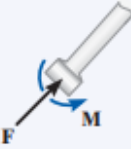

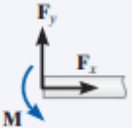

TABLA 5-1 Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas bidimensionales		
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
(1)  cable		Una incógnita. La reacción es una fuerza de tensión que actúa alejándose del elemento en la dirección del cable.
(2)  eslabón sin peso		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa a lo largo del eje del eslabón.
(3)  rodillo		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(4)  rodillo o pasador confinado en una ranura lisa		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la ranura.
(5)  soporte mecedora		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(6)  superficie de contacto lisa		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.
(7)  elemento conectado mediante un pasador a un collar sobre una barra lisa		Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.



TABLA 5-1 Continuación		
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
(8)  pasador liso o articulación lisa	 o bien 	Dos incógnitas. Las reacciones son dos componentes de fuerza, o la magnitud y la dirección $\phi$ de la fuerza resultante. Observe que $\phi$ y $\theta$ no son necesariamente iguales [no suelen serlo, a menos que la barra mostrada sea un eslabón como en (2)].
(9)  elemento con conexión fija a un collar sobre una barra lisa		Dos incógnitas. Las reacciones son el momento de par y la fuerza que actúa perpendicularmente a la barra.
(10)  soporte fijo	 o bien 	Tres incógnitas. Las reacciones son el momento de par y las dos componentes de fuerza, o el momento de par y la magnitud y la dirección $\phi$ de la fuerza resultante.

**Figura 75. Soportes o apoyos sometidos a fuerzas bidimensionales**

Fuente: Hibbeler, 2004.

En esta figura se presentan tipos comunes de soportes o apoyos para cuerpos sometidos a sistemas coplanares de fuerzas. (En todos los casos se da por entendido que se conoce el ángulo  $\theta$ ). Se debe interpretar cuidadosamente cada uno de los símbolos usados para representar esos apoyos o conexiones y los tipos de reacciones que éstos ejercerán sobre los elementos que presenten contacto.

El autor también ilustra los apoyos vistos en las estructuras reales y en cada paréntesis se encuentra el número de tipo de conexión de la figura anterior (figura 75).



El cable ejerce una fuerza sobre la ménsula, o soporte, en la dirección del cable. (1)



Esta trabe de concreto descansa sobre el borde que supuestamente actúa como una superficie de contacto lisa. (6)



Esta instalación de edificio está soportada por un pasador en la parte superior de la columna. (8)

El soporte de mecedora para esta trabe de puente permite el movimiento horizontal de manera que el puente pueda dilatarse y contraerse por cambios en la temperatura. (5)

Las vigas del piso de este edificio se sueldan entre sí para formar conexiones fijas. (10)



**Figura 76. Ilustración real de apoyos o soportes enfrentados a fuerzas bidimensionales**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.4.3 Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones.** Según Pytel & Kiusalaas (1999), el análisis de estructuras tridimensionales se basa principalmente en el álgebra vectorial. Las fuerzas se pueden determinar incluso en estructuras espaciales simples. En el análisis de sistemas de fuerzas coplanares, el uso de la notación vectorial no es útil. Este no es el caso de un análisis de equilibrio tridimensional, donde la notación vectorial suele ser definitivamente más favorable que la notación escalar.

Por definición, un cuerpo se encuentra en equilibrio si la resultante del sistema de fuerzas que se efectúa sobre el cuerpo desaparece. Un sistema de fuerzas general siempre se puede reducir a un sistema equivalente fuerza-par  $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$  y  $\mathbf{C}^{\mathbf{R}} = \Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{O}}$  ( $\mathbf{O}$  se refiere a cualquier punto punto).

Por tanto, para que un cuerpo esté en equilibrio, se deben satisfacer las dos ecuaciones vectoriales siguientes:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ (ecuación 4.10)}$$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{0} \text{ (ecuación 4.17)}$$

Y de ahí, se extraen las seis ecuaciones escalares equivalentes que son:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \text{ (ecuación 4.18)}$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \text{ (ecuación 4.19)}$$

Estas ecuaciones pueden ser empleadas para resolver un máximo de seis incógnitas. Se supone que los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  se intersecan en el punto  $O$ . Es fundamental recordar que las sumatorias se deben considerar sobre todas las fuerzas que se efectúan sobre el cuerpo, incluyendo las reacciones en los apoyos.

En congruencia con Beer et al. (1967), en la mayor parte de los ejercicios por resolver, las ecuaciones escalares (2.24) y (2.25) se obtienen de modo más práctico si primero se formulan en forma vectorial las condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido en cuestión. Para esto se considera la siguiente ecuación:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \sum \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0} \text{ (ecuación 4.20)}$$

En esta ecuación se expresan las fuerzas  $\mathbf{F}$  y los vectores de posición  $\mathbf{r}$  en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Posteriormente, se efectúan los cálculos de todos los productos vectoriales, ya sea mediante cálculo directo o con determinantes. A través de una elección cuidadosa del punto  $O$  se puede suprimir de los cálculos hasta tres unidades desconocidas de las reacciones. Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en

cada una de las dos relaciones se obtienen las ecuaciones escalares deseadas.

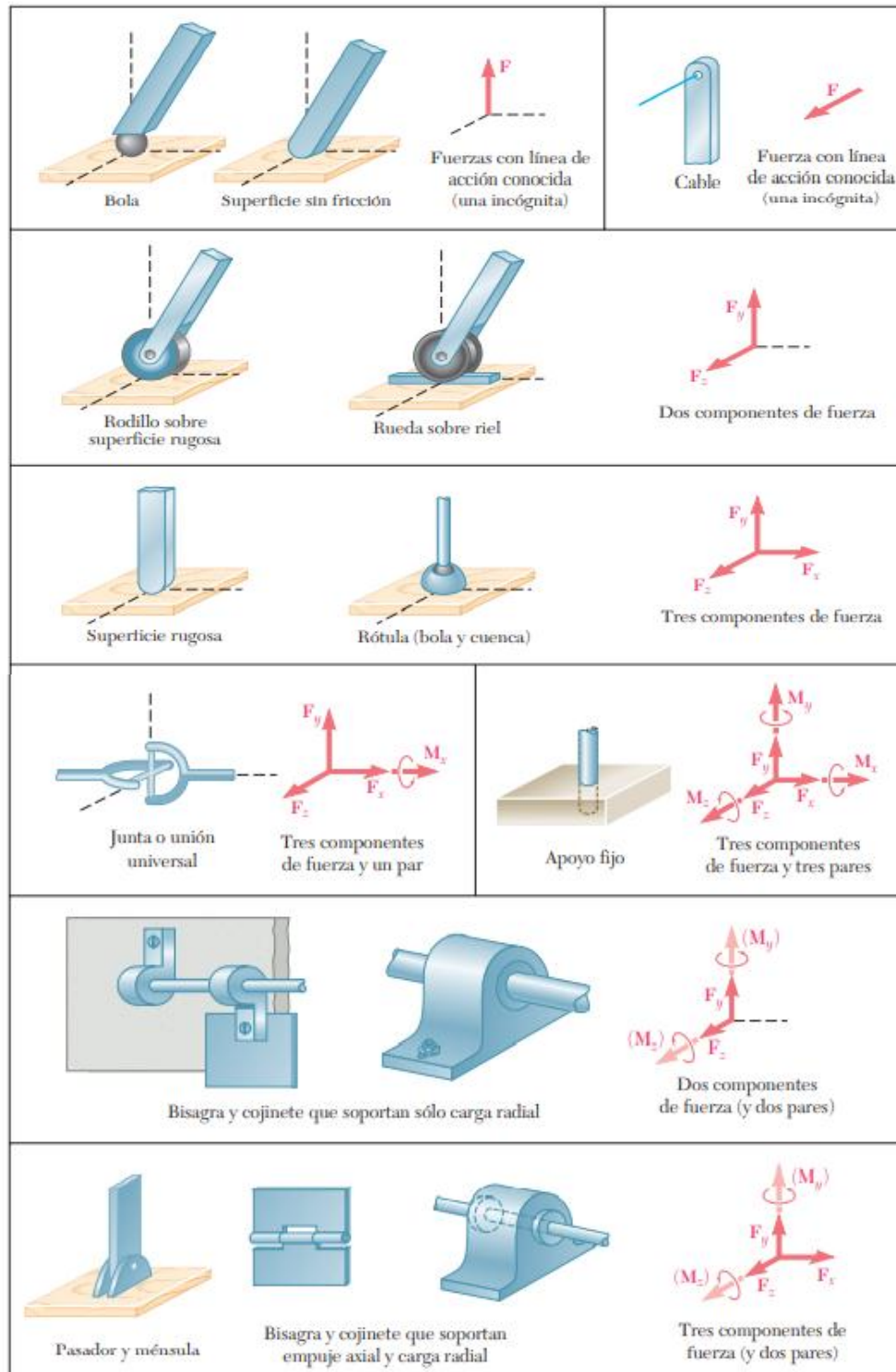
#### **4.4.4 Reacciones en puntos de apoyo y articulaciones es estructuras tridimensionales.**

Basándonos en Beer et al. (1967), en las estructuras tridimensionales, las reacciones van desde una sola fuerza de dirección conocida ejercida por una superficie sin fricción hasta un sistema acoplado de fuerzas ejercidas por un soporte fijo. Así, en problemas de equilibrio de estructuras tridimensionales, puede haber entre una y seis incógnitas asociadas a la reacción correspondiente a cada soporte o conexión.

Hibbeler (2004), resalta la importancia de reconocer los símbolos usados para representar cada uno de esos apoyos o articulaciones y comprender claramente cómo se desarrollan las fuerzas y los momentos de par. De la misma forma que en el caso bidimensional:

- Una fuerza se desenvuelve mediante un soporte que evita el movimiento de su elemento conectado.
- Un momento de par se desenvuelve cuando se evita el giro del elemento conectado.

Al realizar el análisis de cuerpos conectados, es fundamental tomar como punto de referencia la tercera ley de Newton que expone lo siguiente: por cada acción existe una reacción igual y opuesta. Si un ejercicio contiene miembros de dos fuerzas, el Diagrama de Cuerpo Libre se puede simplificar considerablemente recordando el principio de las dos fuerzas: dos fuerzas en equilibrio deben ser iguales, opuestas y colineales.



**Figura 77. Puntos de apoyo y articulaciones sometidos a fuerzas tridimensionales**

Fuente: Beer et al. 1967.

TABLA 5-2 Soportes para cuerpos rígidos sometidos a sistemas de fuerzas tridimensionales







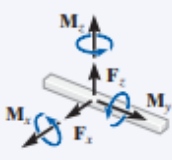

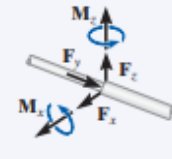

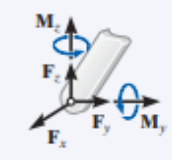

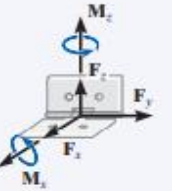

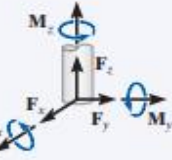
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa alejándose del elemento en la dirección conocida del cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>Soporte superficial liso</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(3)</p>  <p>rodillo</p>		<p>Una incógnita. La reacción es una fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie en el punto de contacto.</p>
<p>(4)</p>  <p>rótula esférica</p>		<p>Tres incógnitas. Las reacciones son tres componentes rectangulares de fuerza.</p>
<p>(5)</p>  <p>chumacera simple</p>		<p>Cuatro incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y dos componentes de momento de par que actúan perpendicularmente al eje. <i>Nota:</i> por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.</p>

TABLA 5-2 Continuación		
Tipos de conexión	Reacción	Número de incógnitas
(6)  chumacera simple con flecha cuadrada		Cinco incógnitas. Las reacciones son dos fuerzas y tres componentes de momento de par. <i>Nota:</i> por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.
(7)  chumacera de empuje simple		Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. <i>Nota:</i> en general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.
(8)  pasador liso simple		Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. <i>Nota:</i> por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.
(9)  bisagra simple		Cinco incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y dos componentes de momento de par. <i>Nota:</i> por lo general, los momentos de par no se aplican si el cuerpo está soportado en cualquier otro punto. Vea los ejemplos.
(10)  soporte fijo		Seis incógnitas. Las reacciones son tres fuerzas y tres componentes de momento de par.

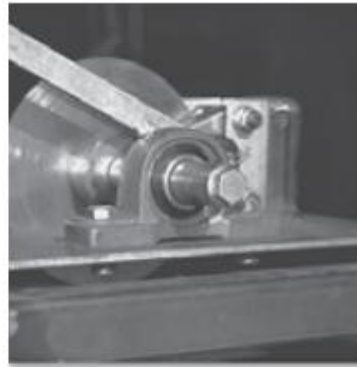
**Figura 78. Soportes o apoyos sometidos a fuerzas bidimensionales**

Fuente: Hibbeler, 2004.

De modo idéntico al apartado de reacciones en dos dimensiones, el autor ilustra los apoyos vistos en las estructuras reales y en cada paréntesis se encuentra el número de tipo de conexión de la figura anterior.



Esta junta de rótula esférica proporciona una conexión para la caja de una máquina niveladora de tierra con su bastidor. (4)



Esta chumacera simple soporta el extremo de la flecha. (5)



Esta chumacera de empuje se usa para soportar la flecha impulsora de una máquina. (7)



Este pasador se usa para soportar el extremo de un tirante usado en un tractor.

**Figura 79. Ilustración real de apoyos o soportes enfrentados a fuerzas tridimensionales**

Fuente: Hibbeler, 2004.

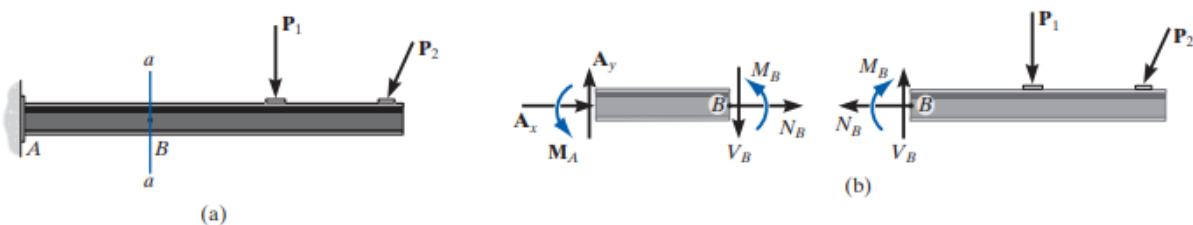


## 4.5 Fuerza en Vigas y Pórticos

En base al texto de Beer et al. (1967), las fuerzas internas, son las que mantienen unidas los distintos fragmentos de un elemento dado. Las fuerzas internas en un elemento recto sobre las que actúan dos fuerzas solo pueden producir tensión o compresión en ese elemento, mientras que las fuerzas internas en cualquier otro tipo de elemento generalmente también producen cortante y flexión.

- Vigas: las cuales usualmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.
- Pórticos: compuesto de elementos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos del elemento.

**4.5.1 Fuerzas internas desarrolladas en elementos estructurales.** Para diseñar una estructura o elemento mecánico, es necesario conocer las cargas que actúan en su interior para asegurar que el material pueda resistir tales cargas. Si se conocen las fuerzas externas que conservan un cuerpo en equilibrio, se efectúa el cálculo de las fuerzas internas mediante un análisis directo de equilibrio (Hibbeler, 2004).

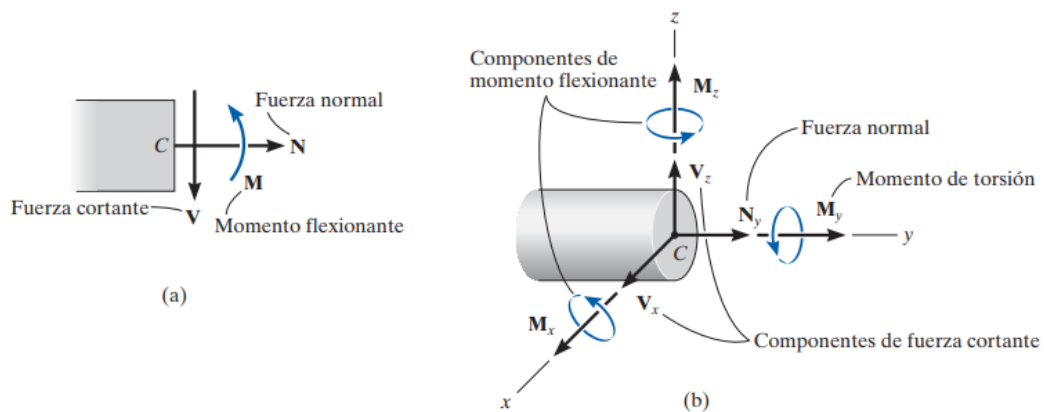


**Figura 80. Representación de fuerzas internas en elementos estructurales**

Fuente: Hibbeler, 2004.

En este gráfico, se considera la viga en voladizo (a). En caso de que se deban determinar las cargas internas que operan en la sección transversal en el punto B, entonces se debe contemplar por la viga una línea imaginaria a-a, perpendicular al eje de la viga a través del mismo punto B, que aparta la viga en dos segmentos. De modo que las cargas internas que actúan en B quedarán expuestas y se denominarán como externas en el diagrama de cuerpo libre de cada segmento, figura (b).

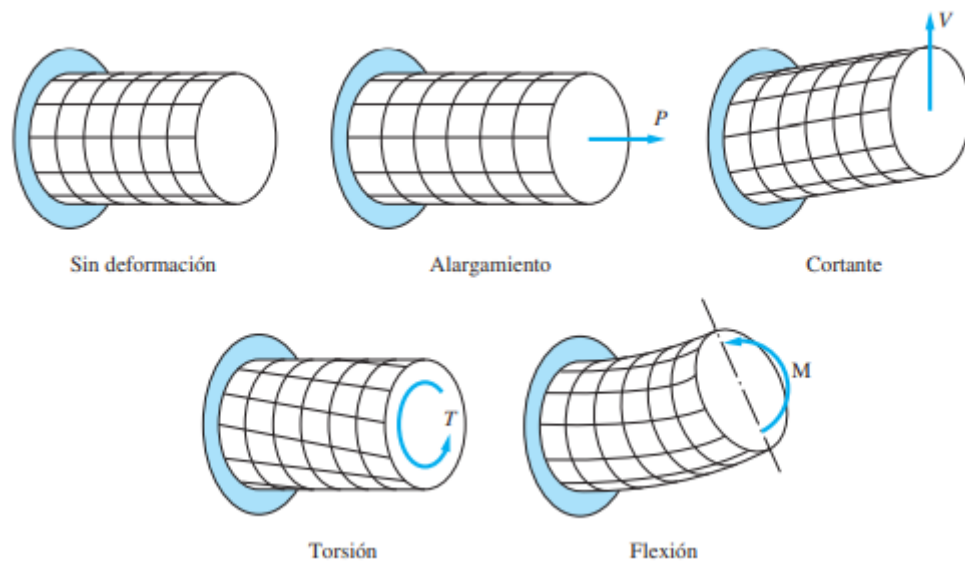
La fuerza componente **NB** que actúa perpendicularmente a la sección transversal se llama fuerza normal. La fuerza componente **VB** tangente a la sección transversal se denomina fuerza cortante y el momento de par **MB** se denomina momento flector.



**Figura 81. Representación cargas resultantes internas en 2d y 3d**

Fuente: Hibbeler, 2004.

En dos dimensiones, hemos demostrado que hay tres cargas internas resultantes (a); sin embargo, en tres dimensiones, las fuerzas internas generales y los momentos resultantes actuarán sobre la sección. Los componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de estas cargas se muestran en (b). Aquí  $N_y$  es la fuerza normal y  $V_x$  y  $V_z$  son las componentes de la fuerza cortante.  $M_y$  es el momento de torsión y  $M_x$  y  $M_z$  son los componentes del momento de flexión.

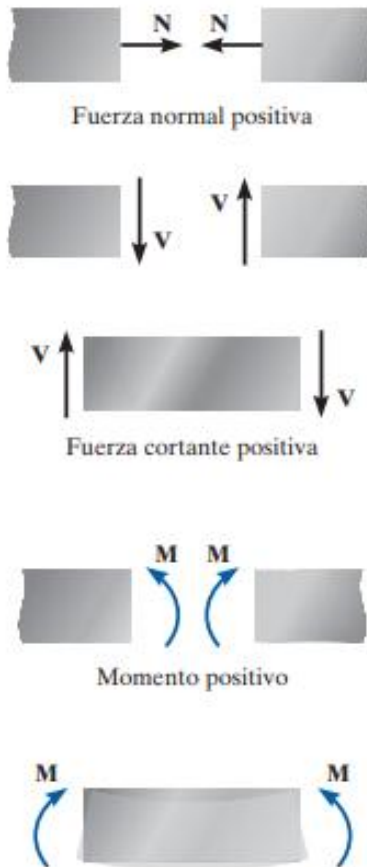


**Figura 82. Deformaciones producidas por las fuerzas internas**

Fuente: Pytel & Kiusalaas, 1999.

- **P**: componente de fuerza que se presenta perpendicular a la sección transversal, y tiende a alargar o acortar el elemento, se denomina fuerza normal.
- **V<sub>y</sub>** y **V<sub>z</sub>**: componentes de fuerza que se presentan en el plano de la sección transversal, tienden a cortar las partes de la barra y la separa de cualquier lado de la sección, se denominan fuerzas cortantes.
- **T**: componente del par resultante que tiende a curvar la barra es denominado momento de torsión o par de torsión.
- **M<sub>y</sub>** y **M<sub>z</sub>**: componentes del par resultante que tienden a encorvar la barra, son denominados momentos flexionantes.

**4.5.1.1 Convención de signos.** Se suele emplear una convención de signos general para expresar las tres cargas internas  $N$ ,  $V$  y  $M$ . De cualquier forma, es importante recordar que esta convención de signos puede asignarse de manera arbitraria.

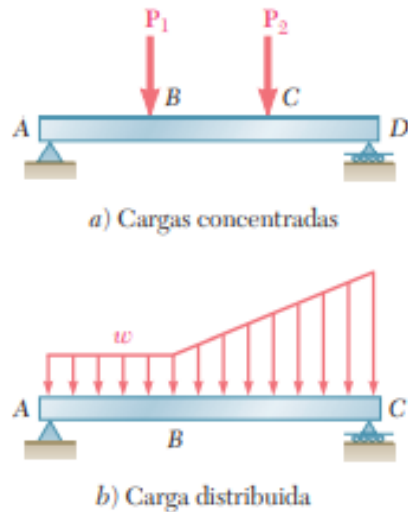


**Figura 83. Convención de signos en las fuerzas internas**

Fuente: Hibbeler, 2004.

**4.5.2 Diferentes tipos de apoyos y cargas en vigas.** Según Beer et al. (1967), los miembros estructurales diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del miembro se denominan vigas. En la mayoría de los casos, la carga es perpendicular al eje de la viga y solo corta y dobla la viga. También crean fuerzas axiales en la viga cuando las cargas no están en ángulo recto con la viga. Basándonos en estos mismos criterios, se reconocen los pórticos, con la

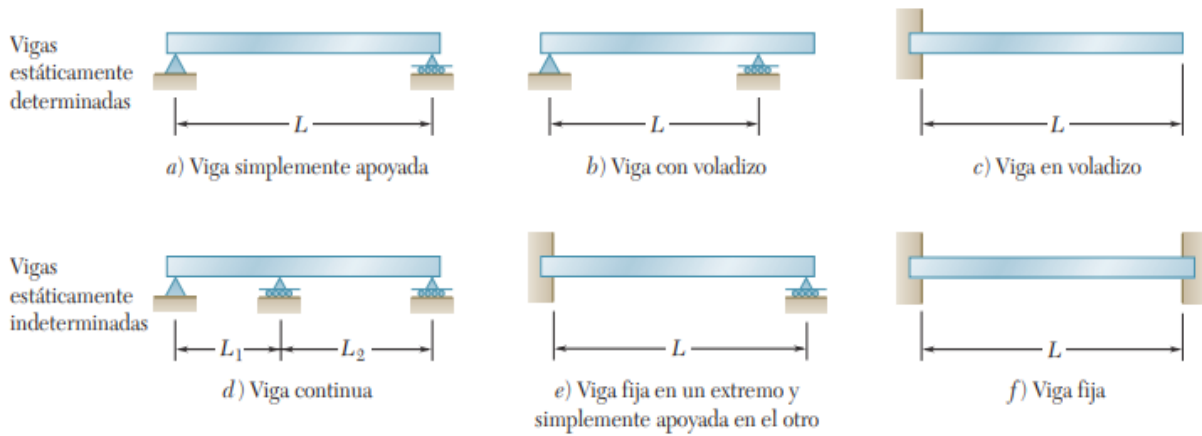
diferencia de que contempla más elementos estructurales, se puede referenciar como un marco con una viga en la parte superior, pero se examina cada componente para lograr un equilibrio y buen desempeño.



**Figura 84. Representación tipo de cargas en vigas y pórticos**

Fuente: Beer et al. 1967.

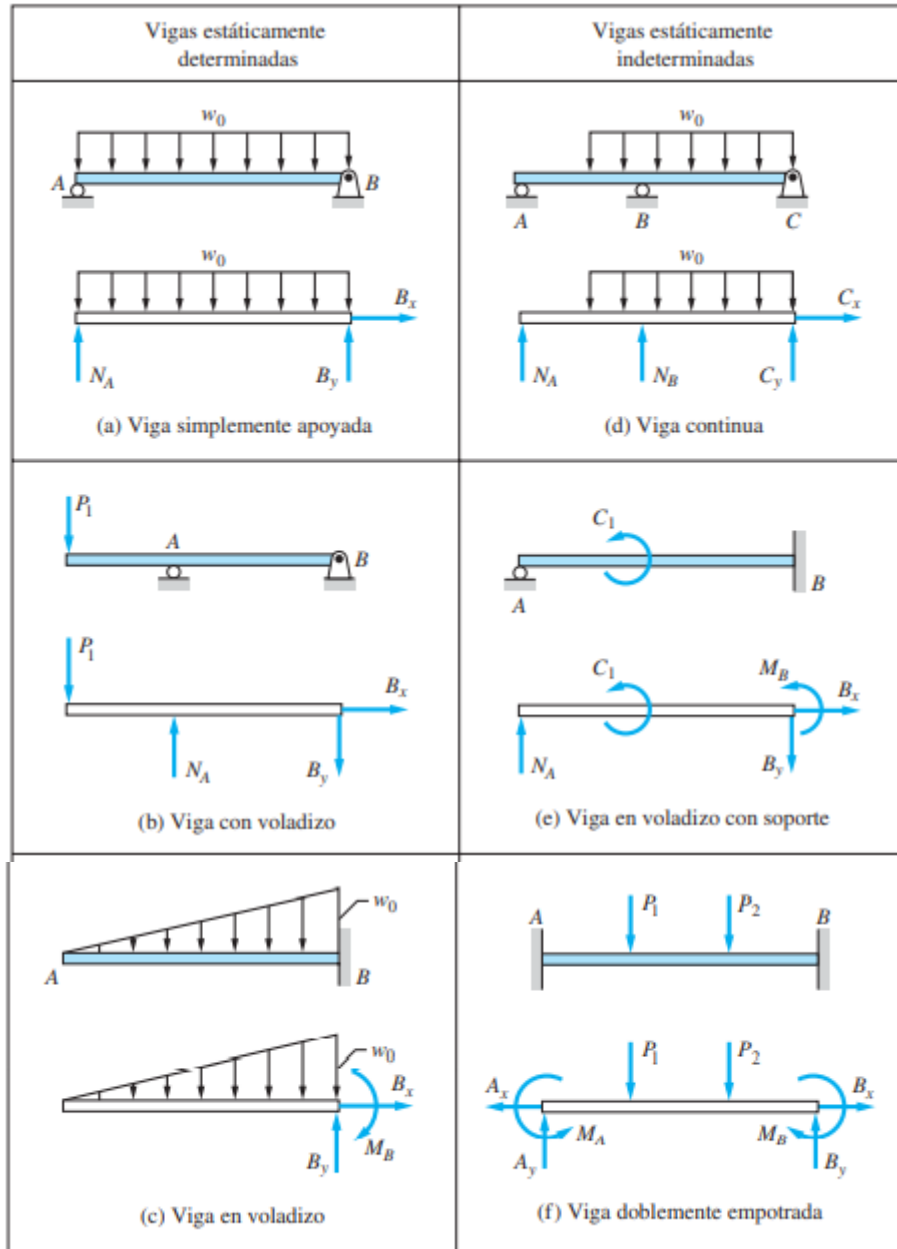
Es importante recordar que las cargas a las que se someten las vigas, se pueden presentar también en los pórticos, sea en el eje X o Y. Estas cargas se conceptualizan en dos grupos, concentradas y distribuidas. Las cargas concentradas se distinguen con una flecha puntualizada en cualquier plano de los mencionados anteriormente y con magnitud conocida; las cargas distribuidas presentan geometrías como rectángulos, triángulos o trapecios; cada carga se puntualiza dependiendo de su figura y el propósito del ejercicio.



**Figura 85. Tipo de apoyos en vigas**

Fuente: Beer et al. 1967.

Las vigas son clasificadas de acuerdo a los apoyos que presenten. En esta figura se contemplan algunos tipos de vigas que son usadas con frecuencia. La distancia  $L$  que se muestra entre los apoyos se conoce con el nombre de luz. Algunos de esos apoyos son utilizados en los pórticos. La importancia de los apoyos se basa en las limitaciones o restricciones que presente cada uno a la hora de realizar el DCL o hacer cualquier cálculo.

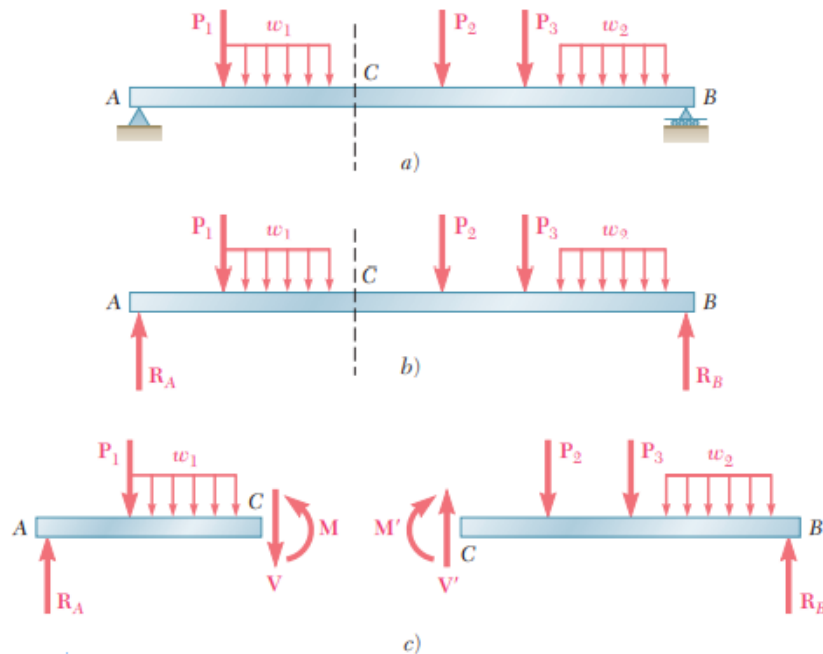


**Figura 86. Vigas estáticamente determinadas e indeterminadas**

Fuente: Pytel & Kiusalaas, 1999.

El término estáticamente determinado e indeterminado define si se puede resolver con las ecuaciones que nos facilita la estática o si hay que recurrir a un estudio más extenso para los cálculos necesarios.

**4.5.3 Fuerza cortante y momento flector de vigas y pórticos.** Beer et al. (1967), enfatiza en que el método se puede aplicar a cualquier tipo de viga estáticamente determinada donde se requiera determinar la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga.

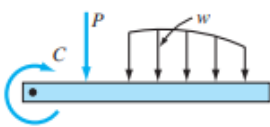
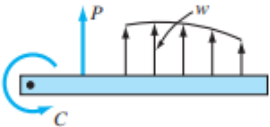
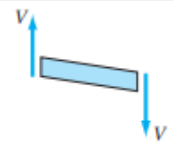
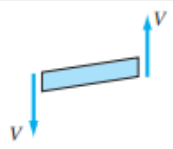
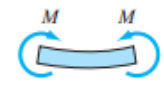
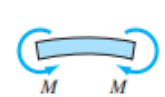


**Figura 87. Resumen del proceso analítico para cálculo de M y V**

Fuente: Beer et al. 1967.

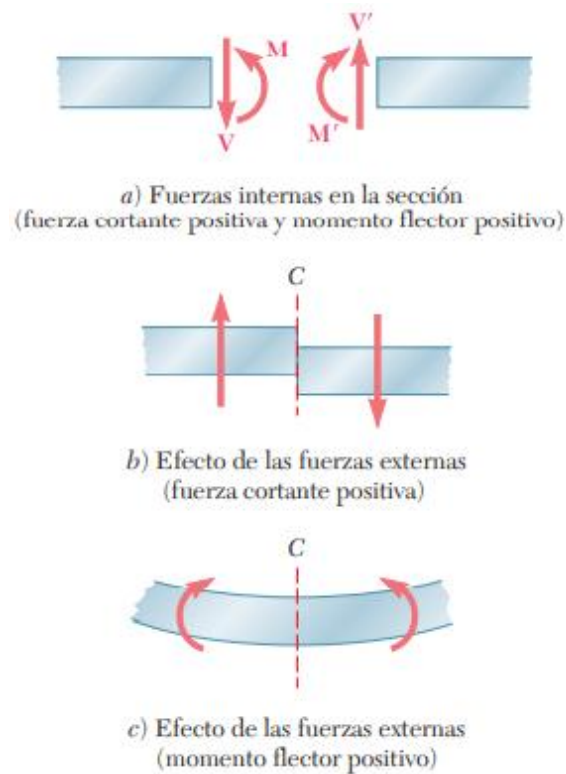
En el apartado (a), presenta la necesidad de hallar las incógnitas de Momento y cortante en cualquier punto de la viga, en la sección (b) ya se determinan las reacciones por medio de cálculo analítico y procedimental tomando en cuenta las características y restricciones de los apoyos que presenta el cuerpo rígido; por último, en el apartado (c), se intercepta la viga y se dibujan los DCL correspondientes a las secciones individuales que resultan.



	Positivo	Negativo
Cargas externas		
Fuerza cortante		
Momento flexionante		

**Figura 88. Direcciones de las fuerzas y su representación positiva o negativa**

Fuente: Pytel & Kiusalaas, 1999.

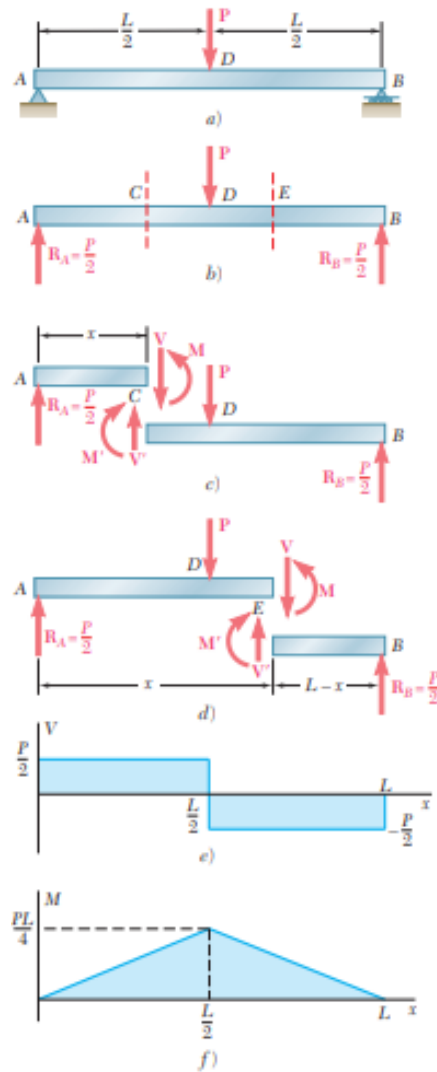


**Figura 89. Efectos de las fuerzas externas e internas  $M$  y  $V$**

Fuente: Beer et al. 1967.

**4.5.4 Diagrama de fuerza cortante y momento flector.** Hibbeler (2004), expone que generalmente, las funciones de fuerza cortante y de momento flector se mostrarán discontinuas, o, por otro lado, sus pendientes se graficarán discontinuas en puntos donde una carga distribuida se transforma o se aplican fuerzas o momentos de par concentrados. Por esta razón, estas funciones deben ser determinadas para cada segmento de la estructura localizado entre dos interrupciones o transformaciones de carga.

**4.5.4.1 Método de secciones.** Este método es muy preciso, nos proporciona los valores exactos, pero hay que resaltar que es un proceso extenso. Para entrar en materia, se tiene una viga con carga concentrada **P** y apoyos en sus extremos (a), para este método se va cortando la viga imaginariamente justo antes de encontrar fuerzas aplicadas y de esta manera se van formando secciones, de ahí su nombre. A cada sección se le debe realizar el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) donde se ubica la reacción del apoyo si la tiene y los componentes de cortante y momento asumiendo la dirección general de positivo y negativo o asumiéndolo, esto se puede apreciar en el apartado (b), en el apartado (c) de la figura, extraemos la sección y consideramos una distancia  $x$ , ya que no conocemos con exactitud la distancia desde el apoyo al corte. Se hace otro corte de derecha a izquierda, antes de la reacción, de modo que se genera otro corte al que se le calculan los mismos componentes (d). Se grafica sumando y restando valores según corresponda, contemplando valores de reacciones y cargas, pero fundamentalmente el sentido de la carga, ya que esto indicará si es positivo o negativo.



**Figura 90. Método de secciones**

Fuente: Beer et al. 1967.

La sección (e) y (f) corresponden al diagrama para  $V$  y  $M$ , Fundamentalmente se basan en el comportamiento de la viga y en las ecuaciones que arrojen los cálculos.

**4.5.4.2 Método de áreas.** Los textos de los autores Hibbeler (2004) y Beer et al. (1967), fundamentan teóricamente la definición e interpretación de estos métodos, de modo que, Al momento de realizar el diagrama, hay que tener en cuenta que, si interpretamos las cargas como si fuera una ecuación, la rectangular se refiere a un valor con comportamiento constante, mientras

que en la carga triangular tendremos un comportamiento con pendiente positiva o negativa según la dirección de la misma.

La obtención del momento flector se puede determinar con la siguiente ecuación:

$$M = \int V dx \text{ (ecuación 4.21)}$$





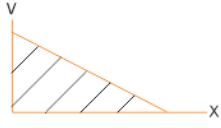
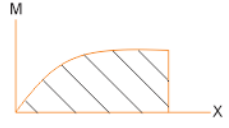

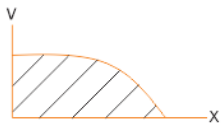
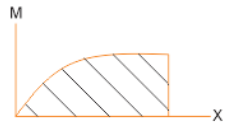
Integrando la fuerza cortante con diferencial  $dx$ , donde  $x$  corresponde a un desplazamiento horizontal y de esta forma, estamos incrementando el orden.

En el caso de la fuerza puntual, si se realiza el diagrama, vamos a tener que para la fuerza cortante el comportamiento es constante, pero en el caso de haber integrado y graficar el momento flector se verá reflejada una ecuación de primer grado, por eso estará representada como una línea recta (las direcciones de la línea varían con respecto a la ubicación en el gráfico inicial).

La carga distribuida rectangular constante, al ser integrada se obtendrá una ecuación de primer grado, por lo tanto, en la fuerza cortante mostrará una pendiente que puede variar su signo y dirección dependiendo de cómo se encuentre representada en el gráfico inicial, será pendiente negativa si la carga apunta hacia abajo y pendiente positiva si la carga apunta en sentido contrario. El momento flector luego de ser integrado, se genera una ecuación de segundo grado con comportamiento parabólico.

La carga distribuida triangular es un poco más compleja, la carga misma representaría una ecuación de primer grado ya que es una línea recta; sin embargo, no hay que confundir que la pendiente es positiva pero la carga es vertical y apunta hacia abajo, por lo tanto, tendremos un

comportamiento decreciente. Al momento de incrementar el orden en la fuerza cortante, tendremos un gráfico de segundo orden, por lo tanto se mostrará como una parábola; por otra parte, al integrar el momento flector, se obtendrá un gráfico de tercer orden que aunque es muy similar al de segundo orden, a medida que se extiendan los valores y las gráficas se definirá mucho mejor la función tratada.

TIPO DE CARGA	FUERZA CORTANTE	MOMENTO FLECTOR
		
		
		

**Figura 91. Resumen de las Funciones de fuerza cortante y momento flector en base al tipo de carga**

Para los casos de fuerza cortante ejemplificados en la figura, se tomaron fuerzas cortantes positivas, por lo cual hay que considerar que puede variar la dirección del diagrama final.

## **5. Guía Académica**

Esta guía académica se encuentra en el Anexo 2 del presente proyecto de investigación. Este anexo comprende bases teóricas que resultan de gran utilidad en la resolución de ejercicios hipotéticos presentados en esta guía académica secuencial enfocada en la asignatura de estática considerando los alcances que las ecuaciones y conceptos permiten. Los segmentos que componen guía académica se refieren a:

### **5.1 Funciones Trigonométricas**

En esta guía académica se reconoce la importancia de los conceptos básicos que se deben tener claros al momento de resolver situaciones problemáticas, por lo tanto, se hace un breve repaso de las funciones trigonométricas, a fin de ser consideradas correctamente en la resolución de ejercicios y no mecánicamente.

### **5.2 Cálculo de Reacciones en Vigas y Pórticos**

Para el cálculo de reacciones en estructuras, se toman ejemplos de vigas y pórticos que conserven un comportamiento isostático, es decir, que el número de sus incógnitas sea igual al número de las ecuaciones de equilibrio, posteriormente se explica paso a paso el desarrollo de cada ejercicio a fin de disminuir las dudas e incentivar al autoestudio.

### **5.3 Diagramas de Fuerza Cortante y Momento Flector en Vigas y Pórticos**

Para la realización de estos diagramas, se extiende el proceso con las vigas y pórticos que se desarrollaron en el segmento de cálculo de reacciones y se adjunta el gráfico junto con el proceso para llegar a él.

## **5.4 Ejercicios Propuestos**

En el anexo 2 de este proyecto de investigación, se plantea una serie de vigas y pórticos para resolver, logrando fomentar la interpretación y la resolución de ejercicios.

## **5.5 Lista de Respuestas a Ejercicios Propuestos**

Se presentan las respuestas a reacciones y diagramas según sea especificado en la guía académica a fin de comparar resultados y desarrollar destrezas en búsqueda de la resolución efectiva de ejercicios prácticos de vigas y pórticos.

Las respuestas a estos ejercicios propuestos son extraídas de una aplicación disponible para cualquier dispositivo Android, donde se realiza el análisis de marcos planos estáticamente determinados e indeterminados. De modo que, se verán las respuestas reflejadas en capturas de pantalla para lograr datos más exactos.

La guía académica tiene como objetivo principal complementar el método de aprendizaje de cada alumno, actuando como un apoyo educativo e interactivo que puede estar a disposición de cualquier estudiante donde puede reforzar sus conocimientos, practicar con diferentes ejercicios y compartir saberes con otros compañeros.

## **6. Análisis de Resultados**

Se realizó una encuesta a una muestra de 100 estudiantes que cursaron la materia de estática el segundo semestre del año 2021 en la universidad Francisco de Paula Santander, sede principal. Esta encuesta fue aplicada a diferentes grupos, a fin de obtener diversos resultados con respecto a los métodos de enseñanza y aprendizaje presentados en el aula de clase por cada docente y alumno. El instrumento utilizado para la recolección de información se encuentra en el anexo 3 del presente texto, está compuesto por 16 preguntas de las cuales 7 se refieren a datos personales que responden como soporte para la investigación y 9 preguntas de carácter cualitativo o cuantitativo que directamente involucran la materia de estática y son tomadas como punto de partida en la realización de la guía académica.

### **6.1 Resultados Obtenidos de la Encuesta Aplicada a los Alumnos**

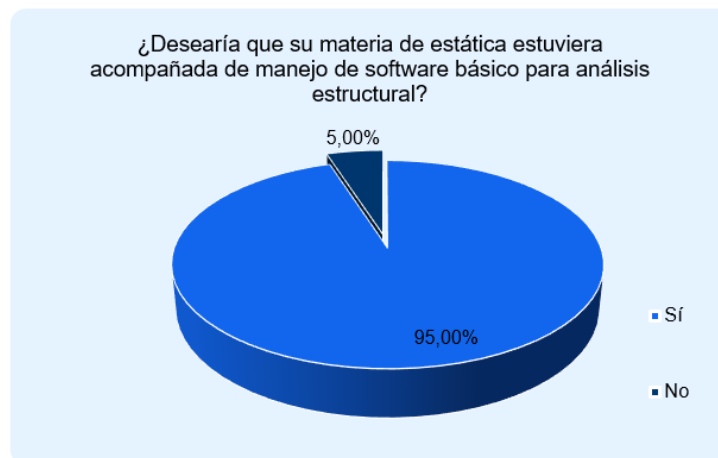
#### **6.1.1 En cuanto a la asignatura en el pensum de ingeniería civil de la universidad**

**Francisco de Paula Santander.** En la encuesta realizada, se consideró la pregunta número 10 del anexo 3 para evidenciar falencias y fortalezas de aprendizaje o enseñanza en el programa de ingeniería civil y contemplar la opinión estudiantil. Se registraron las respuestas abiertas de cada alumno y al filtrar por palabras clave como “sí” y “no” se obtuvieron los datos de **64** estudiantes que respondieron favorablemente y **36** no se encuentran de acuerdo con la intensidad horaria de la materia en cuestión.

Al contemplar las respuestas contrarias a lo establecido por el programa, los estudiantes proponen adaptar dos bloques de dos horas semanales a fin de generar espacio suficiente para la resolución de dudas e inquietudes mientras que las respuestas a favor, resaltan la importancia de emplear el tiempo adecuadamente y así poder cumplir con las demandas de la materia estática.



Se consultó a los estudiantes en la pregunta número 15 si estarían de acuerdo en complementar la teoría con manejo de Software básico enfocado en análisis estructural para así, desarrollar destrezas fundamentales al momento de ejercer la profesión. Los resultados obtenidos fueron favorables ante esta iniciativa, por lo tanto, podría ser considerada por la entidad pertinente a fin de generar espacios que permitan o refuercen esta actividad.

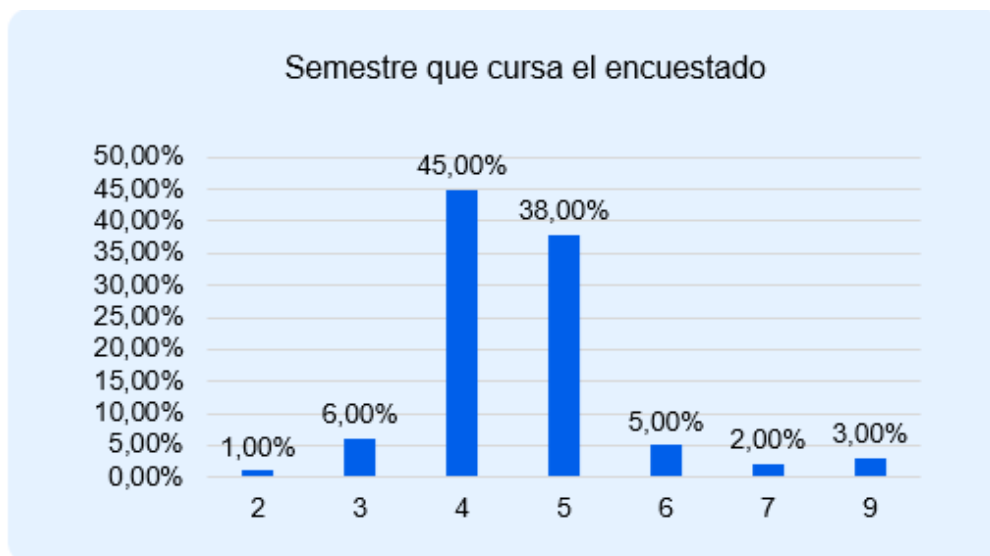


**Figura 92. Representación gráfica pregunta número 15 de la encuesta aplicada**

En la pregunta número 13 se otorga el espacio para que cada estudiante exponga los aspectos que debe presentar un buen docente de la materia de estática ya que pueden existir factores que entorpecen el correcto desarrollo de aprendizaje o enseñanza. Se consideraron respuestas en base a palabras clave como explicación, claridad, orden y participación. Estas palabras reflejan la secuencia lógica para llevar a cabo un buen entendimiento, la explicación debe ser suficiente para abarcar las dudas e inquietudes que ameriten ser resueltas; la claridad al momento de utilizar términos, referirse a ejemplos claros y conservar un orden secuencial tanto en el desarrollo metódico de su clase como en la demostración por medio de medios audiovisuales como pizarras, tableros, videos explicativos, etc. La participación por parte de los estudiantes es indispensable ya que, de esa forma, se conocen las debilidades o puntos de apoyo por realizar, el docente debe

tener la disposición de escuchar a sus alumnos y de explicar las veces que sean necesarias a fin de conservar el ambiente de estudio activo e interactivo.

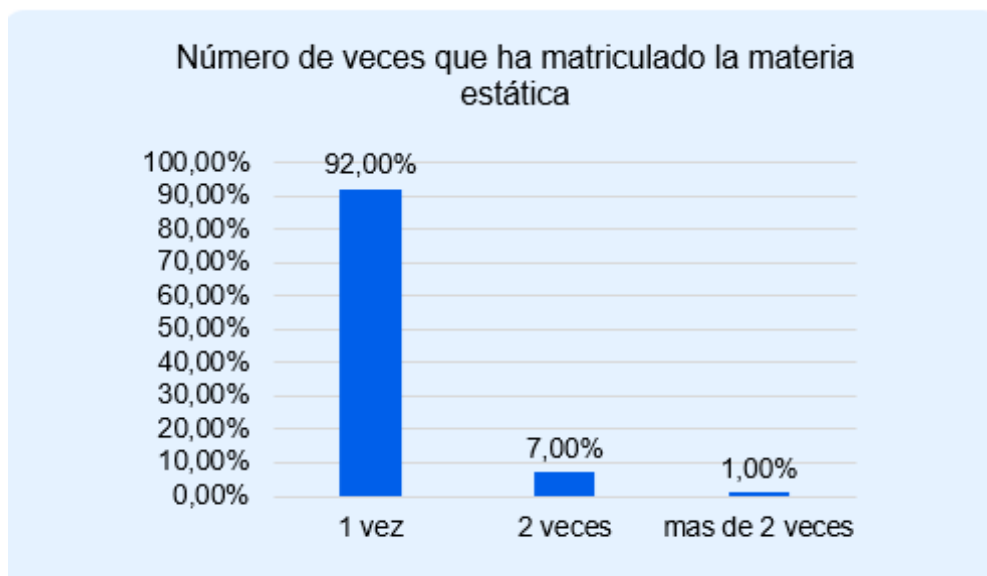
**6.1.2 En cuanto a dificultades y resolución de incógnitas presentes en la asignatura de estática.** El semestre que cursa cada estudiante demuestra si se encuentra alineado con las materias que indica el pensum de cada programa académico. La respuesta a la pregunta número 6 es tomada como referencia para determinar si se han presentado dificultades en la materia en el caso de ingeniería civil o si concuerda con el semestre que puntualiza su carrera ya que pueden presentarse estudiantes de otros programas.



**Figura 93. Representación gráfica pregunta número 6 de la encuesta aplicada**

Se puede observar que la mayor parte de los estudiantes se encuentran cursando la materia en el semestre correspondiente al establecido para ingeniería civil.

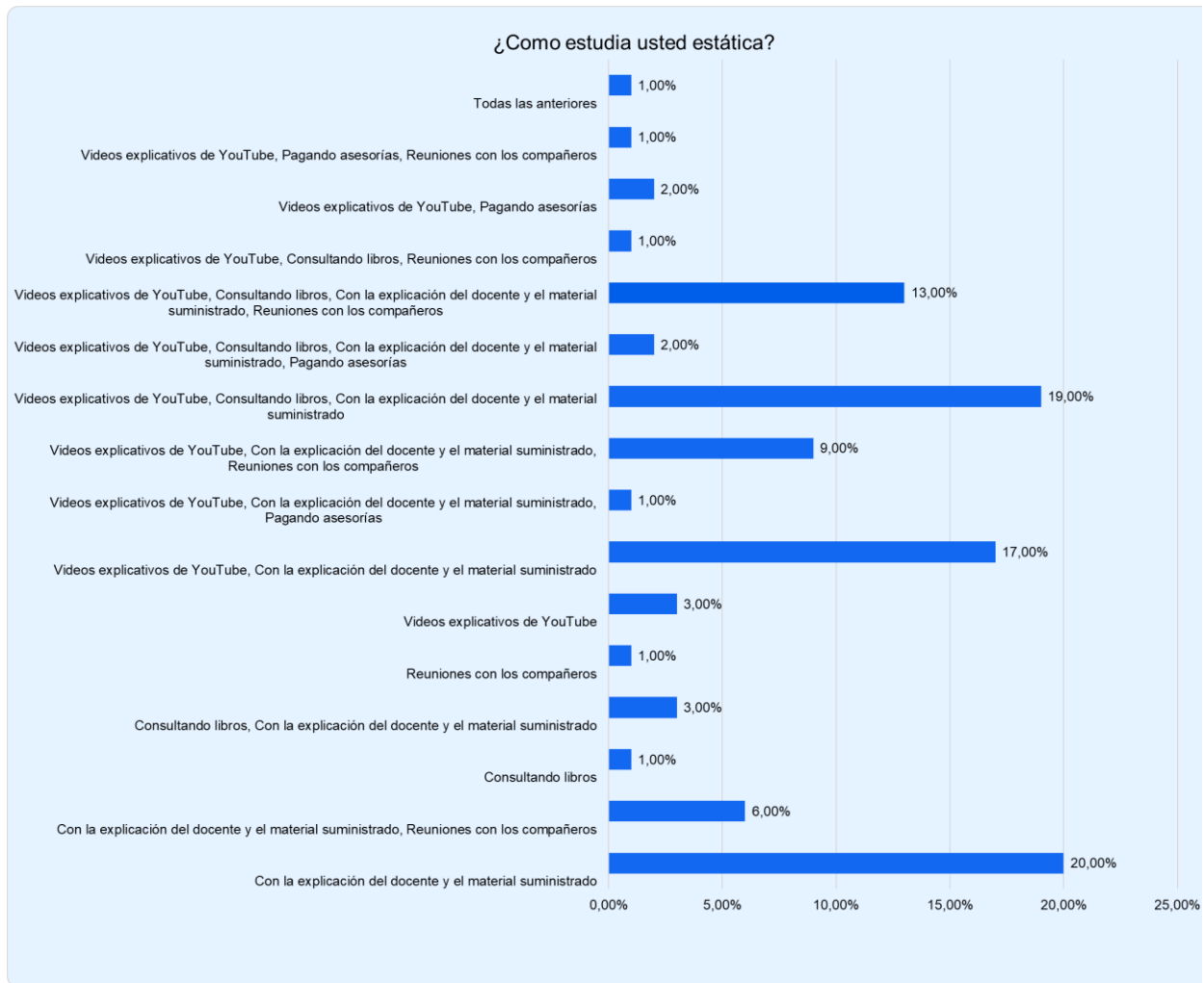
La pregunta número 7 tiene como finalidad reconocer a los estudiantes que han desertado, cancelado o repetido la materia, se obtuvieron los siguientes resultados:



**Figura 94. Representación gráfica pregunta número 7 de la encuesta aplicada**

Generalmente se observan estudiantes que cursan la materia por primera vez, esto representa un mínimo de deserción o cancelación que se refleja en la cantidad de veces que es matriculada la asignatura por el estudiante. Sin embargo, hay evidencia de estudiantes a los que se les ha dificultado un poco más culminar el proceso por alguna razón.

Al momento de recordar lo que se ha tratado en clase y estudiar para los exámenes, se pueden presentar dificultades y es por eso que se recurren a diversas fuentes de información para resolver dudas e inquietudes, en la pregunta número 11 se le consultó a cada estudiante los medios más comunes al estudiar la materia y se obtuvo que:

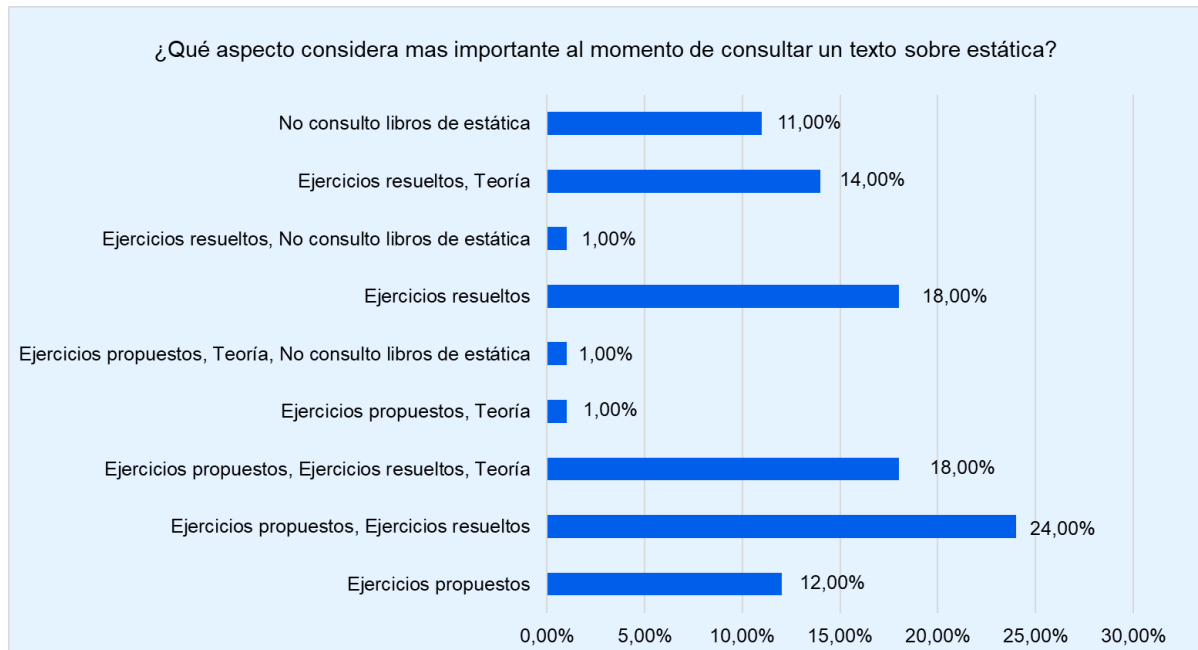


**Figura 95. Representación gráfica pregunta número 11 de la encuesta aplicada**

En base a la figura se puede resaltar la importancia del material suministrado por el docente ya que representa el apoyo de primera mano que maneja el estudiante. Sin embargo, se recurre a videos explicativos de YouTube y reuniones con compañeros que tienen un poco de conocimiento de más, a fin de complementar saberes. De estos datos se deduce que la fuente que menos se consulta son los libros.

En caso de consultar un libro de estática para ingenieros, existen aspectos que se resaltan en la búsqueda de información, para exámenes o resolución de ejercicios, por tal motivo, en la pregunta número 12 se consulta al estudiante que aspecto considera importante para un buen

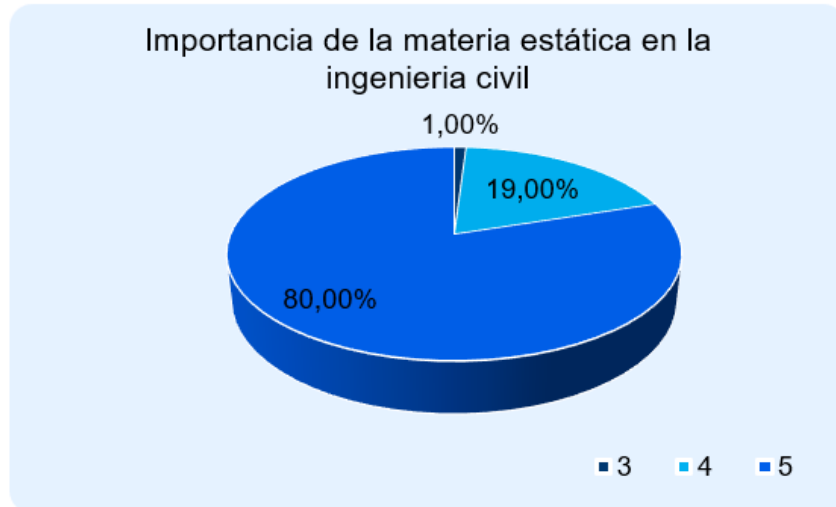
entendimiento, los resultados fueron los siguientes:



**Figura 96. Representación gráfica pregunta número 12 de la encuesta aplicada**

Mayormente el estudiante refleja la importancia de los ejercicios resueltos y propuestos, pero también resaltan la estructura teórica contemplada en la estructura del texto.

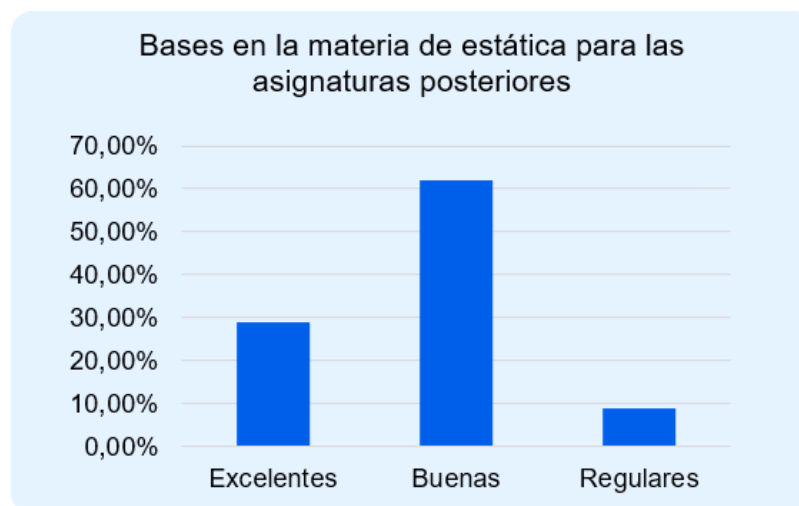
**6.1.3 En cuanto a los conocimientos y bases para los semestres posteriores a la asignatura.** La pregunta 8 de la encuesta va de la mano con la intensidad horaria establecida por el plan de estudios ya que indica la importancia que representa para el ejercicio y correcto desempeño de los futuros profesionales formados en la institución, es por eso que se les consulta a los estudiantes que tan relevante es la materia de estática para la ingeniería civil, considerando un rango de 1 a 5, donde 1 es poco importante y 5 muy importante, se obtuvieron los siguientes resultados:



**Figura 97. Representación gráfica pregunta número 8 de la encuesta aplicada**

El valor predominante que se observa en la figura, apunta favorablemente hacia la materia, considerándola “muy importante-5-” o “importante-4-”, de modo que existen percepciones homogéneas por parte de los estudiantes hacia la asignatura.

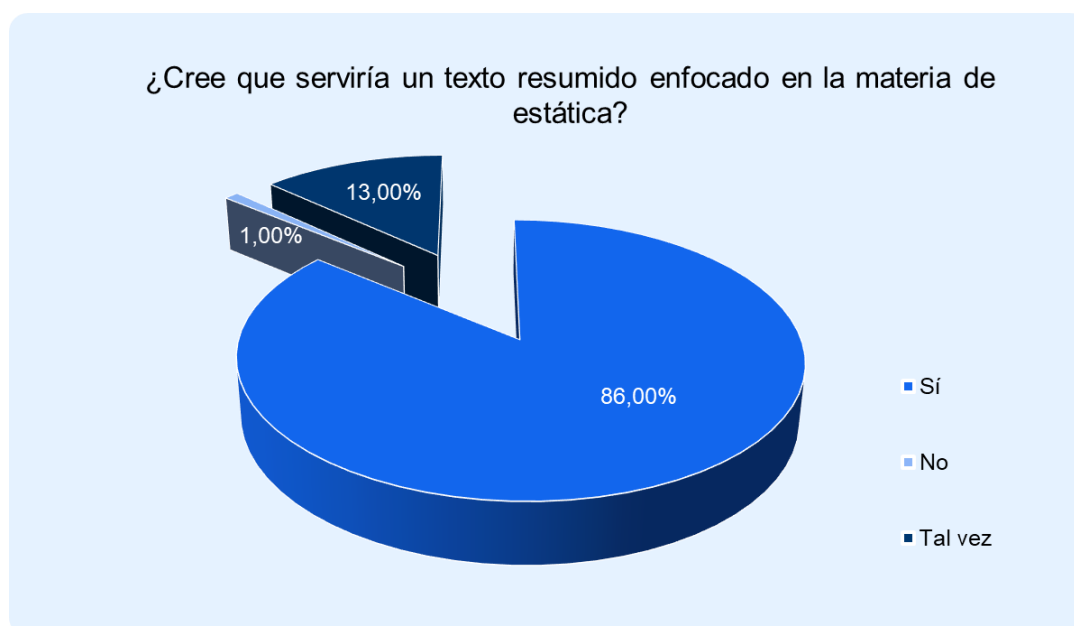
La pregunta número 9 evalúa sutilmente la percepción de cada alumno hacia los conocimientos, bases y fundamentos que han sido adquiridos en la ejecución del contenido programático con el fin de determinar si son suficientes para las asignaturas posteriores.



**Figura 98. Representación gráfica pregunta número 9 de la encuesta aplicada**

Como resultado favorable, la mayoría de los estudiantes consideran buenas y excelentes sus bases conceptuales o teóricas para las asignaturas posteriores a esta.

**6.1.4 En cuanto a la utilidad de una guía académica para la asignatura.** Se consultó a cada estudiante si considera que un texto resumido en estática puede mejorar la comprensión y el entendimiento de los ejercicios suministrados en clase, los datos obtenidos de la pregunta número 14 de la encuesta son los siguientes:



**Figura 99. Representación gráfica pregunta número 14 de la encuesta aplicada**

De los valores obtenidos en la figura, se deduce la aceptación por parte del estudiantado, esta se encuentra representada con un valor del 86%.

En busca de opiniones constructivas, la pregunta número 16 contempla la respuesta abierta de cada estudiante como aporte para la realización de la guía académica a fin de cubrir todos los campos a lo largo de la materia. Los filtros empleados para encontrar dichos aportes fueron: ejercicios resueltos, ejercicios propuestos, imágenes, vigas y pórticos.

La respuesta considerada bajo estos criterios fue favorable ante la elaboración de un texto guía enfocado en la asignatura, estas mismas se complementan con la solicitud principal para el cálculo en vigas y pórticos fundamentalmente.



## 7. Conclusiones

La recolección de información por medio de fuentes confiables y avaladas en el tema, han permitido que se desarrolle este proyecto de investigación que complementa el buen entendimiento y la fácil interpretación de situaciones problemáticas enfocadas en la materia de estática. Existen factores que alteran el correcto aprendizaje y comprensión de la misma tales como la ausencia de conceptos previos y métodos de enseñanza poco participativos, cabe resaltar que estos criterios se han determinado en base a las respuestas libres que han tenido lugar en la encuesta aplicada a los alumnos.

Como estudiante de ingeniería civil, surge la necesidad de comprender las estructuras, por eso en múltiples respuestas se evidenció la necesidad de centrarse en vigas y pórticos con comportamiento isostático, de modo que se ha tomado como el centro y extensión de la guía académica en congruencia con esas opiniones, la claridad en las imágenes y gráficos presentados garantizan una buena interpretación, motivo por el cual presentan buen tamaño en cada folio.

La guía académica enfocada en la materia de estática, complementa los saberes y conocimientos otorgados por los profesionales que designa la institución educativa y refuerza el auto estudio por parte de los estudiantes.

Se presentan 30 ejercicios resueltos que corresponden a 20 vigas y 10 pórticos con diferente geometría, por otro lado, se pautan 15 ejercicios propuestos que responden a 10 ejercicios de vigas y 5 de pórticos; las respuestas a estos últimos se obtuvieron de un aplicativo enfocado en análisis isostático, logrando así obtener un soporte para comprobar una vez finalizado la actividad individual.

## **8. Recomendaciones**

Como recomendación para estudios afines se propone:

Complementar la temática de la materia con más ítems resaltantes en la materia de estática como centroides, armaduras y demás, logrando así, un texto completo en la resolución de cualquier situación presentada.

El presente trabajo de investigación, contempló estructuras en dos dimensiones, por eso sería conveniente incorporar a la resolución de problemáticas, las estructuras en tres dimensiones con el fin de exponer el comportamiento vectorial o escalar que corresponda con el ejercicio.

### Referencias Bibliográficas

- Alsina, I. & Rodríguez, Á. (2001). Estrategias de evaluación de los aprendizajes centradas en el proceso. *Revista Española de Pedagogía*, 4(1), 25-48.
- Bedford, A. & Fowler, W. (1996). *Mecánica para ingeniería: dinámica*. México: Pearson Educación.
- Beer, F. & Johnston, E. (1999). *Mecánica vectorial para ingenieros, estática*. México: Mcgraw-Hill.
- Beer, P., Johnston, R., Eisenberg, E. & Sarubbi, R. (1967). *Mecánica vectorial para ingenieros*. México: Mcgraw-Hill.
- Beltrán, J. (2002). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
- Corvera, R. (2014). *Estática: las leyes del equilibrio*. México: Grupo Editorial Patria.
- Davini, M. (2008). *Métodos de enseñanza. Didáctica general para maestros y profesores*. Buenos Aires: Santillana.
- De La Cruz, C. (1996). *Texto guía de estática y resistencia de materiales*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Duque, C. (2015). *Instrumentación para el control de estabilidad y asentamientos como consecuencia del diseño de la estación Marly de la primera línea del metro de Bogotá-PLMB con respecto a las instalaciones de la universidad católica de Colombia*. Tesis de grado. Universidad Católica de Colombia. Medellín, Colombia.

- Elliot, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata.
- García, M. D. F. (1935). *Las estructuras*. Recuperado de: <http://ceipsantamariadegracia.com/wp-content/uploads/2016/10/las-estructuras.pdf>
- Hibbeler, R. C. (2004). *Mecánica vectorial para ingenieros: estática*. México: Pearson Educación.
- Jiménez, N., Pizarro, C., & Cortes, J. (1978). “*funciones trigonométricas*”. Recuperado de: <https://repositorio.sena.edu.co/handle/11404/5171>
- Llano, R. (1999). *Estática aplicada*. Mendoza: EDIFI.
- Mayer, R.E. (1992). *Guiding students' cognitive processing of scientific information in text*. En *m. Pressley, k. R. Harris y j. T. Guthrie (eds.), promoting academic competence and literacy in school*. San Diego: Academic Press.
- Moerschell, L. (2009). *Resistance to technological change in academia*. Recuperado de: <http://cie.ed.asu.edu/volume11/number6/>
- Monereo. C. (1994). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela*. Barcelona: Graó.
- Pérez, V. (1990). Problemática didáctica del aprendizaje de las ciencias experimentales. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 4(11), 160-161.
- Perico, N. & Perico, N. (2016). Los ingenieros docentes y el medioambiente. *L'esprit Ingénieux*, 5(1), 1-15.

Pytel, A. & Kiusalaas, J. (1999). *Estática*. México: International Thomson.

Riley, W. & Sturges, L. (1996). *Ingeniería mecánica*. México: Reverté.

Ruiz, N. (2019). *Estrategia didáctica de enseñanza y aprendizaje para la mejora del rendimiento académico en la asignatura estática en la escuela profesional de ingeniería civil de la universidad señor de Sipán*. Tesis de grado. Universidad Señor de Sipán. Pimentel, Peru.

Sánchez, T., Molina, P., Del Valle, R., Pascual, G., & Alvial, M. (2011). *Orientaciones para la renovación curricular: etapa 5*. Recuperado de:  
[https://www.academia.edu/48363553/Formaci%C3%B3n\\_por\\_competencias\\_certezas\\_resultados\\_y\\_desaf%C3%ADos](https://www.academia.edu/48363553/Formaci%C3%B3n_por_competencias_certezas_resultados_y_desaf%C3%ADos)

Torres, M. (2014). *Estructuras é un paquete de contidos que forma parte da secuencia didáctica tecnología (s) por proyectos*. Recuperado de:  
<https://www.edu.xunta.gal/espazoabalar/sites/espazoabalar/files/datos/1464947489/contido/index.html>

Vargas, N. (2009). *Los modelos pedagógicos presentes en la formación de ingenieros civiles en la universidad santo tomás*. Tesis de grado. Universidad Santo Tomás. Tunja, Colombia.

Vila, J., Jiménez, G. & Garzón, J. (2012). *Monitoreo y control topográfico de obras*. Armenia: Universidad del Quindío.

Villarino O. (2010). *"tipos de apoyos y reacciones en las estructuras"*. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Weinstein, E. & Mayer, R. (1986). *The teaching of learning strategies*. New York: Mcmillan.

**Anexos**

### Anexo 1. Funciones trigonométricas

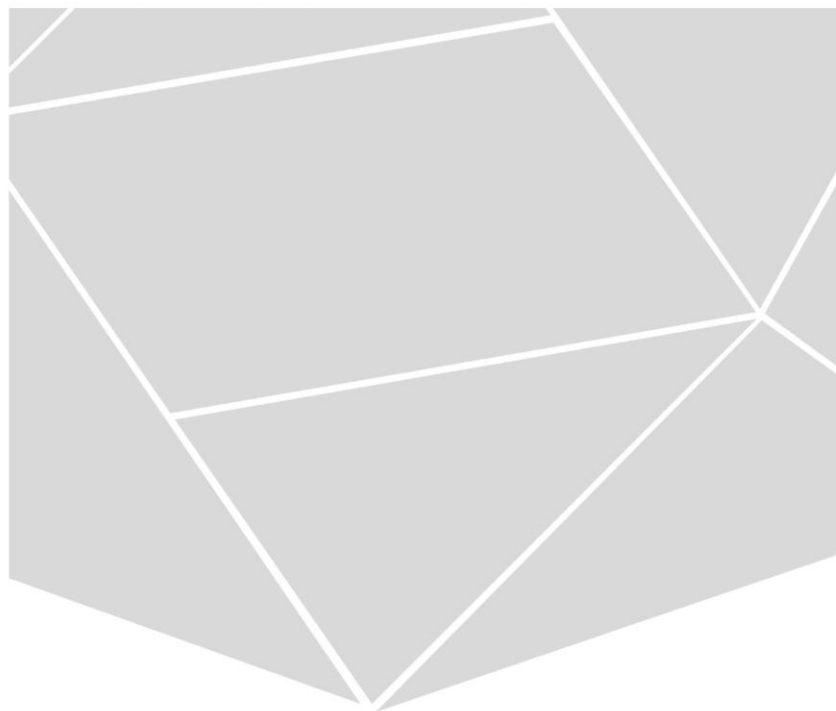
Ángulo	seno	coseno	tangente	Ángulo	seno	coseno	tangente
0°	0	1	0	46°	0,719	0,695	1,036
1°	0,018	1	0,018	47°	0,731	0,682	1,072
2°	0,035	0,999	0,035	48°	0,743	0,669	1,111
3°	0,052	0,999	0,052	49°	0,755	0,656	1,15
4°	0,07	0,998	0,07	50°	0,766	0,643	1,192
5°	0,087	0,996	0,088	51°	0,777	0,629	1,235
6°	0,105	0,995	0,105	52°	0,788	0,616	1,28
7°	0,122	0,993	0,123	53°	0,799	0,602	1,327
8°	0,139	0,99	0,141	54°	0,809	0,588	1,376
9°	0,156	0,988	0,158	55°	0,819	0,574	1,428
10°	0,174	0,985	0,176	56°	0,829	0,559	1,483
11°	0,191	0,982	0,194	57°	0,839	0,545	1,54
12°	0,208	0,978	0,213	58°	0,848	0,53	1,6
13°	0,225	0,974	0,231	59°	0,857	0,515	1,664
14°	0,242	0,97	0,249	60°	0,866	0,5	1,732
15°	0,259	0,966	0,268	61°	0,875	0,485	1,804
16°	0,276	0,961	0,287	62°	0,883	0,47	1,881
17°	0,292	0,956	0,306	63°	0,891	0,454	1,963
18°	0,309	0,951	0,325	64°	0,899	0,438	2,05
19°	0,326	0,946	0,344	65°	0,906	0,423	2,145
20°	0,342	0,94	0,364	66°	0,914	0,407	2,246
21°	0,358	0,934	0,384	67°	0,921	0,391	2,356
22°	0,375	0,927	0,404	68°	0,927	0,375	2,475
23°	0,391	0,921	0,425	69°	0,934	0,358	2,605
24°	0,407	0,914	0,445	70°	0,94	0,342	2,747
25°	0,423	0,906	0,466	71°	0,946	0,326	2,904
26°	0,438	0,899	0,488	72°	0,951	0,309	3,078
27°	0,454	0,891	0,51	73°	0,956	0,292	3,271
28°	0,47	0,883	0,532	74°	0,961	0,276	3,487
29°	0,485	0,875	0,554	75°	0,966	0,259	3,732
30°	0,5	0,866	0,577	76°	0,97	0,242	4,011
31°	0,515	0,857	0,601	77°	0,974	0,225	4,331
32°	0,53	0,848	0,625	78°	0,978	0,208	4,705
33°	0,545	0,839	0,649	79°	0,982	0,191	5,145
34°	0,559	0,829	0,675	80°	0,985	0,174	5,671
35°	0,574	0,819	0,7	81°	0,988	0,156	6,314
36°	0,588	0,809	0,727	82°	0,99	0,139	7,115
37°	0,602	0,799	0,754	83°	0,993	0,122	8,144
38°	0,616	0,788	0,781	84°	0,995	0,105	9,514
39°	0,629	0,777	0,81	85°	0,996	0,087	11,43
40°	0,643	0,766	0,839	86°	0,998	0,07	14,3
41°	0,656	0,755	0,869	87°	0,999	0,052	19,081
42°	0,669	0,743	0,9	88°	0,999	0,035	28,64
43°	0,682	0,731	0,933	89°	1	0,018	57,289
44°	0,695	0,719	0,966	90°	1	0	Inf.
45°	0,707	0,707	1				

Fuente: Hiparco, S.II a.C

**Anexo 2. Guía académica**







# **F U N C I O N E S**

## **T R I G O N O M É T R I C A S**

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA  
SANTANDER

# F U N C I O N E S

## trigonométricas

Relacionaremos la información suministrada en el documento principal, con estos ejercicios para completar el buen desarrollo de los ejercicios ejemplo que mostraremos a continuación:

1.

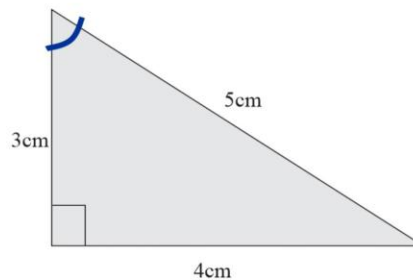


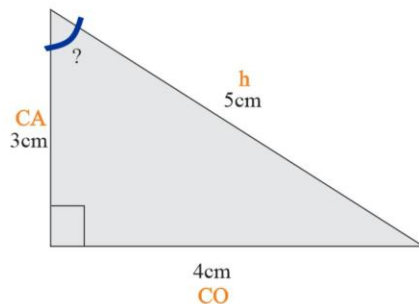
Figura 9. Ejemplo De Funciones Trigonométricas 1

Fuente: Autor

Observamos este ejemplo, se trata de un triángulo rectángulo que nos presenta datos de hipotenusa y sus catetos opuestos y adyacentes, sin embargo, no conocemos el valor de su ángulo agudo.

Hallaremos el valor correspondiente al ángulo de modo que:

Ángulo agudo se define como cualquier valor mayor que  $0^\circ$  y menor de  $90^\circ$ .



Relacionamos los catetos con respecto al ángulo agudo que deseamos conocer.

- El lado más largo: h
- El lado que está en seguida al ángulo que necesitamos hallar: CA
- El lado que se encuentre en frente al ángulo que necesitamos hallar: CO

Una vez definimos estos valores, utilizaremos las funciones trigonométricas para encontrar la medida del ángulo. Puede ser tomada cualquier función ya que se tienen todos los datos de sus lados.

Comenzaremos con la función seno, donde relaciona el cateto opuesto con la hipotenusa, de manera que:

$$\text{Sen}\theta = \frac{CO}{h} = \frac{4\text{cm}}{5\text{cm}} = 0.8$$

Este valor obtenido se da en decimales, pero posteriormente, lo pasaremos a unidades de grados, para eso, existen dos alternativas. La primera corresponde a una guía plasmada en el anexo 1, figura 1 del texto principal donde se relacionan los valores pertenecientes a seno, coseno y tangente en decimales como el que obtuvimos versus el valor en grados. Simplemente buscamos el que mejor se acerque a nuestro resultado y así determinamos el ángulo en grados.

Ángulo	seno	coseno	tangente
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,15
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,28
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,54
58°	0,848	0,53	1,6

Buscamos la columna de seno ya que fue la función que elegimos al inicio del ejercicio y, buscamos el valor que más se acerque. Luego relacionamos el valor y obtendremos un ángulo de **53°**

La segunda alternativa, se puede llevar a cabo con una calculadora, teniendo en cuenta que lo haremos con la inversa a la función, de modo que:

$$\theta = \text{sen}^{-1}(0.8)$$

$$\theta = \mathbf{53.13^\circ}$$

Cabe resaltar que podemos comprobar con las otras columnas de la tabla, ya que sea la función que utilizemos, debe corresponder al mismo valor de ángulo en el mismo ejercicio.

$$\text{Cos}\theta = \frac{CA}{h} = \frac{3\text{cm}}{5\text{cm}} = 0.6$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1}(0.6)$$

$$\theta = \mathbf{53,13^\circ}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{CO}{CA} = \frac{4\text{cm}}{3\text{cm}} = 1.33$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}(1.33)$$

$$\theta = \mathbf{53,13^\circ}$$

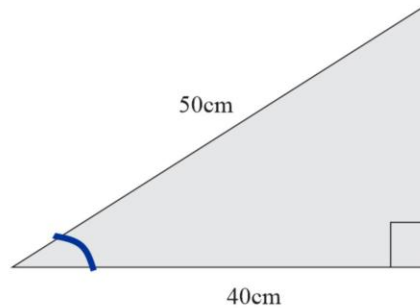
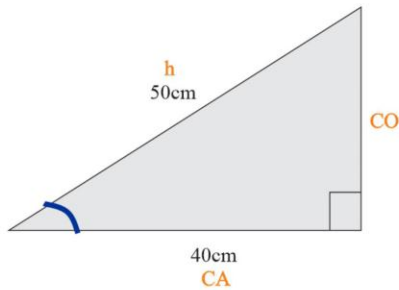


Figura 10. Ejemplo De Funciones Trigonómicas 2

Fuente: Autor

Observamos este ejemplo, se trata de un triángulo rectángulo que nos presenta datos de hipotenusa y su cateto adyacente, sin embargo, no conocemos el valor de su ángulo agudo.



Relacionamos sus valores con las referencias de un triángulo rectángulo, y posteriormente, utilizaremos las funciones trigonométricas para encontrar la medida del ángulo. Se deberá escoger la función que comprensa los valores que tenemos para hallar su ángulo, en este caso solo presenta datos en CA Y h.

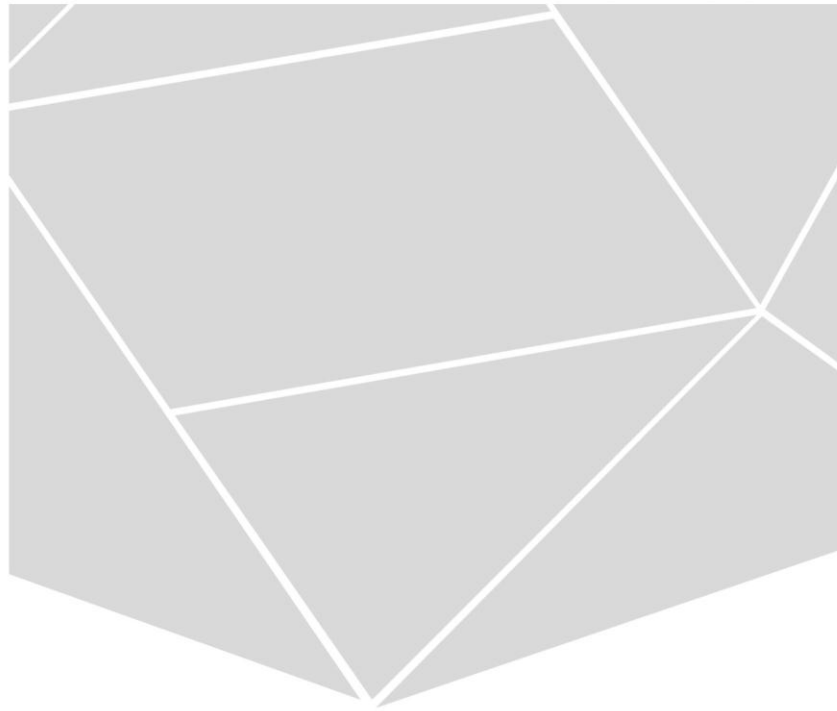
La Función que incluye estos dos valores, es Coseno, de modo que:

$$\text{Cos}\theta = \frac{CA}{h} = \frac{40\text{cm}}{50\text{cm}} = 0.8$$

34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,7
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,81
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,9

$$\theta = \text{Cos}^{-1}(0.8)$$

$$\theta = 36.87^\circ$$



# **REACCIONES**

**VIGAS Y PÓRTICOS**

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA  
SANTANDER

# REACCIONES

## vigas y

### VIGAS RESUELTAS

1.

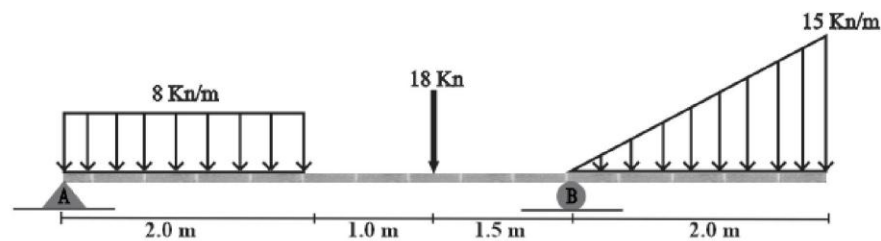
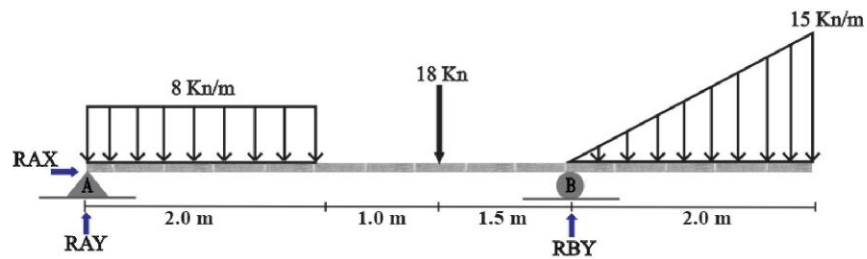


Figura 11. Ejemplo De Viga 1

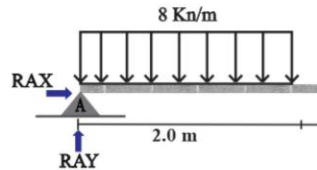
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de viga, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría.



Como podemos observar, identificamos punto A y punto B para poder caracterizarlos, En el punto A contamos con un apoyo isostático o fijo, esto nos da a entender que representa dos reacciones en la dirección X y Y (**RAX**, **RAY**). El apoyo B representa un apoyo móvil, este solo permite realizar reacciones verticales (**RBY**).

Esta viga presenta carga distribuida rectangular y triangular junto con una carga puntal, se debe generar cargas resultantes con su respectiva formula según la geometría.

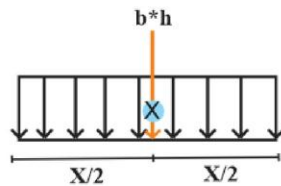


Tenemos una carga rectangular, por lo tanto, tendremos que

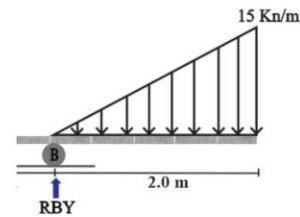
$$B \cdot h = 2\text{m} \cdot (8 \text{ kn/m})$$

$$= 16 \text{ kn}$$

Esta carga que ahora es puntual, se ubicara en la mitad de la distancia que recorre el rectángulo.



X = base del rectángulo.

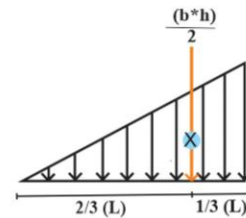


Tenemos una carga triangular, por lo tanto, tendremos que

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \text{ m} \cdot (15 \text{ kn/m})}{2}$$

$$= 15 \text{ kn}$$

Esta carga que ahora es puntual, y la ubicación dependerá de 2 factores, de  $2/3(L)$  Y  $1/3(L)$  respectivamente en el triángulo



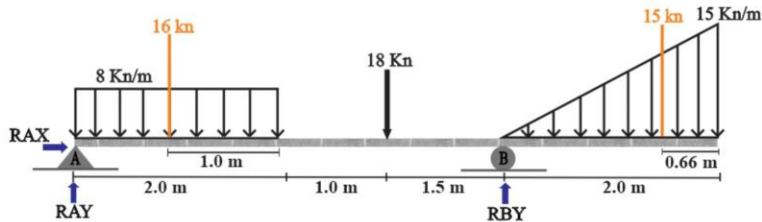
Dependiendo de la dirección en la que estemos tomando los momentos, se utilizará la distancia que se requiera.

L = Distancia base del triángulo

$$2/3 (L) = 2/3 (2\text{m}) = 1.333\text{m}$$

$$1/3 (L) = 1/3 (2\text{m}) = 0.666\text{m}$$

Una vez identificados estos parámetros implementamos, procedemos a aplicar las ecuaciones de equilibrio de cuerpo rígido:



$$\sum F_X = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY} + R_{BY} - 16 \text{ Kn} - 18 \text{ Kn} - 15 \text{ Kn} = 0$$

$$R_{AY} + R_{BY} = 49 \text{ Kn} \quad (1)$$

Hasta acá puede llegar nuestra ecuación ya que tenemos 2 incógnitas, necesitamos aplicar la ecuación de momento y así poder encontrar un resultado a estos valores.

$$\sum M = 0$$

$$\sum M = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M = F \cdot d$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-16 \text{ Kn}(1 \text{ m}) - 18 \text{ Kn}(3 \text{ m}) + R_{BY}(4.5 \text{ m}) - 15 \text{ Kn}(5.833 \text{ m}) = 0$$

$$-16 - 54 + R_{BY}(4.5) - 87.45 = 0$$

$$R_{BY} = \frac{87.45 + 16 + 54}{4.5}$$

$$R_{BY} = 34.98 \text{ Kn} \quad (2)$$

En esta ecuación (2), obtenemos un resultado a una incógnita ( $R_{BY}$ ), por lo tanto, podemos reemplazar en la ecuación (1) y poder despejar la otra ( $R_{AY}$ ).

$$R_{AY} + R_{BY} = 49 \text{ Kn} \quad (1)$$

$$R_{AY} + 34.98 \text{ Kn} = 49$$

$$R_{AY} = 49 - 34.98$$

$$R_{AY} = 14.02 \text{ Kn} \approx 14 \text{ Kn}$$

$$R_{BY} = 34.98 \text{ Kn} \approx 35 \text{ Kn}$$



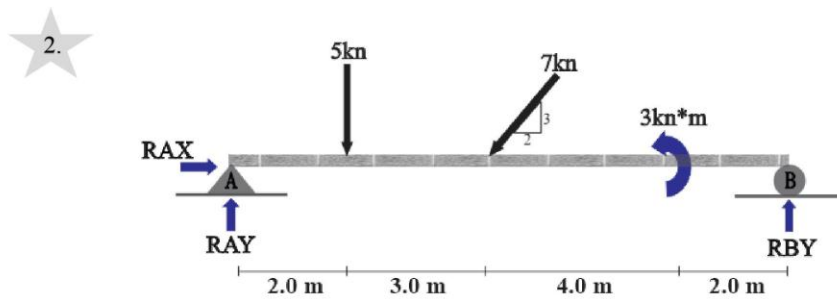


Figura 12. Ejemplo De Viga 2

Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de viga, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría.

Como podemos observar, identificamos punto A y punto B para poder caracterizarlos, En el punto A contamos con un apoyo isostático o fijo, esto nos da a entender que representa dos reacciones en la dirección X y Y (**RAX**, **RAY**). El apoyo B representa un apoyo móvil, este solo permite realizar reacciones verticales (**RBY**).

Esta viga presenta carga puntal vertical, momento y carga puntal inclinada respectivamente, se deben generar cargas resultantes con su respectiva fórmula según su geometría.

Podemos observar valores de catetos que nos van a servir para hallar la hipotenusa como primer paso.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

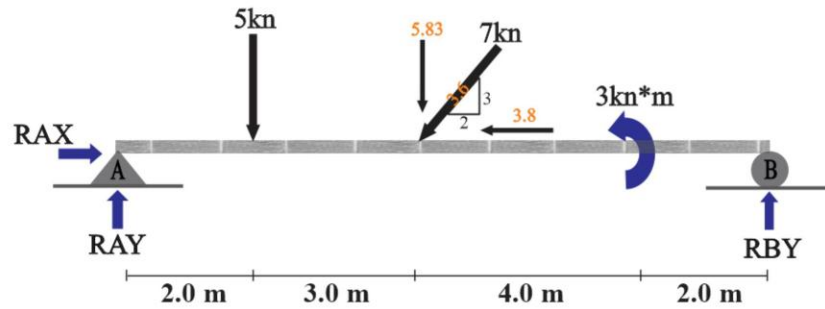
$$c = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$c = 3.6$$

Ahora podemos obtener los componentes en X y Y.

$$Y = 7 \left( \frac{3}{3.6} \right) = 5.83$$

$$X = 7 \left( \frac{2}{3.6} \right) = 3.8$$



$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma M_A=0 \quad \curvearrowleft (-)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-R_{BY}(11)-3+5.83(5)+5(2)=0$$

$$R_{BY}=3.28 \approx 3.3 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY}-5-5.83+3.28=0$$

$$R_{AY}=7.55 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_X=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia la derecha (+).

$$\Sigma F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$R_{AX}-3.9=0$$

$$R_{AX}=3.9$$

#### REACCIONES

$$R_{AX}=3.9 \text{ KN}$$

$$R_{AY}=7.55 \text{ KN}$$

$$R_{BY}=3.28 \text{ KN}$$

$$\Sigma \text{cargas } Y=5+5.83=10.83 \text{ KN}$$

$$\Sigma \text{Reacciones}=3.28+7.55=10.83 \text{ KN}$$

OK

3.

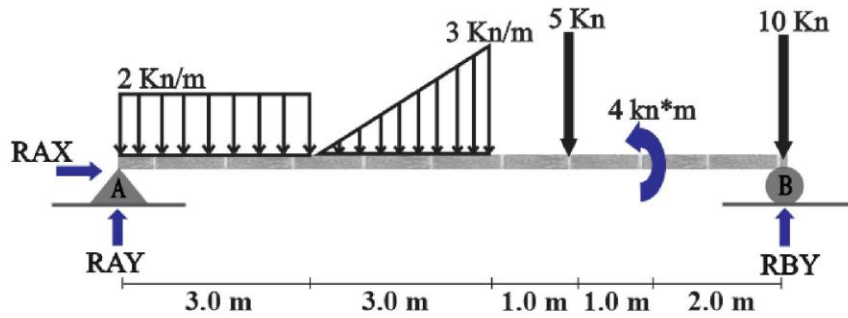
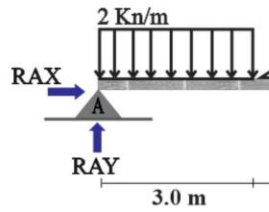


Figura 13. Ejemplo De Viga 3  
Fuente: Autor

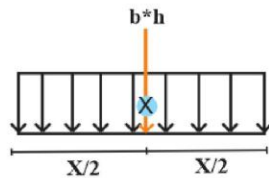


Tenemos una carga rectangular, por lo tanto, tendremos que:

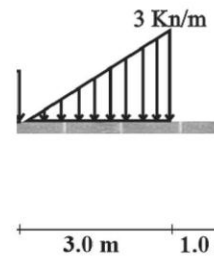
$$B \cdot h = 3m \cdot (2 \text{ kn/m})$$

$$= 6 \text{ Kn}$$

Esta carga que ahora es puntual, se ubicara en la mitad de la distancia que recorre el rectángulo.



X = base del rectángulo.

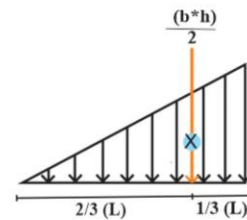


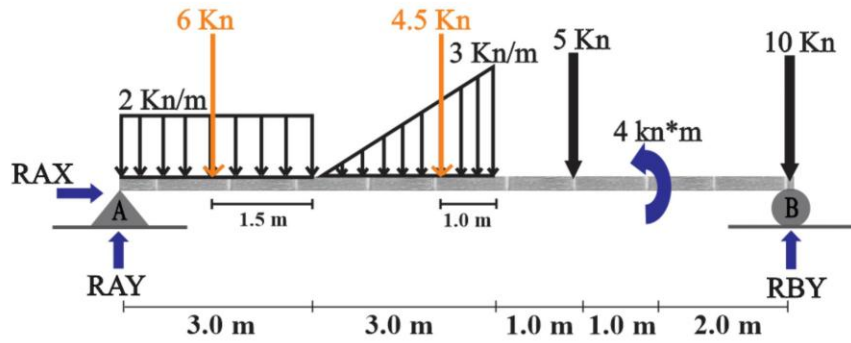
Tenemos una carga triangular, por lo tanto, tendremos que

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \text{ m} \cdot (3 \text{ kn/m})}{2}$$

$$= 4.5 \text{ Kn}$$

Esta carga que ahora es puntual, y la ubicación dependerá de 2 factores, de  $\frac{2}{3}(L)$  Y  $\frac{1}{3}(L)$  respectivamente en el triángulo





$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma M_A=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-R_{BY}(10)+10(10)-4+5(7)+4.5(5)+6(1.5)=0$$

$$R_{BY}=16.25 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY}-6-4.5-5-10+16.25=0$$

$$R_{AY}=9.25 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_X=0$$

$$R_{AX}=0$$

4.

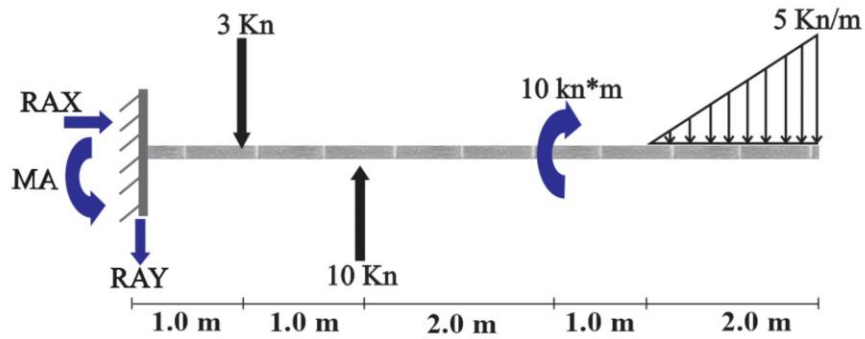
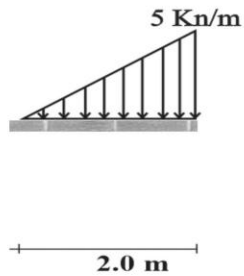


Figura 14. Ejemplo De Viga 4

Fuente: Autor

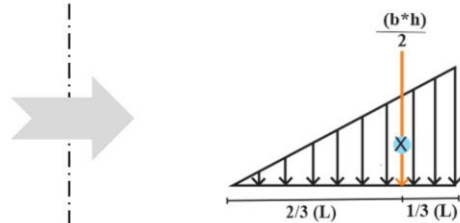


Tenemos una carga triangular, por lo tanto, tendremos que

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \text{ m} \cdot (5 \text{ kn/m})}{2}$$

$$= 5 \text{ Kn}$$

Esta carga que ahora es puntual, y la ubicación dependerá de 2 factores, de  $\frac{2}{3}(L)$  Y  $\frac{1}{3}(L)$  respectivamente en el triángulo

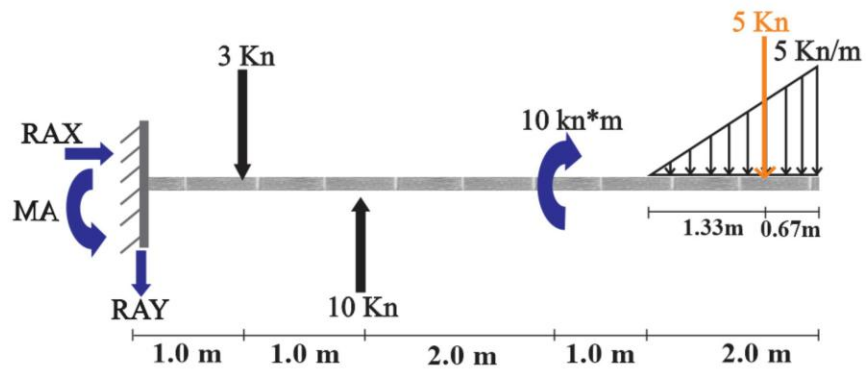


Dependiendo de la dirección en la que estemos tomando los momentos, se utilizará la distancia que se requiera.

$L$  = Distancia base del triángulo

$$\frac{2}{3}(L) = \frac{2}{3}(2\text{m}) = 1.333\text{m}$$

$$\frac{1}{3}(L) = \frac{1}{3}(2\text{m}) = 0.666\text{m}$$



$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma MA=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-MA+3(1)-10(2)+10+5(6.33)=0$$

$$MA=24.5 \text{ Kn}\cdot\text{m}$$

$$\Sigma FY=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$RAY-3+10-5=0$$

$$RAY=-2 \text{ KN} \quad \uparrow$$

$$RAY=2 \text{ KN} \quad \downarrow \text{ OK}$$

$$\Sigma FX=0$$

$$RAX=0$$

5.

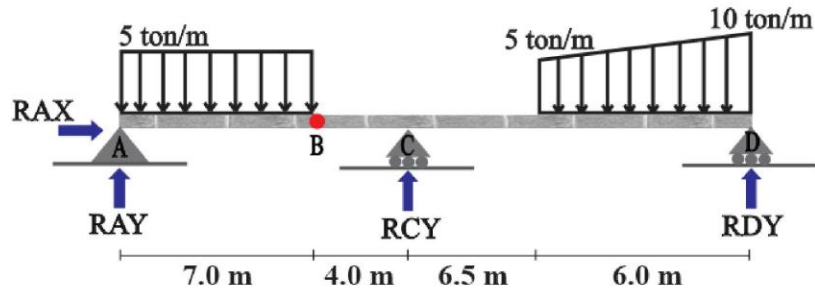
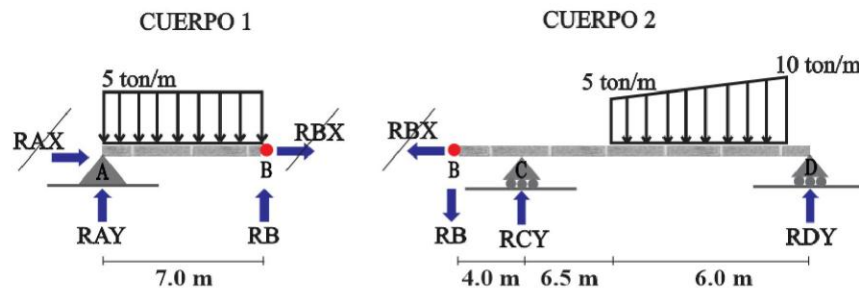


Figura 15. Ejemplo De Viga 5

Fuente: Autor

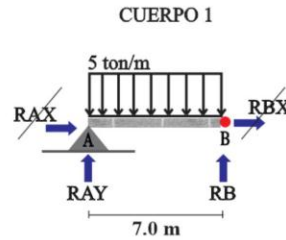
Teniendo este ejemplo de viga, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría. Podemos observar un punto rojo en esta viga, esto está describiendo una articulación presente en el ejercicio, por lo tanto, la resolución varía con respecto a los anteriores ejemplos presentados.

Una articulación permite la unión y continuidad en dos o más cuerpos presentes en una estructura, partiendo de ahí debemos dividir la estructura antes y después de esta articulación, dando como resultado:



Se entiende por RB como la reacción de la articulación, lo ilustramos inicialmente en el eje X y Y para que se encuentre en equilibrio en el cuerpo 1 y en el cuerpo 2 pero podemos concluir que no hay fuerzas laterales, por lo tanto, las incógnitas en el eje x serán cero.

Tomaremos cada cuerpo de estructura y le hallaremos reacciones tomando en cuenta las cargas y su respectiva geometría, de la siguiente forma:



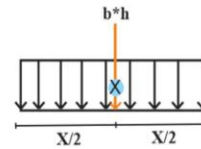
Tenemos una carga distribuida rectangular, por lo tanto, tendremos que:

Área de un rectángulo:

$$B \cdot h = 7\text{m} \cdot (5 \text{ ton/m})$$

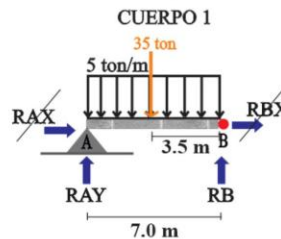
$$= 35 \text{ Ton}$$

Esta carga que ahora es puntual, se ubicara en la mitad de la distancia que recorre el rectángulo.



X = Base del rectángulo

Obtendremos como resultado la carga puntualizada en la mitad del rectángulo según se aplique por la geometría.



$$\Sigma M = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-35(3.5) + RB(7) = 0$$

$$RB = 17.5 \text{ Ton}$$

(fuerza de la articulación)

$$\Sigma F_Y = 0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (+)$$

$$RAY - 35 + 17.5 = 0$$

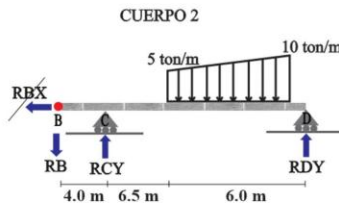
$$RAY = 17.5 \text{ Ton} \quad \uparrow$$

(fuerza apoyo A)

$$\Sigma F_X = 0$$

$$RAX = 0$$





Tenemos una carga distribuida trapezoidal, por lo tanto, tendremos que:

Área de un trapecio:

$$A = \frac{b + B}{2} * h$$

El h en este caso será la base del trapecio

Esta fórmula hace referencia a las ordenadas mayor y menor de un trapecio, por lo tanto:

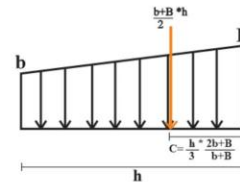
$$A = \frac{5+10}{2} * 6 = 45 \text{ Ton}$$

Para saber dónde se debe colocar la carga, tendremos que hallar el centroide de la misma.

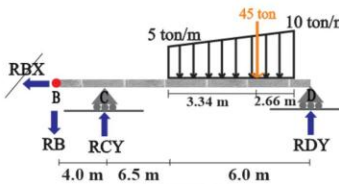
Centroide de un trapecio:

$$C = \frac{h}{3} * \frac{2b+B}{b+B} = C = \frac{6}{3} * \frac{2(5)+10}{5+10} = C=2.66 \text{ m}$$

Tomando como punto de referencia el trazo desde la ordenada mayor hacia la ordenada menor para localizar esta distancia.



CUERPO 2



$$\sum M=0$$

$$\sum MC=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto C.

$$17.5(4)-45(9.84)+RDY(12.5)=0$$

**RDY= 29.82 Ton**  
(fuerza apoyo D)

$$\sum FY=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-17.5+RCY-45+29.82=0$$

**RCY= 32.68 Ton**  
(fuerza apoyo C)

$$\sum FX=0$$

$$RAX=0$$

6.

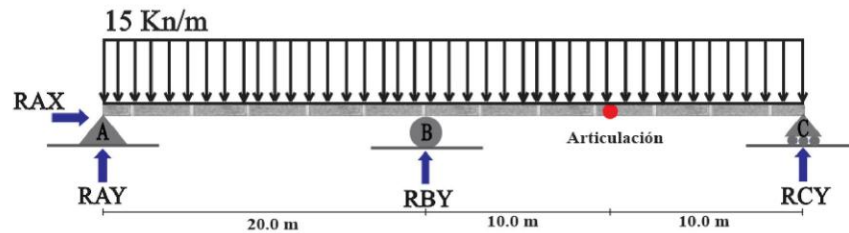
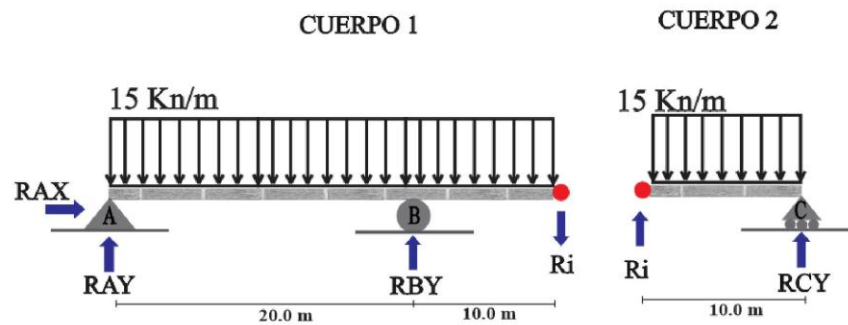


Figura 16. Ejemplo De Viga 6

Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de viga, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría. Podemos observar un punto rojo en esta viga, esto está describiendo una articulación presente en el ejercicio, por lo tanto, la resolución de esta estructura será de la siguiente forma:

Una articulación permite la unión y continuidad en dos o más cuerpos presentes en una estructura, partiendo de ahí debemos dividir la estructura antes y después de esta articulación, dando como resultado:

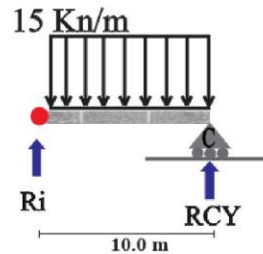


Se entiende por  $R_i$  como la reacción de la articulación, lo ilustramos inicialmente en el eje X y Y para que se encuentre en equilibrio en el cuerpo 1 y en el cuerpo 2 pero podemos concluir que no hay fuerzas laterales, por lo tanto, las incógnitas en el eje x serán cero y las obviaremos.

Tomaremos cada cuerpo de estructura y le hallaremos reacciones tomando en cuenta las cargas y su respectiva geometría, de la siguiente forma:

Podemos iniciar con cualquier cuerpo de la estructura, en este caso, empezamos con el más corto y simple, el cuerpo 2.

## CUERPO 2



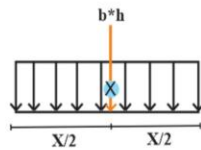
Con las fórmulas de cuerpo rígido, encontramos las incógnitas, en este caso despejaremos la reacción en la articulación ( $R_i$ )

Tenemos una carga rectangular, por lo tanto, tendremos que:

$$B \cdot h = 10\text{m} \cdot (15 \text{ kn/m})$$

$$= 150 \text{ Kn}$$

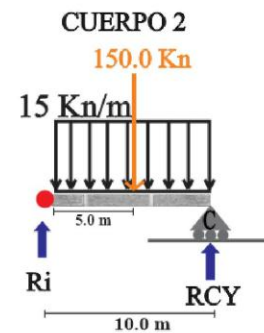
Esta carga que ahora es puntual, se ubicará en la mitad de la distancia que recorre el rectángulo.



En este caso la fuerza realizada en  $R_i$  será igual a la fuerza en el nodo C, por lo tanto:

$$R_{CY} = 75.0 \text{ KN}$$

Tendremos como resultado la siguiente figura:



$$\sum M = 0$$

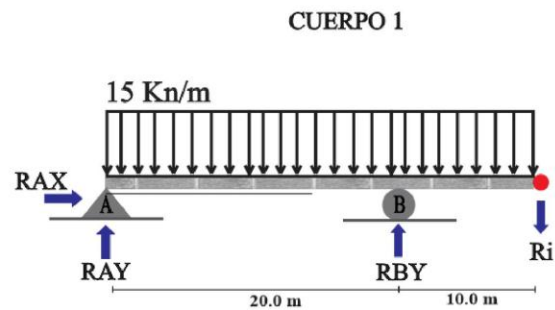
$$\sum M_C = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto C.

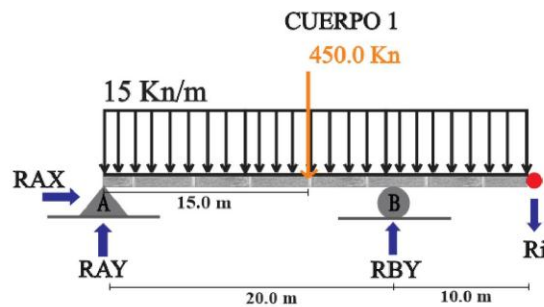
$$-R_i(10) + 150(5) = 0$$

$$R_i = 75.0 \text{ KN}$$

(fuerza articulación)



Puntualizaos la carga y tendremos que:



Hallaremos las incógnitas restantes y reemplazando los valores de las que ya tenemos:

$$\sum M=0$$

$$\sum MA=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$75(30)-RBY(20)+450(15)=0$$

$$\underline{RBY= 450.0 \text{ KN}}$$
  
 (fuerza apoyo B)

$$\sum FY=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-75+450-450+RAY=0$$

$$\underline{RAY= 75.0 \text{ KN}}$$
  
 (fuerza apoyo A)

$$\sum FX=0$$

$$\underline{RAX= 0}$$

7.

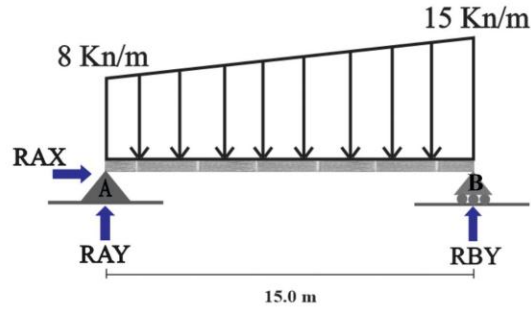
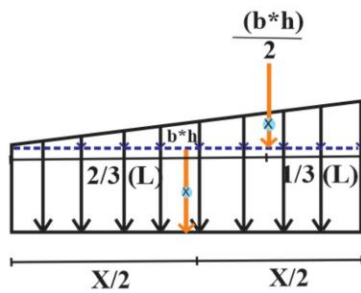
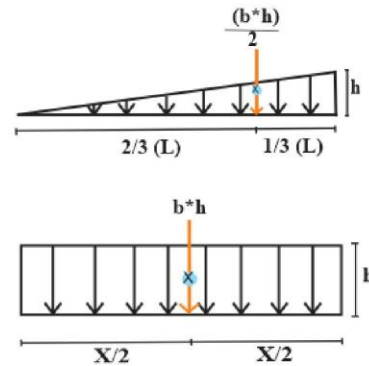


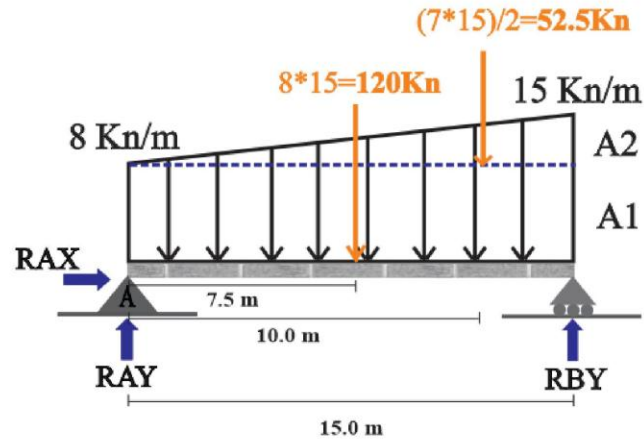
Figura 17. Ejemplo De Viga 7  
Fuente: Autor

Tenemos una carga trapezoidal, por lo tanto, se podrá resolver dividiendo la figura en 2 geometrías conocidas, resultando así en rectángulo y triángulo, de esta forma:



Haciendo un desglose de la figura anterior, tendremos que:





$$\sum M = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$120(7.5) + 52.5(10) - R_{BY}(15) = 0$$

$$R_{BY} = 95.0 \text{ KN}$$

(fuerza de la articulación)

$$\sum F_Y = 0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY} - 120 - 52.5 + 95 = 0$$

$$R_{AY} = 77.5 \text{ KN}$$

(fuerza apoyo A)

$$\sum F_X = 0$$

$$R_{AX} = 0$$

8.

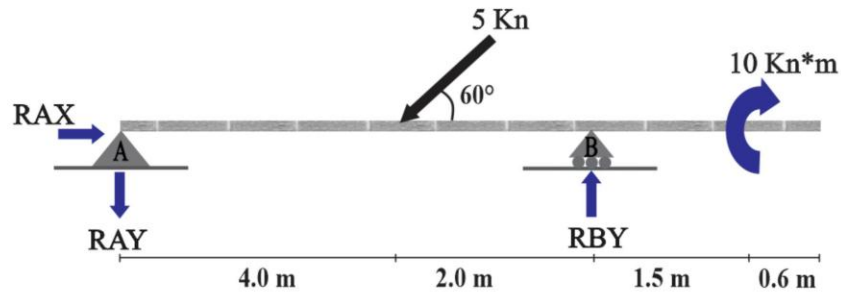
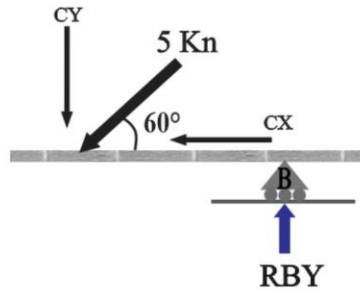


Figura 18. Ejemplo De Viga 8  
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de viga, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría. Como podemos observar, identificamos punto A y punto B para poder caracterizarlos, En el punto A contamos con un apoyo isostático o fijo, esto nos da a entender que representa dos reacciones en la dirección X y Y ( **$R_{AX}$** ,  **$R_{AY}$** ). El apoyo B representa un apoyo móvil, este solo permite realizar reacciones verticales ( **$R_{BY}$** ).

Esta viga presenta carga puntual inclinada con  $60^\circ$ , así que se procederá a descomponer en X y Y.

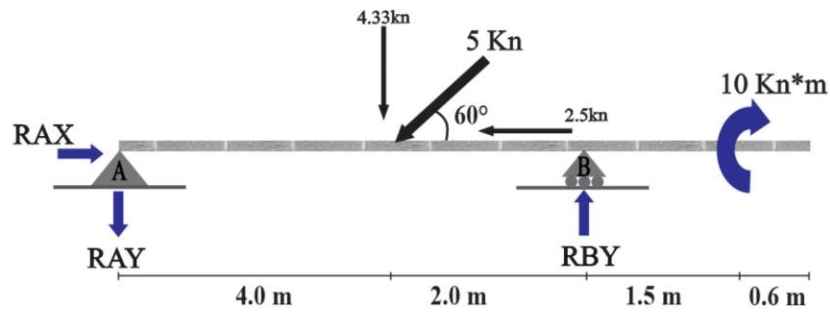
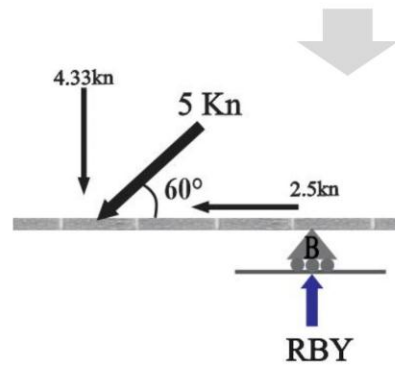


Una vez encontradas las componentes, procedemos a hallar las reacciones:

Tendremos componente en X (CX) y componente en Y (CY), la fórmula empleada para determinar sus valores es la siguiente:

$$CX = F * \cos\theta = 5 * \cos 60^\circ = 2.5 \text{ KN}$$

$$CY = F * \text{Sen}\theta = 5 * \text{sen} 60^\circ = 4.33 \text{ KN}$$



$$\sum M=0$$

$$\sum F_Y=0$$

$$\sum F_X=0$$



$$\sum MA=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$4.33(4) - R_{BY}(6) + 10 = 0$$

$$\underline{R_{BY} = 4.53 \text{ KN}}$$

(fuerza apoyo B)

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY} - 4.33 + 4.55 = 0$$

$$\underline{R_{AY} = 0.23 \text{ KN}}$$

(fuerza apoyo A)

esto quiere decir que el sentido asumido por la fuerza es negativo, así que simplemente se invierte en la estructura y listo.

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia la derecha (+).

$$\sum F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$R_{AX} - 2.5 = 0$$

$$\underline{R_{AX} = 2.5 \text{ KN}}$$

9.

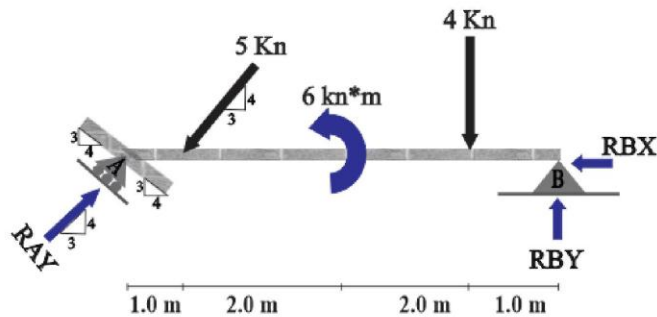
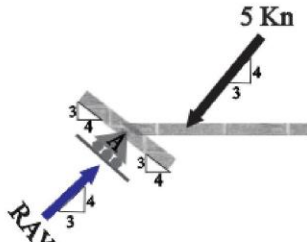


Figura 19. Ejemplo De Viga 9  
Fuente: Autor

Esta viga presenta carga puntal vertical, momento y carga puntual inclinada respectivamente, se deben generar cargas resultantes con su respectiva fórmula según su geometría.



Podemos observar valores de catetos que nos van a servir para hallar la hipotenusa como primer paso.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

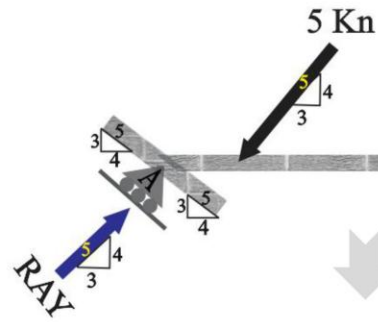
$$c = 5$$

Ahora podemos obtener los componentes en X y Y. El 5 representa la carga inclinada y tomamos los valores representados en cada eje.

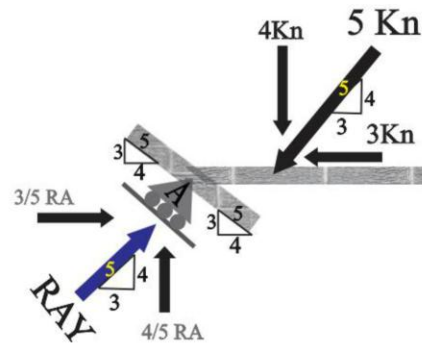
$$X = 5 \left( \frac{3}{5} \right) = 3kn$$

$$Y = 5 \left( \frac{4}{5} \right) = 4kn$$

hallar las reacciones:

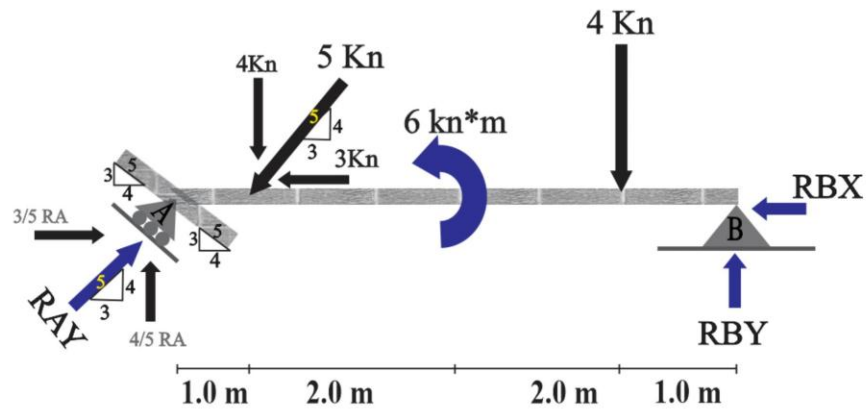


Y haremos lo mismo con la reacción en el apoyo A, la descomponemos en X y Y.



Una vez

encontradas las componentes, procedemos a



$$\sum M=0$$

$$\sum M_B=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto **B**.

$$-\frac{4}{5} RA(6)+4(5)+6+4(1)=0$$

$$\frac{25}{4} RA=30$$

$$RAY=6.25 \text{ KN}$$

(fuerza apoyo A)

Teniendo este valor, podemos resolver las incógnitas de RAX y RAY.

$$RAX=3/5(RA)=3.75 \text{ kn}$$

$$RAY=4/5(RA)=5 \text{ kn}$$

$$\sum F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$5-4-4+RBY=0$$

$$RBY=3.0 \text{ KN}$$

$$\sum F_X=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia la derecha (+).

$$\sum F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$3.75-3-RBX=0$$

$$RBX=0.75 \text{ KN}$$

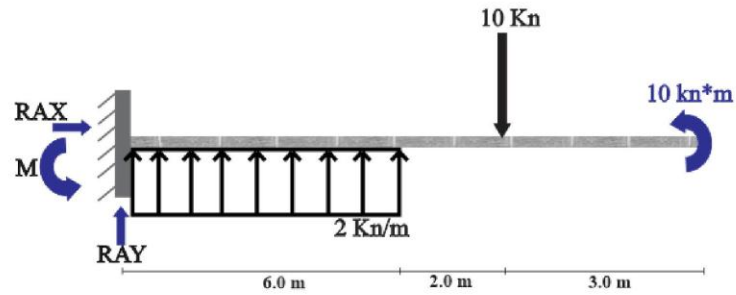


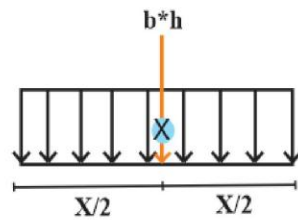
Figura 20. Ejemplo De Viga 10  
Fuente: Autor

Tenemos una carga rectangular, por lo tanto, tendremos que:

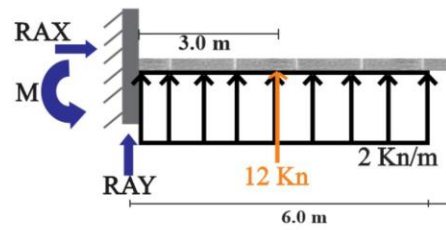
$$B \cdot h = 10\text{m} \cdot (15 \text{ kn/m})$$

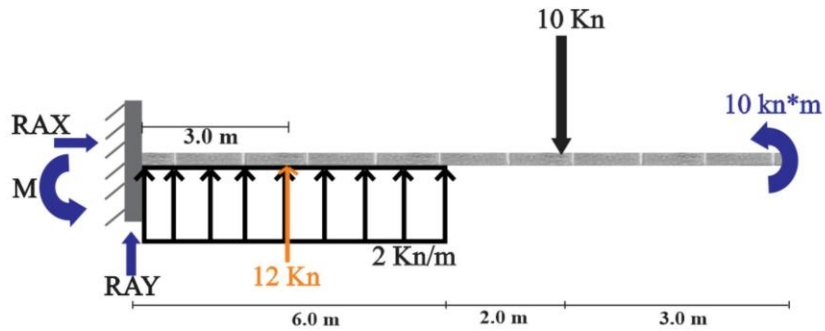
$$= 150 \text{ Kn}$$

Esta carga que ahora es puntual, se ubicara en la mitad de la distancia que recorre el rectángulo.



Se puntualiza la carga según su geometría como lo indica la imagen y se obtiene que:





$$\sum F_Y = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY} + 12 - 10 = 0$$

$$R_{AY} = -2.0 \text{ kN}$$

$$R_{AY} = 2.0 \text{ kN} \quad \downarrow$$

(fuerza apoyo A)

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

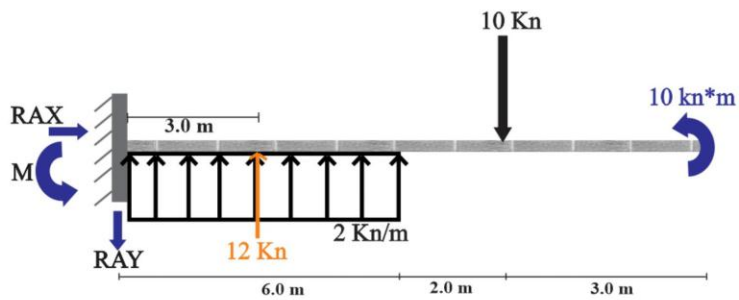
$$-10 + 10(8) - 12(3) - M_A = 0$$

$$M_A = 34.0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

(momento en apoyo A)

$$R_{AX} = 0$$

esto quiere decir que el sentido asumido por la fuerza es negativo, así que simplemente se invierte en la estructura y listo.



11.

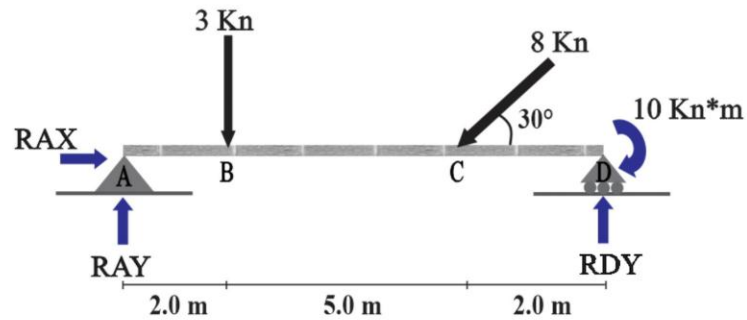
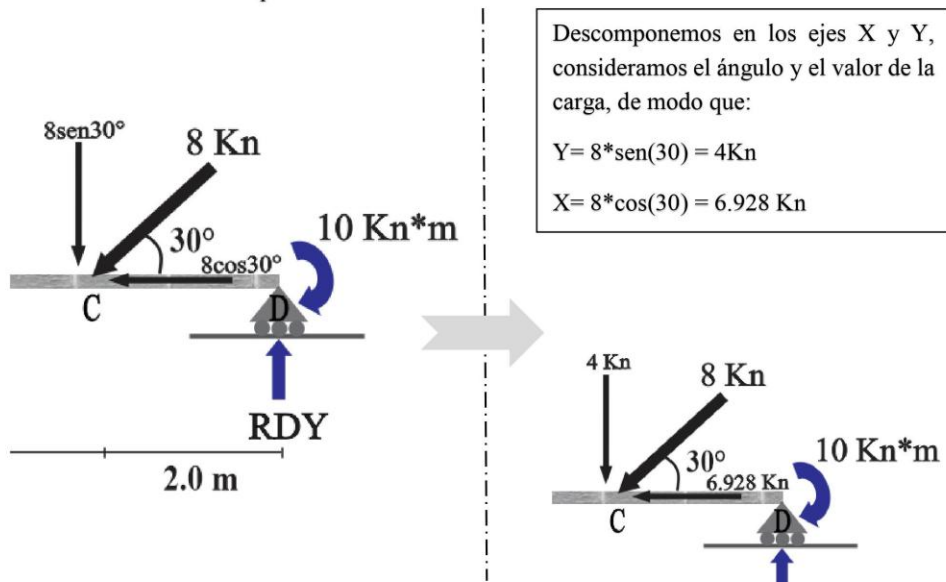


Figura 21. Ejemplo De Viga 11

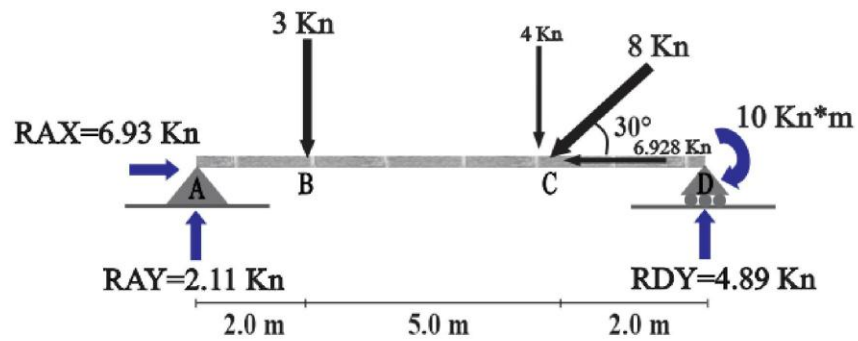
Fuente: Autor

Tomando como punto de partida, la explicación de los anteriores ejercicios de vigas, se resolverá de una forma mas práctica, teniendo así:

1. Identificar reacciones en los apoyos tal como se muestra en la imagen principal de este ejercicio.
2. Condiciones de equilibrio:



<p><math>\Sigma F_X=0</math></p> <p><math>\Sigma F_X=0 \rightarrow (+)</math></p> <p><math>R_{AX}-6.928=0</math></p> <p><math>R_{AX}= 6.93 \text{ Kn}</math></p>	<p><math>\Sigma M=0</math></p> <p><math>\Sigma M_A=0 \curvearrowright (+)</math></p> <p>Tomamos como punto de partida el punto A.</p> <p><math>R_{DY}(9)-10-4(7)-3(2)=0</math></p> <p><math>R_{DY}= 44/9</math></p> <p><math>R_{DY}= 4.89 \text{ Kn}</math></p>	<p><math>\Sigma F_Y=0</math></p> <p>Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).</p> <p><math>\Sigma F_Y=0 \uparrow (+)</math></p> <p><math>R_{AY}-3-4+R_{DY}=0</math></p> <p><math>R_{AY}-3-4+4.89=0</math></p> <p><math>R_{AY}= 2.11 \text{ Kn}</math></p>
--	---	--



12.

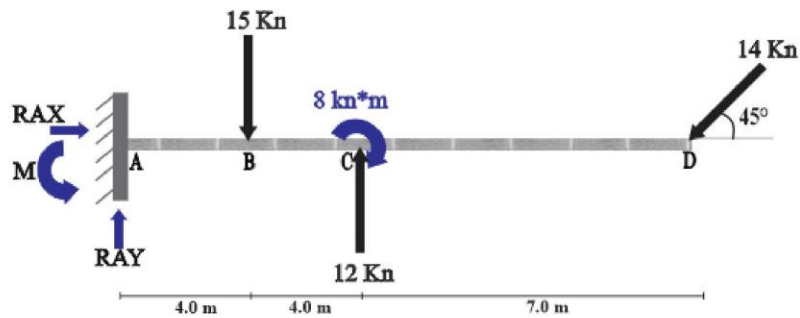
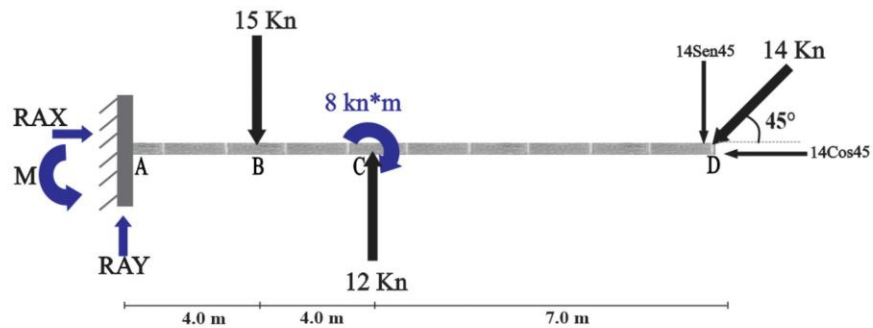


Figura 22. Ejemplo De Viga 12  
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso solamente consideramos el empotramiento, por lo tanto, tenemos 3 incógnitas.
2. Condiciones de equilibrio



Descomponemos en los ejes X y Y, consideramos el ángulo y el valor de la carga, de modo que:

$$Y = 14 * \text{sen}(45) = 9.899 \text{ Kn}$$

$$X = 14 * \text{cos}(45) = 9.899 \text{ Kn}$$



$$\sum F_X=0$$

$$\sum F_X=0 \rightarrow (+)$$

$$R_{AX}-9.899=0$$

$$R_{AX}=9.899 \approx 9.9 \text{ Kn}$$

$$\sum F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y=0 \uparrow (+)$$

$$R_{AY}-15+12-9.899=0$$

$$R_{AY}-12.899=0$$

$$R_{AY}=12.9 \text{ KN}$$

$$\sum M=0$$

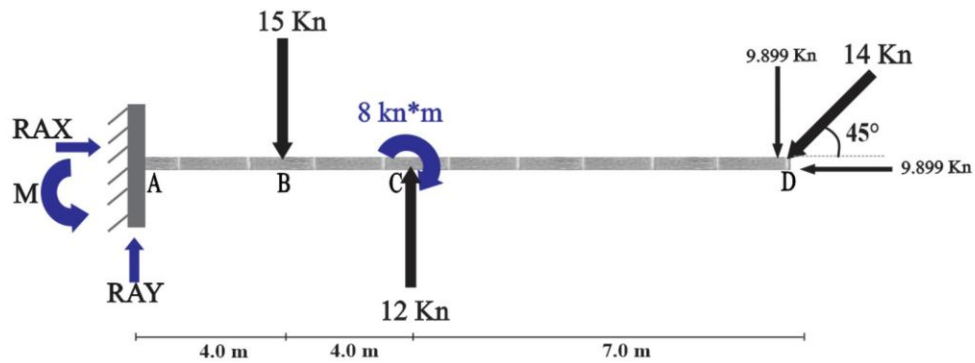
$$\sum M_A=0 \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$M_A-15(4)+12(8)-8-9.899(15)=0$$

$$M_A-120.485=0$$

$$M_A=120.5 \text{ KN*M}$$



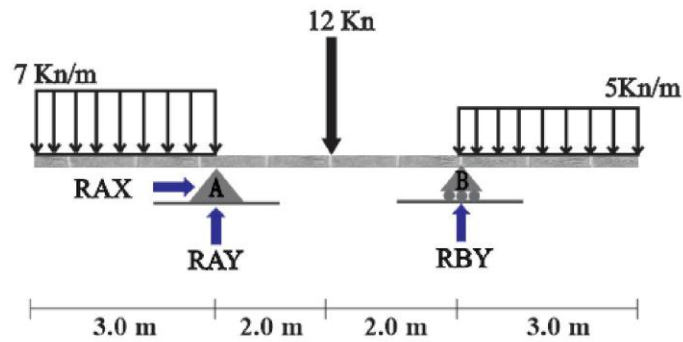
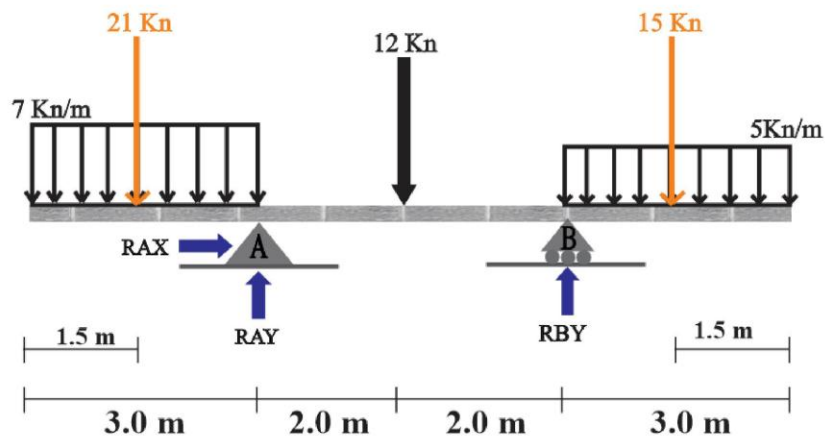


Figura 23. Ejemplo De Viga 13

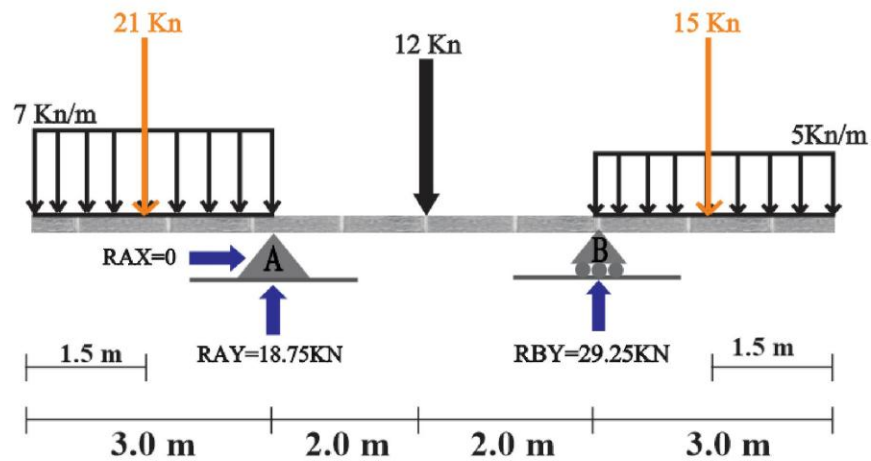
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre las cargas rectangulares.



## 3. Condiciones para equilibrio:

<p><math>\Sigma F_X=0</math></p> <p><math>\Sigma F_X=0 \rightarrow (+)</math> <b>RAX=0</b></p>	<p><math>\Sigma M=0</math></p> <p><math>\Sigma M_A=0 \curvearrowright (+)</math> Tomamos como punto de partida el punto A.</p> <p><math>-15(5.5)+R_{BY}(4)-12(2)+21(1.5)=0</math> <math>-82.5+R_{BY}(4)-24+31.5=0</math> <b>RBY= 18.75 KN</b></p>	<p><math>\Sigma F_Y=0</math></p> <p>Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).</p> <p><math>\Sigma F_Y=0 \uparrow (+)</math> <math>R_{AY}-21-12-15+R_{BY}=0</math> <math>R_{AY}-48+18.75=0</math> <b>RAY= 29.25 KN</b></p>
--	---	--



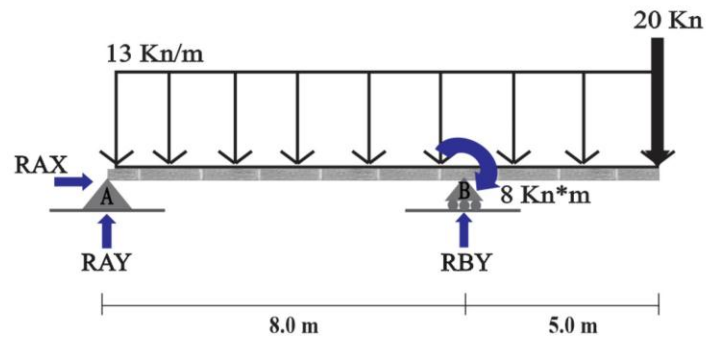
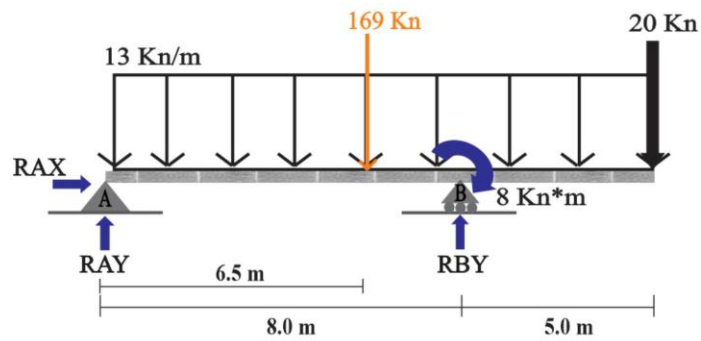


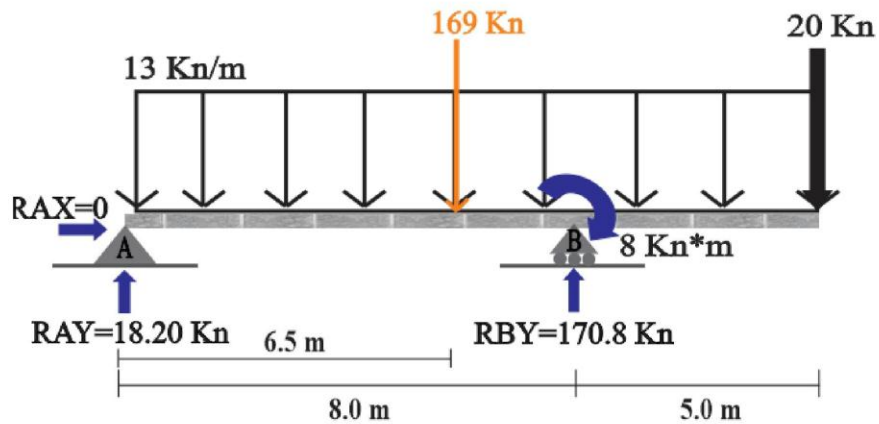
Figura 24. Ejemplo De Viga 14  
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre la carga rectangular.



## 3. Condiciones de equilibrio:

<div style="border: 1px solid gray; border-radius: 50%; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #e0e0e0;"> <math>\Sigma F_X=0</math> </div> <p><math>\Sigma F_X=0 \rightarrow (+)</math>  <math>R_{AX}=0</math></p>	<div style="border: 1px solid gray; border-radius: 50%; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #e0e0e0;"> <math>\Sigma M=0</math> </div> <p><math>\Sigma M_A=0 \curvearrowright (+)</math>  Tomamos como punto de partida el punto A.  <math>-20(13)-8+R_{BY}(8)-169(6.5)=0</math>  <math>-260-8+R_{BY}(8)-1098.5=0</math>  <math>R_{BY}=170.8 \text{ KN}</math></p>	<div style="border: 1px solid gray; border-radius: 50%; width: 60px; height: 60px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #e0e0e0;"> <math>\Sigma F_Y=0</math> </div> <p>Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).  <math>\Sigma F_Y=0 \uparrow (+)</math>  <math>R_{AY}-169+R_{BY}-20=0</math>  <math>R_{AY}-169+170.812-20=0</math>  <math>R_{AY}=18.188 \approx 18.2 \text{ KN}</math></p>
---	---	--



15.

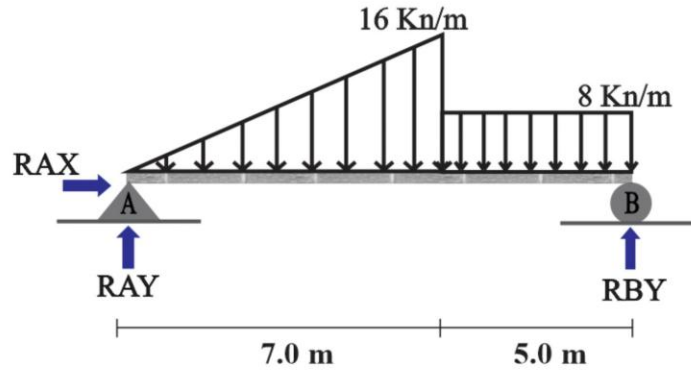
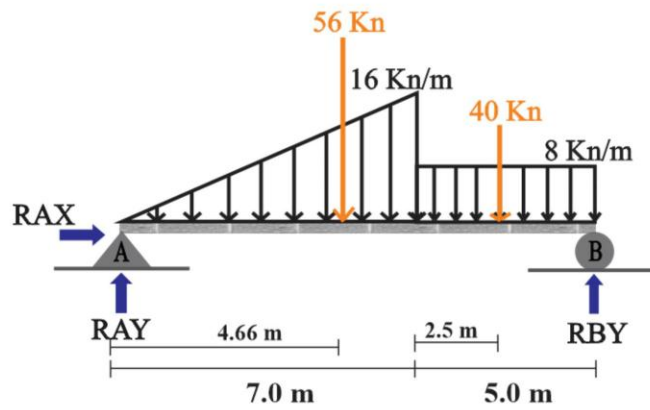


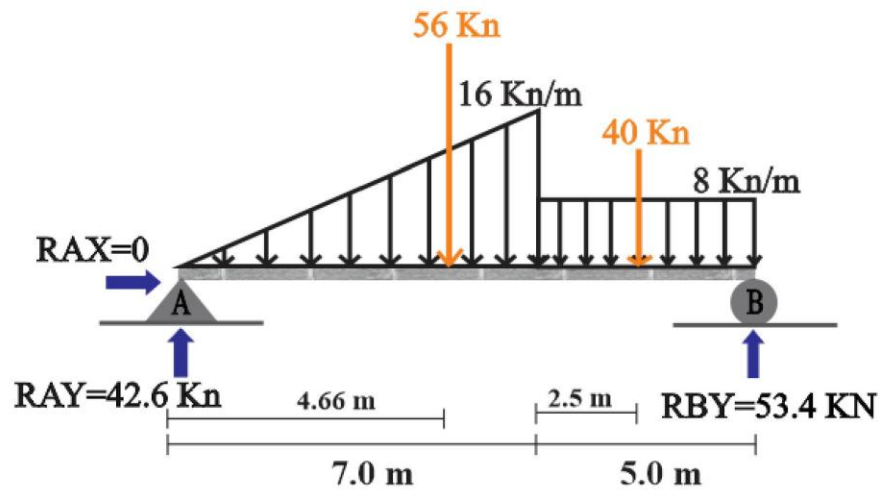
Figura 25. Ejemplo De Viga 15  
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre la carga rectangular y triangular.



3. Condiciones de equilibrio: En este caso evaluamos las incógnitas y con las ecuaciones disponibles, encontramos esos valores.

<p><math>\Sigma F_X=0</math></p> <p><math>\Sigma F_X=0 \rightarrow (+)</math></p> <p><math>R_{AX}=0</math></p>	<p><math>\Sigma M=0</math></p> <p><math>\Sigma M_A=0 \curvearrowright (+)</math></p> <p>Tomamos como punto de partida el punto A.</p> <p><math>R_{BY}(12)-40(9.5)-56(4.66)=0</math></p> <p><math>R_{BY}(12)-560.96=0</math></p> <p><math>R_{BY}=53.4 \text{ KN}</math></p>	<p><math>\Sigma F_Y=0</math></p> <p>Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).</p> <p><math>\Sigma F_Y=0 \uparrow (+)</math></p> <p><math>R_{AY}-56-40+R_{BY}=0</math></p> <p><math>R_{AY}-56-40+53.4=0</math></p> <p><math>R_{AY}=42.6 \text{ KN}</math></p>
--	--	---



16.

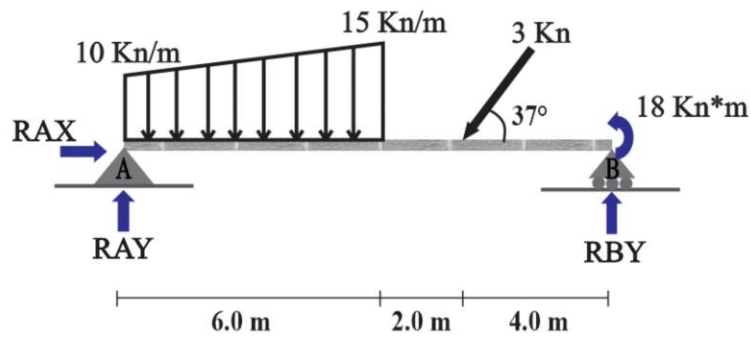
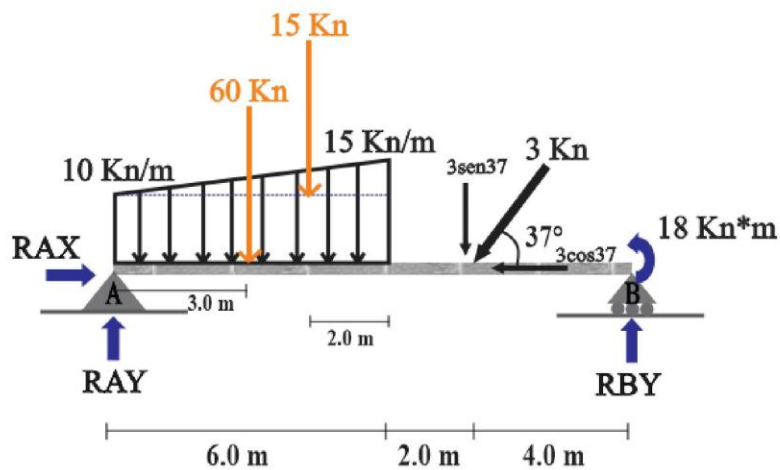


Figura 26. Ejemplo De Viga 16

Fuente: Autor

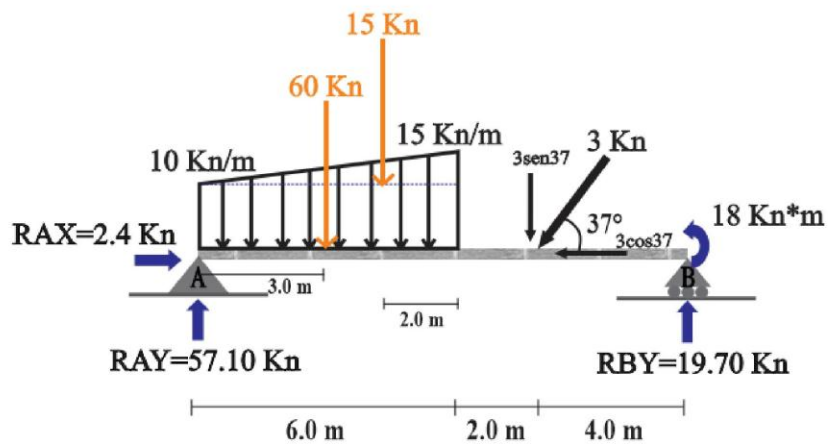
1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre la carga trapezoidal.
3. Descomponer las cargas inclinadas en ejes X y Y.





## 4. Condiciones de equilibrio:

<p style="text-align: center;"><math>\Sigma F_X=0</math></p> <p><math>\Sigma F_X=0 \rightarrow (+)</math></p> <p><math>RAX-(3\cos 37)=0</math></p> <p><b><math>RAX=2.39 \approx 2.4 \text{ KN}</math></b></p>	<p style="text-align: center;"><math>\Sigma M=0</math></p> <p><math>\Sigma MA=0 \curvearrowright (+)</math></p> <p>Tomamos como punto de partida el punto A.</p> <p><math>RBY(12)+18-(3\text{Sen}37)(8)-15(4)-60(3)=0</math></p> <p><math>RBY(12)+18-14.44-180-180=0</math></p> <p><b><math>RBY= 19.70 \text{ KN}</math></b></p>	<p style="text-align: center;"><math>\Sigma F_Y=0</math></p> <p>Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).</p> <p><math>\Sigma F_Y=0 \uparrow (+)</math></p> <p><math>RAY-60-15-(3\text{Sen}37)+RBY=0</math></p> <p><math>RAY-60-15-1.805+19.70=0</math></p> <p><b><math>RAY= 57.10 \text{ KN}</math></b></p>
---	--	---



17.

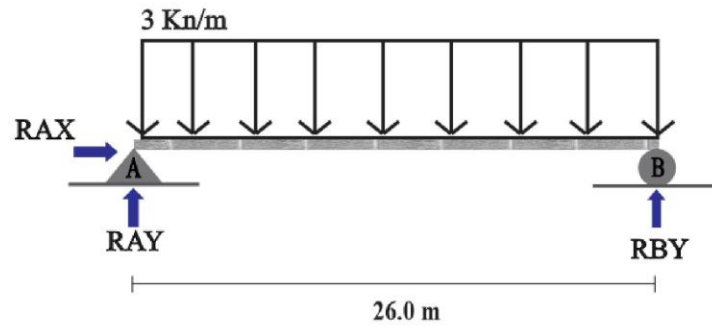
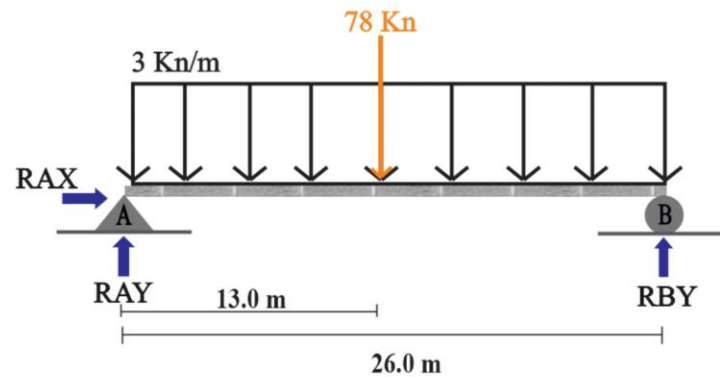


Figura 27. Ejemplo De Viga 17  
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre la carga rectangular.



## 3. Condiciones de equilibrio

$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma M_A=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-R_{BY}(26)-78(13)=0$$

$$R_{BY}=39.0 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY}-78+R_{BY}=0$$

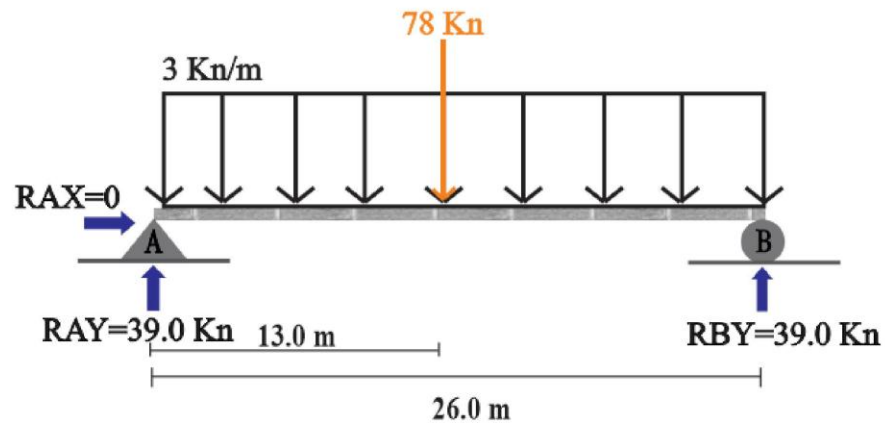
$$R_{AY}-78+39=0$$

$$R_{AY}=39.0 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_X=0$$

$$\Sigma F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$R_{AX}=0$$



18.

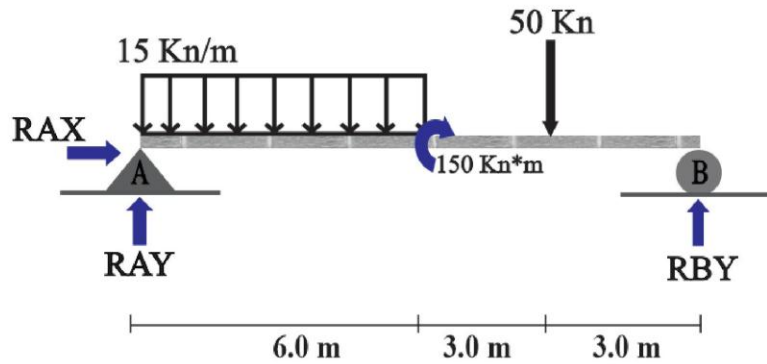
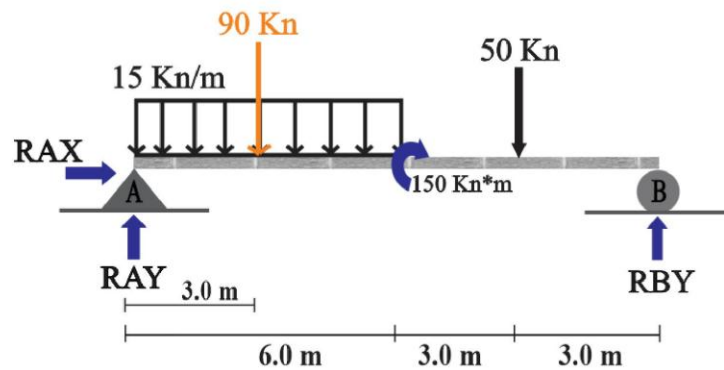


Figura 28. Ejemplo De Viga 18

Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre la carga rectangular.



## 3. Condiciones de equilibrio

$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma M_A=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-R_{BY}(12)+50(9)+150+90(3)=0$$

$$R_{BY}=72.5 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY}-90-50+R_{BY}=0$$

$$R_{AY}-90-50+72.5=0$$

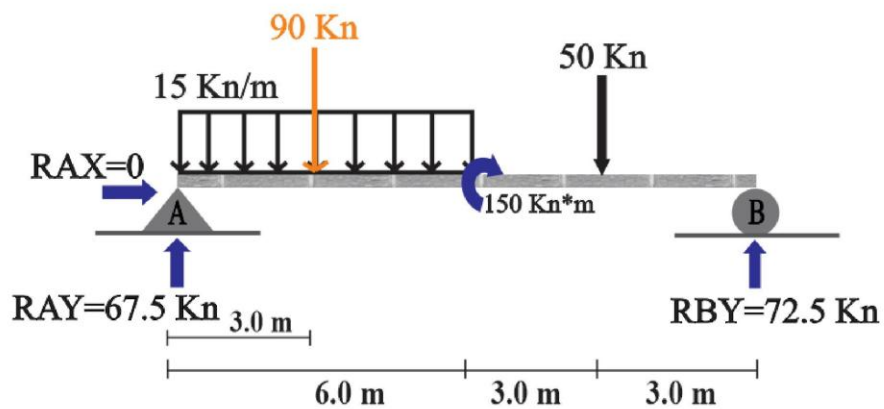
$$R_{AY}-67.5=0$$

$$R_{AY}=67.5 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_X=0$$

$$\Sigma F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$R_{AX}=0$$



19.

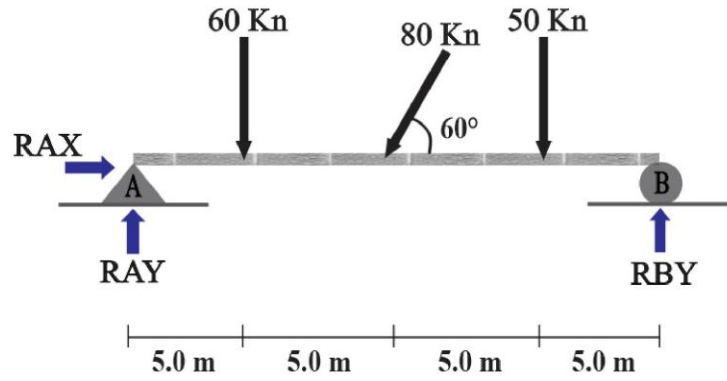
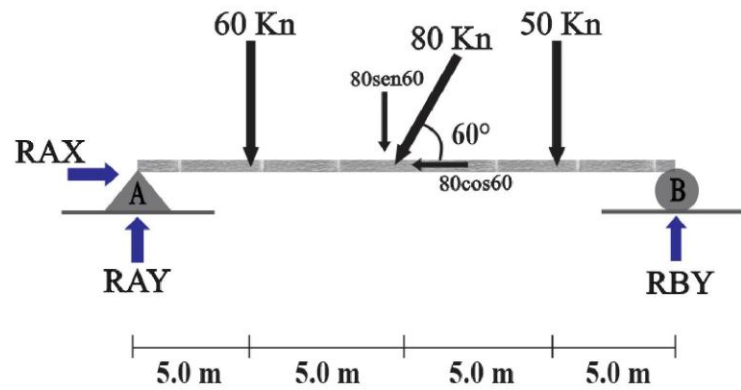


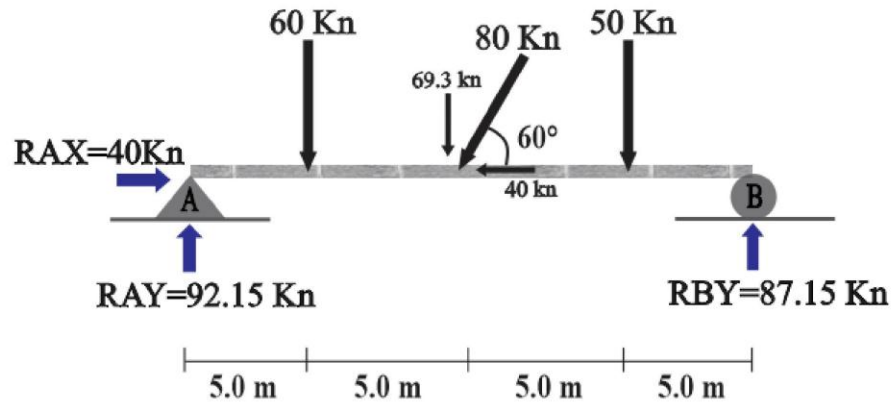
Figura 29. Ejemplo De Viga 19  
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Descomponer las cargas inclinadas en ejes X y Y.



## 3. Condiciones de equilibrio:

<p><math>\Sigma M=0</math></p> <p><math>\Sigma M_A=0 \quad \curvearrowright (+)</math></p> <p>Tomamos como punto de partida el punto A.</p> <p><math>-R_{BY}(20)+50(15)+(80\text{SEN}60)(10)+60(5)=0</math></p> <p><b><math>R_{BY}=87.15 \text{ KN}</math></b></p>	<p><math>\Sigma F_Y=0</math></p> <p>Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).</p> <p><math>\Sigma F_Y=0 \quad \uparrow (+)</math></p> <p><math>R_{AY}-60-69.28-50+87.14=0</math></p> <p><b><math>R_{AY}=92.15 \text{ KN}</math></b></p>	<p><math>\Sigma F_X=0</math></p> <p><math>\Sigma F_X=0 \quad \rightarrow (+)</math></p> <p><math>R_{AX}-40=0</math></p> <p><b><math>R_{AX}=40 \text{ KN}</math></b></p>
--	--	---



20.

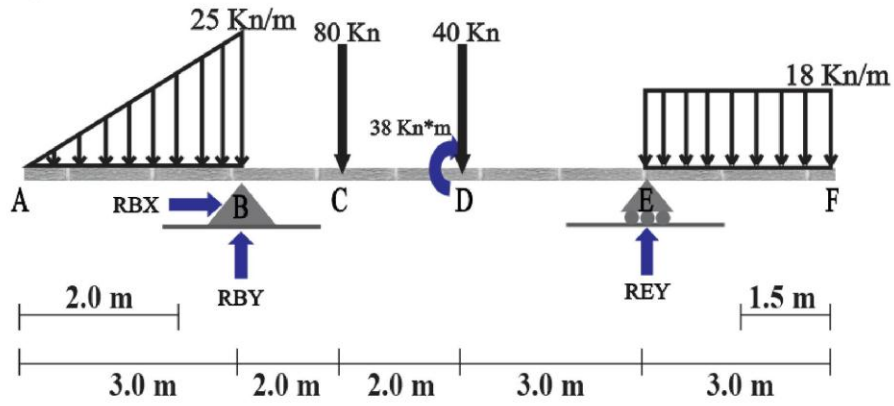
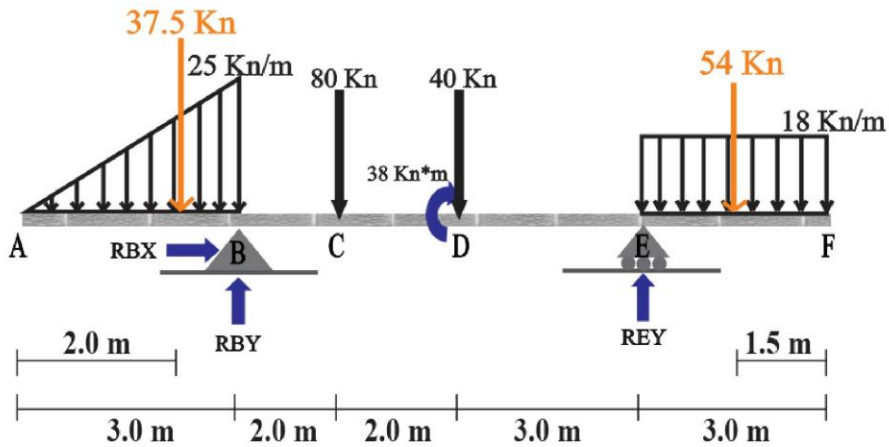


Figura 30. Ejemplo De Viga 20  
Fuente: Autor

1. Identificar reacciones en los apoyos que encontremos, en este caso consideramos un apoyo fijo y un apoyo de rodillo, generando así 3 incógnitas.
2. Definir fuerzas resultantes en base a su geometría, en este caso, sobre la carga rectangular y triangular.





## 3. Condiciones de equilibrio:

$$\sum M=0$$

$$\sum M_B=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto **B**.

$$-54(8.5)+REY(7)-40(4)-38-80(2)+37.5(1)=0$$

$$REY=111.36 \text{ KN}$$

$$\sum F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

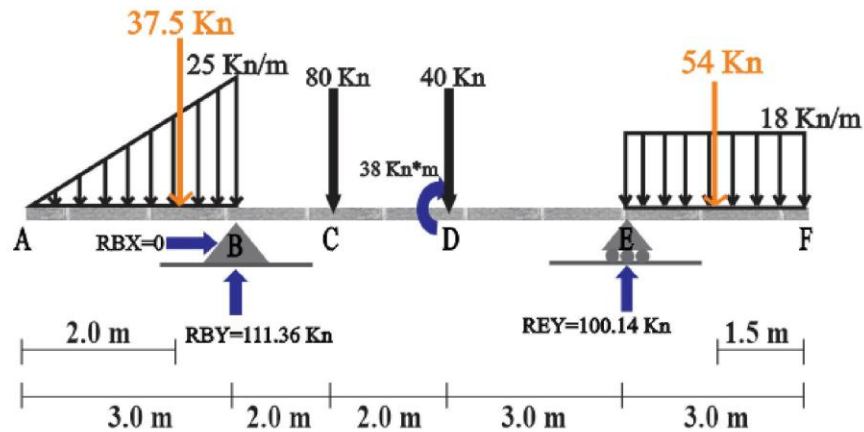
$$-37.5+111.357-80-40+REY-54=0$$

$$REY=100.14 \text{ KN}$$

$$\sum F_X=0$$

$$\sum F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$RBX=0$$



## PÓRTICOS RESUELTOS

1.

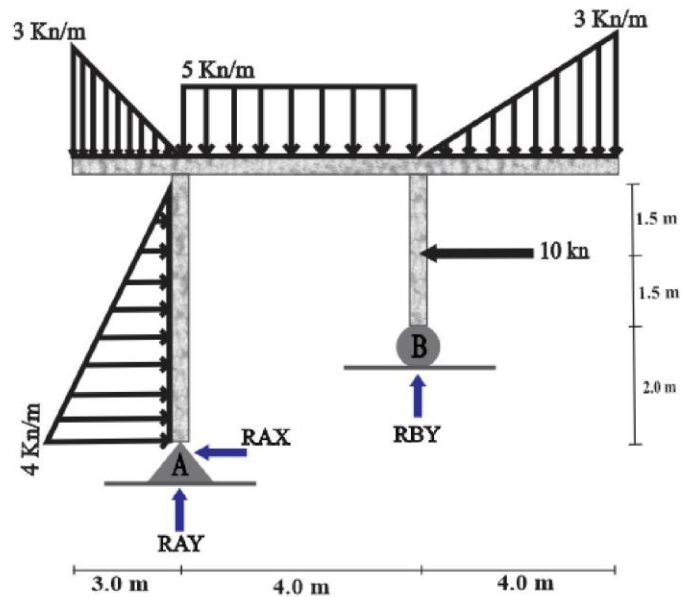
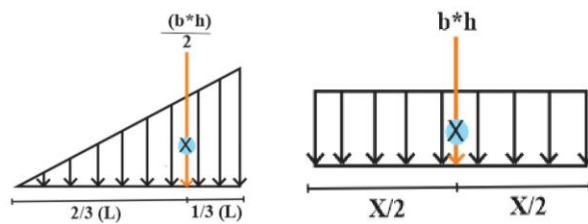


Figura 31. Ejemplo De pórtico 1

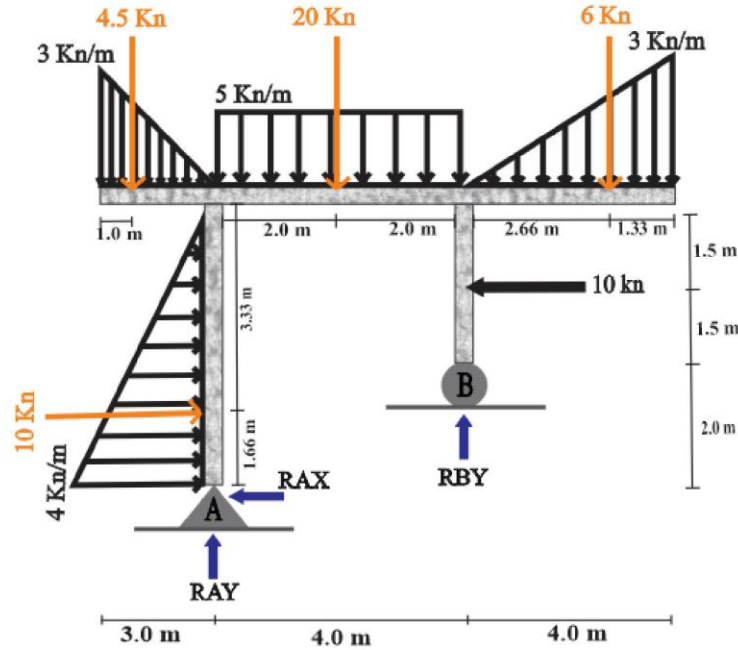
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que lo componen y las cargas que se presentan junto con su geometría.

Como podemos observar, identificamos punto A y punto B para poder caracterizarlos, En el punto A contamos con un apoyo isostático o fijo, esto nos da a entender que representa dos reacciones en la dirección X y Y ( $R_{AX}$ ,  $R_{AY}$ ). El apoyo B representa un apoyo móvil, este solo permite realizar reacciones verticales ( $R_{BY}$ ).



Una vez tenemos las operaciones realizadas para poder sacar las cargas resultantes en cada geometría, procedemos a ilustrarlas en el pórtico junto con la distribución de distancias, como se muestra a continuación:



$\Sigma M=0$

$\Sigma M_A=0$   $\curvearrowright$  (+)  
 Tomamos como punto de partida el punto A.  
 $-R_{BY}(4)-10(3.5)+6(6.66)+20(2)-4.5(2)+10(1.66)=0$   
 $R_{BY}= 13.18 \text{ KN}$

$\Sigma F_Y=0$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).  
 $\Sigma F_Y=0$   $\uparrow$  (+)  
 $R_{AY}-4.5-20-6+13.18=0$   
 $R_{AY}= 17.32 \text{ KN}$

$\Sigma F_X=0$

$\Sigma F_X=0$   $\rightarrow$  (+)  
 $-R_{AX}+10-10=0$   
 $R_{AX}= 0$

2.

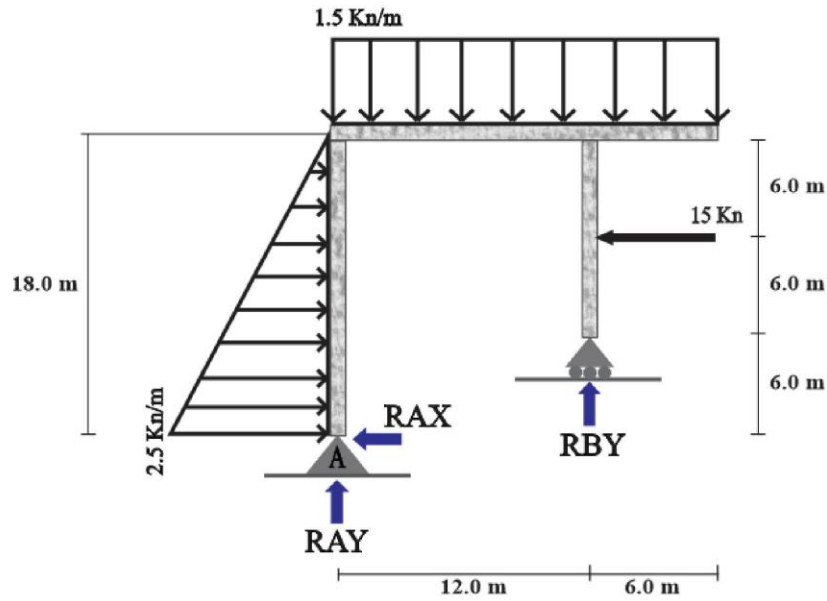
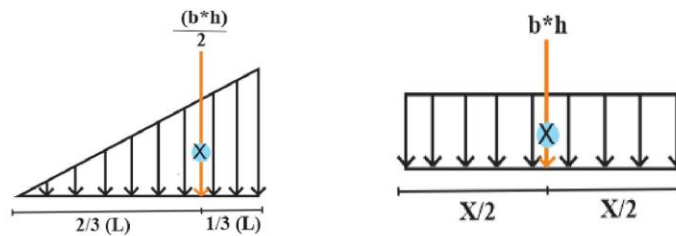


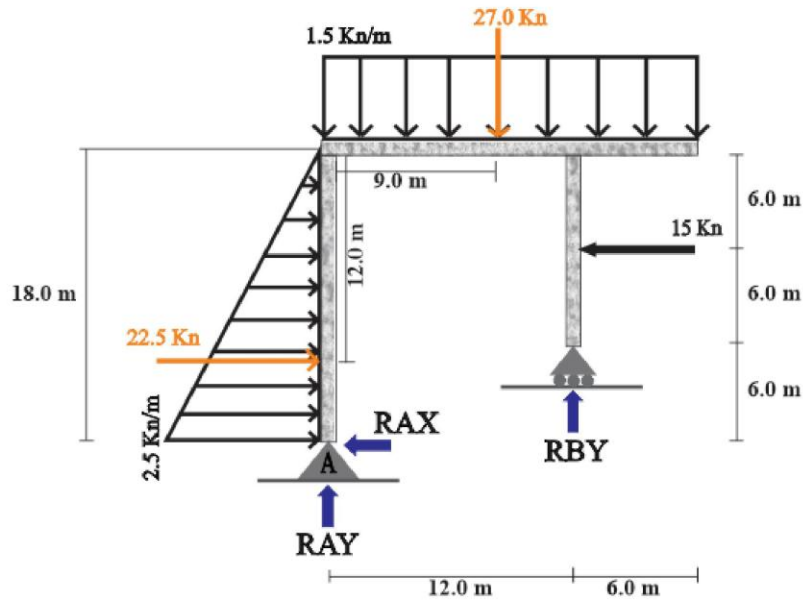
Figura 32. Ejemplo De pórtico 2  
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que lo componen y las cargas que se presentan junto con su geometría.

Como podemos observar, identificamos punto A y punto B para poder caracterizarlos, En el punto A contamos con un apoyo isostático o fijo, esto nos da a entender que representa dos reacciones en la dirección X y Y (**RAX**, **RAY**). El apoyo B representa un apoyo móvil, este solo permite realizar reacciones verticales (**RBY**).



Una vez tenemos las operaciones realizadas para poder sacar las cargas resultantes en cada geometría, procedemos a ilustrarlas en el pórtico junto con la distribución de distancias, como se muestra a continuación:



$$\sum M=0$$

$$\sum M_A=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto **A**.

$$-R_{BY}(12) - 15(12) + 27(9) + 22.5(6) = 0$$

$$R_{BY} = 16.5 \text{ KN}$$

$$\sum F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY} - 27 + 16.5 = 0$$

$$R_{AY} = 10.5 \text{ KN}$$

$$\sum F_X=0$$

$$\sum F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-R_{AX} + 22.5 - 15 = 0$$

$$R_{AX} = 7.5 \text{ KN}$$

3.

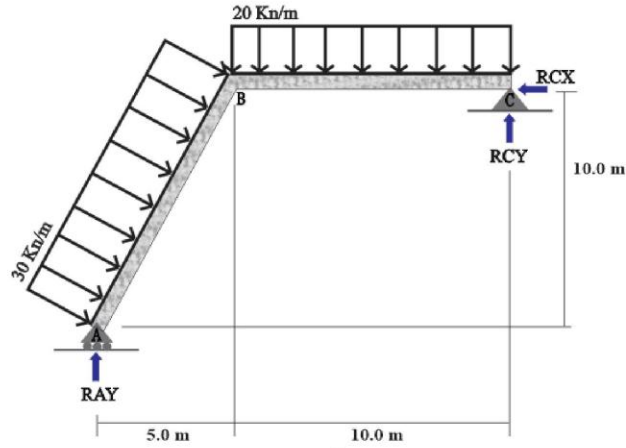
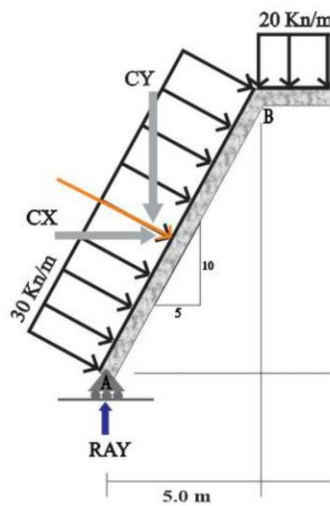


Figura 33. Ejemplo De pórtico 3  
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que lo componen y las cargas que se presentan junto con su geometría.

observamos que se obtendrá una carga puntual inclinada, así que tendremos que hallar la hipotenusa o lado más largo y tomar ese valor como base y multiplicarlo por la altura tal como lo indica la carga distribuida rectangular, luego la descomponemos para hallar reacciones en los ejes.



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 10^2}$$

$$c = 11.18 \text{ m}$$

Para puntualizar el valor de la carga, efectuamos la siguiente operación:

Área de un rectángulo:

$$B \cdot h = 11.18 \text{ m} \cdot 30 \text{ kn/m}$$

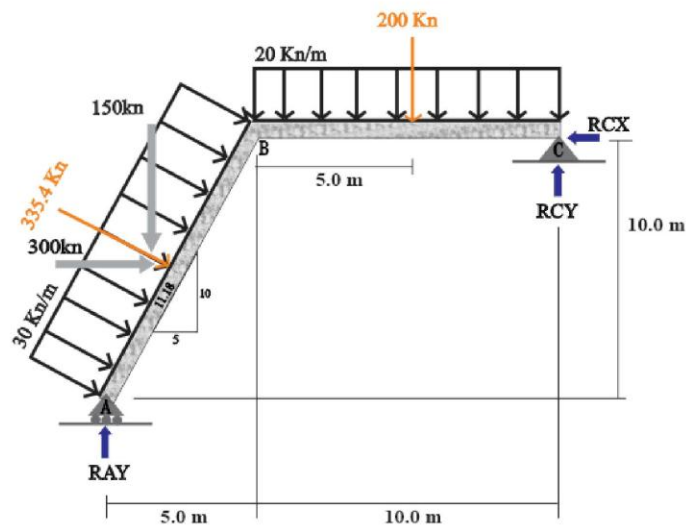
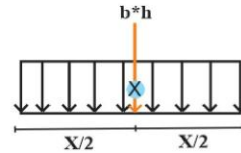
$$= 335.4 \text{ kn}$$

Ahora podemos obtener los componentes en X y Y. El 335.4 representa la carga inclinada y tomamos los valores representados en cada eje.

$$X = 335.4 \left( \frac{10}{11.18} \right) = 300 \text{ kn}$$

$$Y = 335.4 \left( \frac{5}{11.18} \right) = 150 \text{ kn}$$

Luego hallamos las reacciones ya que tenemos todas las cargas resueltas según geometría de distribución.



$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma MC=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto C.

$$-RAY(15)+300(5)+150(12.5)+200(5)=0$$

$$RAY= 291.67 \text{ KN}$$

$$\Sigma FY=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$291.67-150-200+RCY= 0$$

$$RCY= 58.33 \text{ KN}$$

$$\Sigma FX=0$$

$$\Sigma FX=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-RCX+300=0$$

$$RCX= 300 \text{ KN}$$

4.

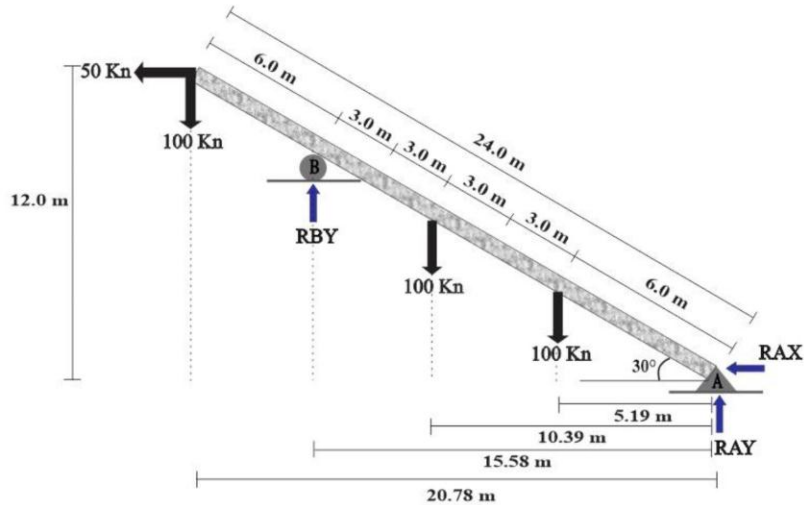


Figura 34. Ejemplo De pórtico 4  
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que lo componen y las cargas que se presentan junto con su geometría.

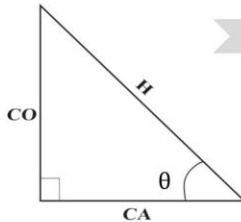
Observamos que la estructura se encuentra inclinada con un ángulo determinado, así que tendremos que hallar los catetos de este triángulo rectángulo que se forma, para así obtener distancias perpendiculares y hallar reacciones en los ejes.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:

$$\text{SEN}\theta = \frac{\text{CO}}{\text{H}}$$

$$\text{COS}\theta = \frac{\text{CA}}{\text{H}}$$

$$\text{TAN}\theta = \frac{\text{CO}}{\text{CA}}$$



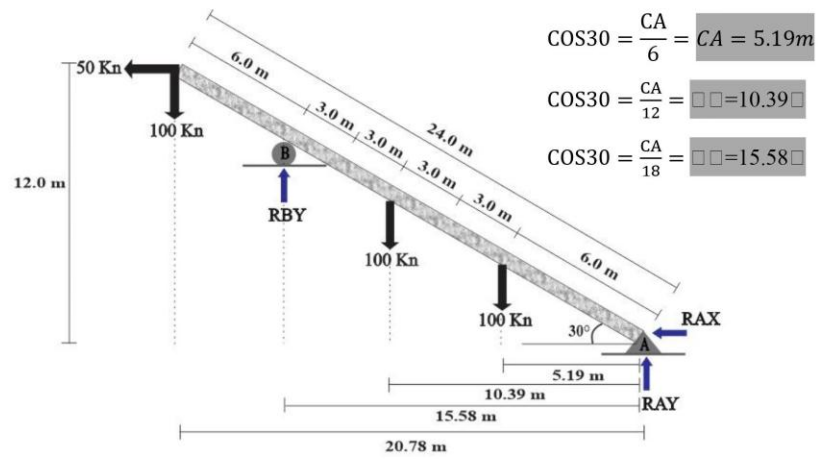
Basándonos en estas pautas, podremos despejar las incógnitas de CO y CA

$$\text{SEN}30 = \frac{\text{CO}}{24} = \text{CO} = 12\text{m}$$

$$\text{COS}30 = \frac{\text{CA}}{24} = \text{CA} = 20.78\text{m}$$

Una vez tenemos estos valores los reemplazamos en la estructura y procedemos a hallar estos mismos catetos según corresponda en las distancias que necesitemos.





$\Sigma M=0$

$\Sigma F_Y=0$

$\Sigma F_X=0$

$$\sum MA=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$50(12)+100(20.78)-RBY(15.58)+100(10.39)+100(5.19)=0$$

$$RBY= 271.8 \text{ KN}$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\sum FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-100+271.8-100-100+RAY= 0$$

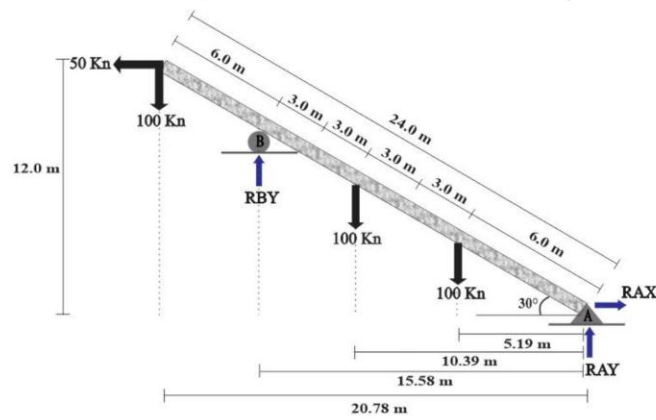
$$RAY= 28.2 \text{ KN}$$

$$\sum FX=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-RAX-50=0$$

$$RAX= 50 \text{ KN}$$

Entonces cambiamos el sentido asumido en la estructura y queda así:



5.

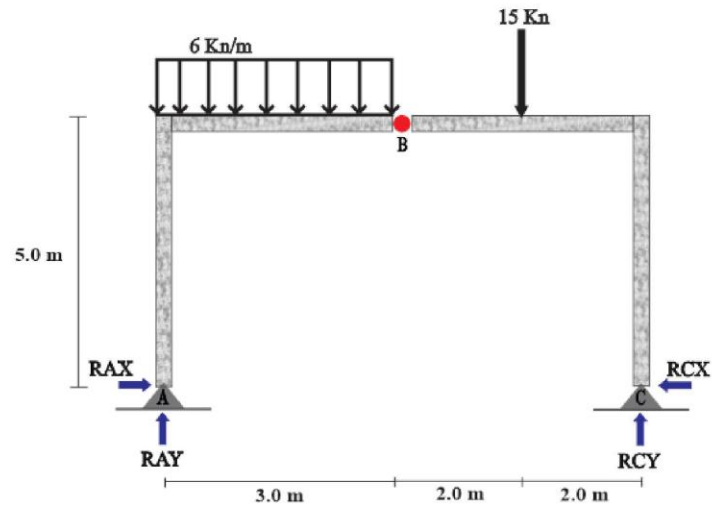
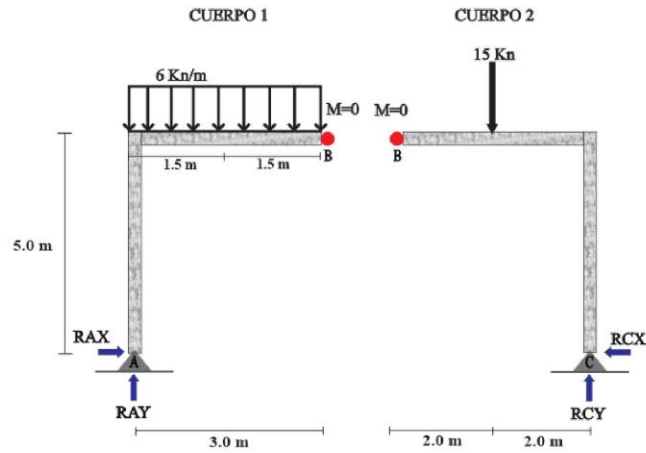


Figura 35. Ejemplo De pórtico 5

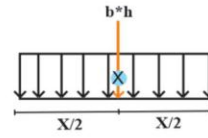
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría una articulación presente en el ejercicio, por lo tanto, la resolución de esta estructura será de la siguiente forma:

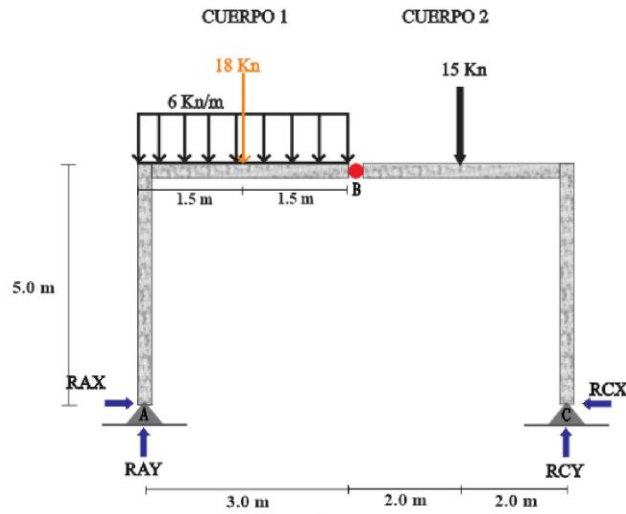
Una articulación o rótula permite la unión y continuidad en dos o más cuerpos presentes en una estructura, partiendo de ahí podemos interpretar una división en la estructura antes y después de esta articulación, dando como resultado:



Puntualizamos la carga distribuida del rectángulo:



Debemos encontrar las incógnitas, RAY, RAX, RBY y RBX, esto se logrará con las ecuaciones de cuerpo rígido.



$$\sum M = 0$$

$$\sum MC = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto C.

$$-RAY(7) + 18(5.5) + 15(2) = 0$$

$$RAY = 129/7$$

$$RAY = 18.43 \text{ KN}$$

$$\sum FX = 0$$

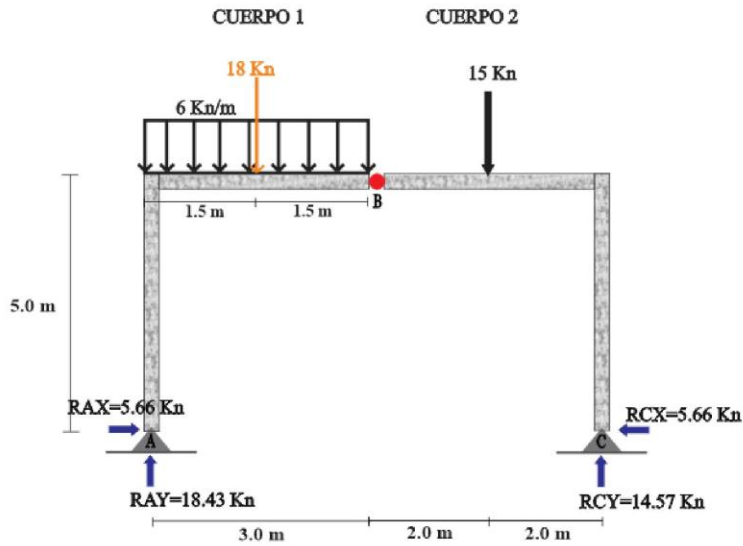
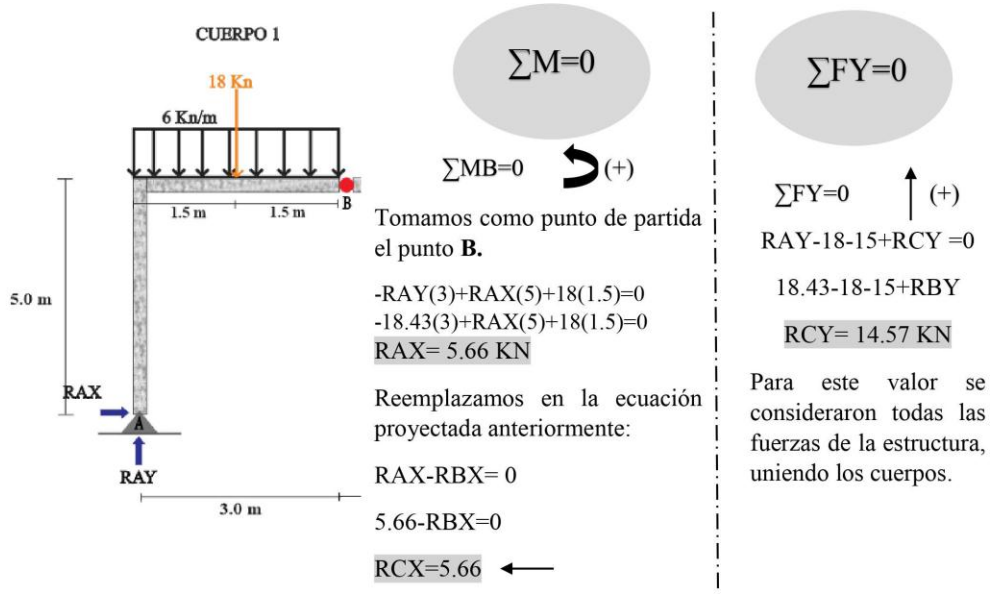
$$\sum FX = 0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-RAX - RCX = 0$$

Dejamos la ecuación proyectada para cuando tengamos RBX

Para las incógnitas que nos faltan, vamos a tomar un cuerpo, en este caso, el cuerpo 1 y hallaremos las incógnitas restantes con las ecuaciones de equilibrio

Tomaremos un cuerpo de la estructura y le hallaremos las reacciones que faltan tomando en cuenta las cargas y su respectiva geometría, de la siguiente forma:



6.

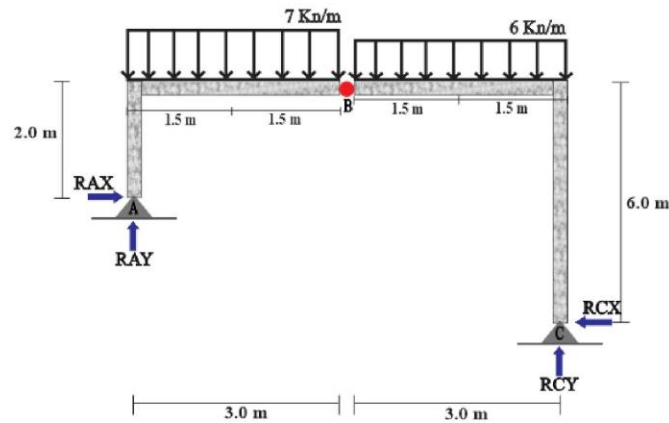
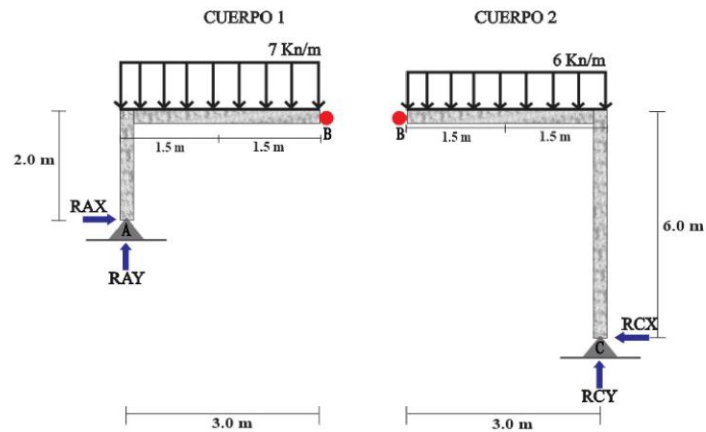


Figura 36. Ejemplo De pórtico 6

Fuente: Autor

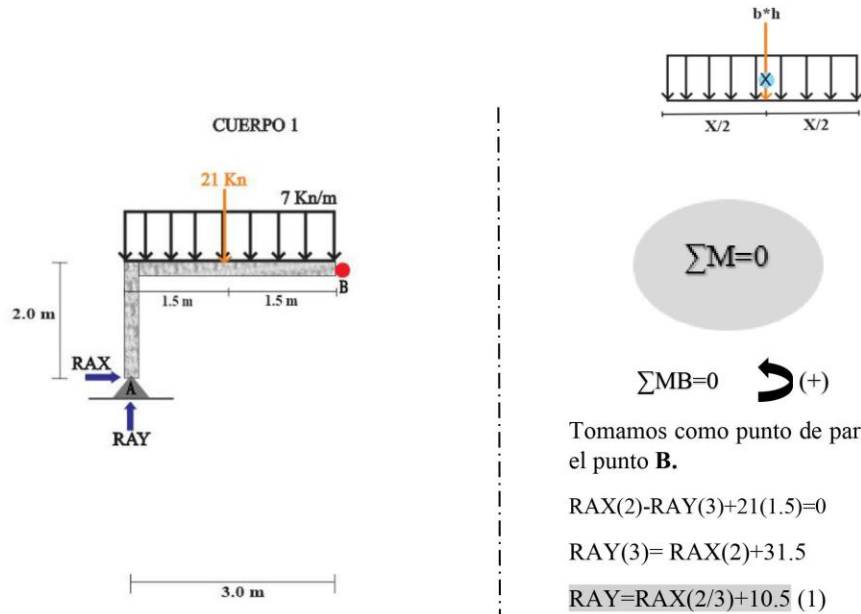
Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría una articulación presente en el ejercicio, por lo tanto, la resolución de esta estructura será de la siguiente forma:

Una articulación o rótula permite la unión y continuidad en dos o más cuerpos presentes en una estructura, partiendo de ahí debemos dividir la estructura antes y después de esta articulación, dando como resultado:

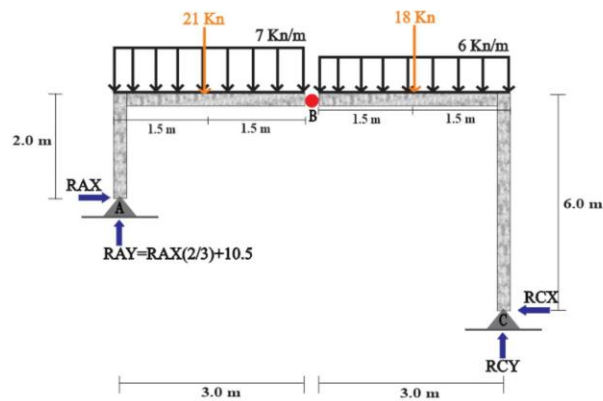


Tomaremos cada cuerpo de estructura y le hallaremos reacciones tomando en cuenta las cargas y su respectiva geometría, de la siguiente forma:

Puntualizamos la carga distribuida del rectángulo:



Unimos los cuerpos y encontramos las otras 3 incógnitas, RAX, RCX, RCY, esto se logrará con las ecuaciones de cuerpo rígido.



$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma MC=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto C.

$$18(1.5)+21(4.5)-RAX(4)-$$

$$(RAX(2/3)+10.5)(6)=0$$

$$RAX= 7.31 \text{ KN}$$

Reemplazando RAX en ecuación (1), obtendremos RAY:

$$RAY=RAX(2/3)+10.5 \quad (1)$$

$$RAY= 7.31(2/3)+10.5$$

$$RAY=15.37 \text{ KN}$$

$$\Sigma FY=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$RAY-21-18+RCY=0$$

$$15.37-21-18+RCY=0$$

$$-23.63+RCY=0$$

$$RCY= 26.63 \text{ KN}$$

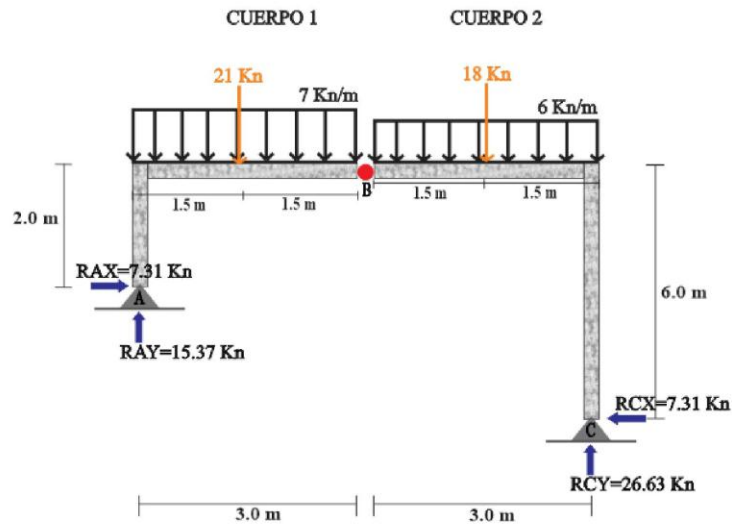
$$\Sigma FX=0$$

$$\Sigma FX=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$RAX-RCX=0$$

$$7.31-RCX=0$$

$$RCX= 7.31 \text{ KN}$$





7.

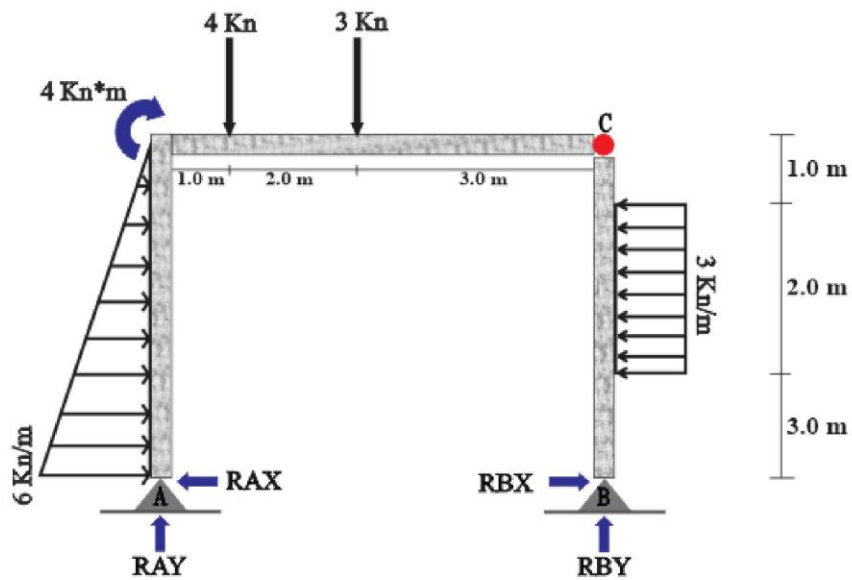
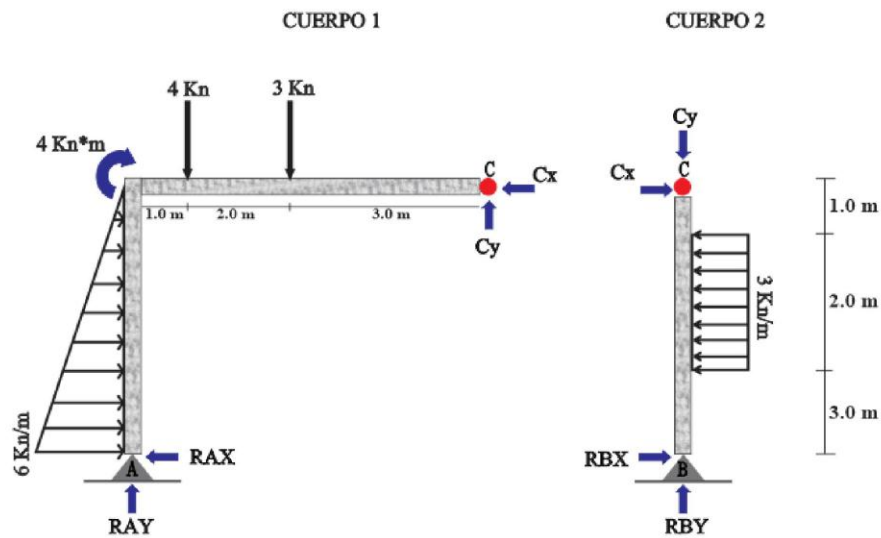


Figura 37. Ejemplo De pórtico 7

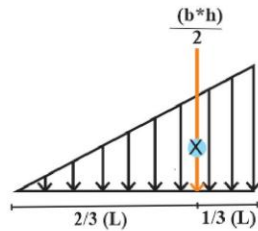
Fuente: Autor

Teniendo este ejemplo de pórtico, en primer lugar, se identifican los apoyos que la componen y las cargas que se presentan junto con su geometría una articulación presente en el ejercicio, en base a esto, observamos dos apoyos fijos que reflejan reacciones en dirección X y Y, vemos que la cantidad de incógnitas supera la cantidad de ecuaciones para cuerpos rígidos y puede crear confusión, pero se debe considerar la rótula o articulación en el punto C ya que este nos permitirá realizar un análisis por partes para lograr resultados en los apoyos fijos.

Una articulación o rótula permite la unión y continuidad en dos o más cuerpos presentes en una estructura, partiendo de ahí debemos dividir la estructura antes y después de esta articulación, dando como resultado:



Tomaremos cada cuerpo de estructura y le hallaremos reacciones tomando en cuenta las cargas y su respectiva geometría, de la siguiente forma:

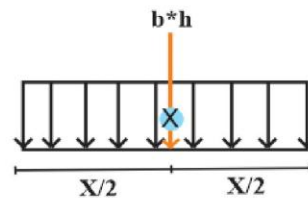


Dependiendo de la dirección en la que estemos tomando los momentos, se utilizará la distancia que se requiera.

$L$  = Distancia base del triángulo

$$\frac{2}{3}(L) = \frac{2}{3}(6\text{m}) = 4.0\text{m}$$

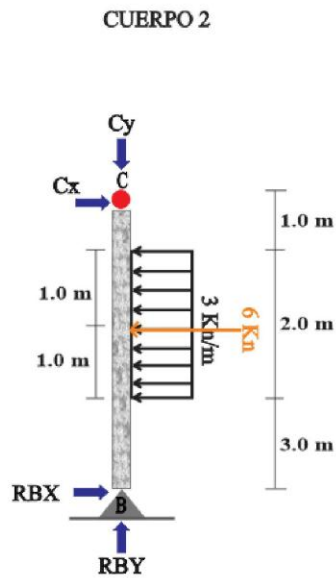
$$\frac{1}{3}(L) = \frac{1}{3}(6\text{m}) = 2.0\text{m}$$



$X$  = Distancia base del rectángulo

$$\frac{X}{2} = \frac{6}{2} = 3.0\text{m}$$

En los dos cuerpos podemos observar 4 ecuaciones, sin embargo, podemos hallar momento en B y de esta forma, se obvian las reacciones en el mismo punto (BX, BY) y la reacción Cy también ya que atraviesa el eje. Por lo tanto, tenemos que:



$$\sum M=0$$

$$\sum M_B=0 \quad \curvearrowright (+)$$

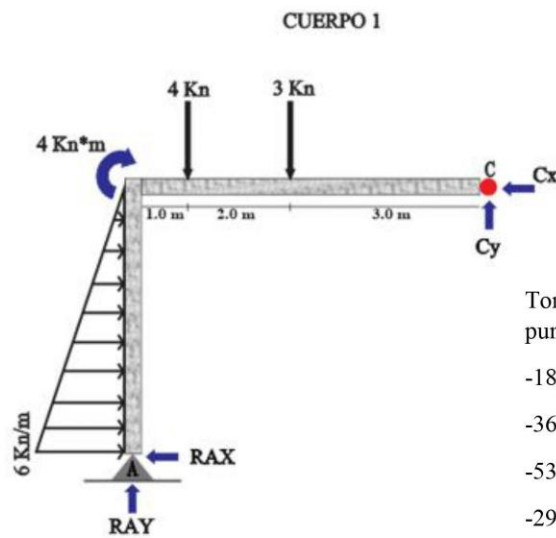
Tomamos como punto de partida el punto B.

$$-C_x(6)+6(4)=0$$

$$-C_x(6)=24$$

$$C_x = 4 \text{ Kn}$$

Continuamos con el cuerpo 1 para poder hallar sumatoria de momento en el cuerpo 1.



$$\sum M=0$$

$$\sum M_A=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-18(2)-4-4(1)-3(3)+C_x(6)+C_y(6)=0$$

$$-36-4-4-9+4(6)+C_y(6)=0$$

$$-53+24+C_y(6)=0$$

$$-29+C_y(6)=0$$

$$C_y = 4.83 \text{ Kn}$$

$$\sum F_Y = 0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

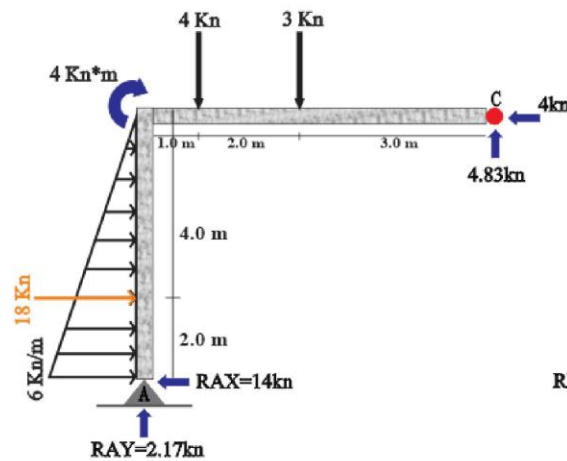
En el cuerpo 1:

$$\begin{aligned} \sum F_Y = 0 & \quad \uparrow (+) \\ R_{AY} + C_y - 4 - 3 &= 0 \\ R_{AY} + 4.83 - 4 - 3 &= 0 \\ \mathbf{R_{AY} = 2.17 \text{ KN}} \end{aligned}$$

En el cuerpo 2:

$$\begin{aligned} \sum F_Y = 0 & \quad \uparrow (+) \\ R_{BY} - C_y &= 0 \\ R_{BY} - 4.83 &= 0 \\ \mathbf{R_{BY} = 4.83 \text{ KN}} \end{aligned}$$

CUERPO 1



$$\sum F_X = 0$$

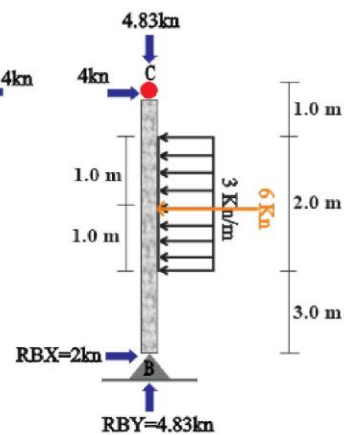
En el cuerpo 1:

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & \quad \leftarrow (+) \\ R_{AX} + C_x - 18 &= 0 \\ R_{AX} + 4 - 18 &= 0 \\ \mathbf{R_{AX} = 14 \text{ KN}} \end{aligned}$$

En el cuerpo 2:

$$\begin{aligned} \sum F_X = 0 & \quad \leftarrow (+) \\ -R_{BX} - C_x + 6 &= 0 \\ -R_{BX} - 4 + 6 &= 0 \\ \mathbf{R_{BX} = 2 \text{ KN}} & \quad \rightarrow \end{aligned}$$

CUERPO 2



8.

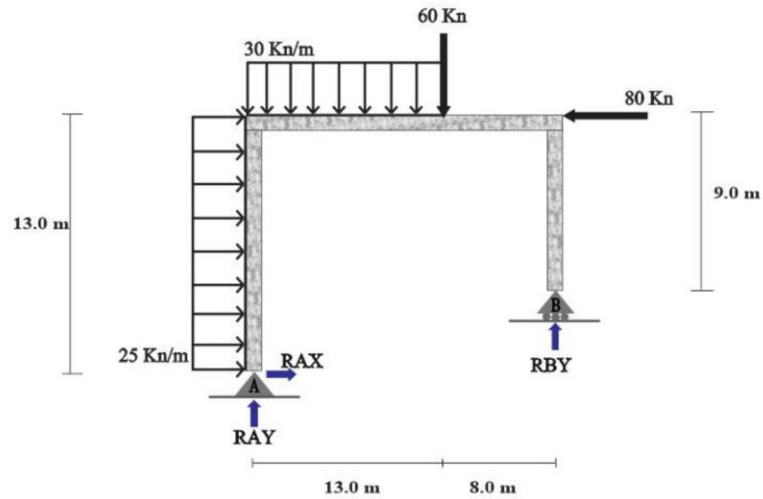
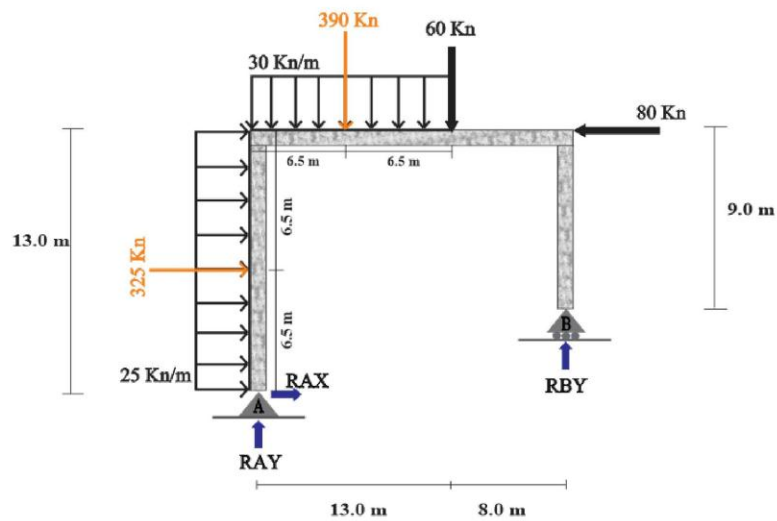


Figura 38. Ejemplo De pórtico 8  
Fuente: Autor

En base a la resolución de los pórticos anteriores, se contemplarán los mismos conceptos y métodos de resolución, por lo tanto, tendremos que:



$$\Sigma M=0$$

$$\Sigma M_A=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-325(6.5)-390(6.5)-60(13)+80(13)+R_{BY}(21)=0$$

$$-2112.5-2535-780+1040+R_{BY}(21)=0$$

$$R_{BY}= 208.93 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_Y=0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\Sigma F_Y=0 \quad \uparrow (+)$$

$$R_{AY}-390-60+R_{BY}=0$$

$$R_{AY}-390-60+208.93=0$$

$$R_{AY}= 241.07 \text{ KN}$$

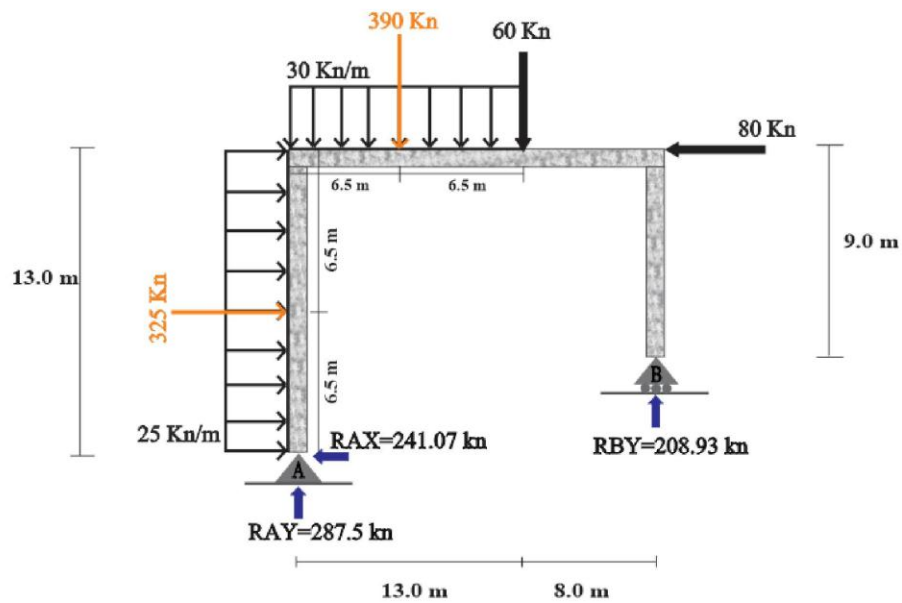
$$\Sigma F_X=0$$

$$\Sigma F_X=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$R_{AX}+325-80=0$$

$$R_{AX}+245=0$$

$$R_{AX}= 245 \text{ KN}$$



9.

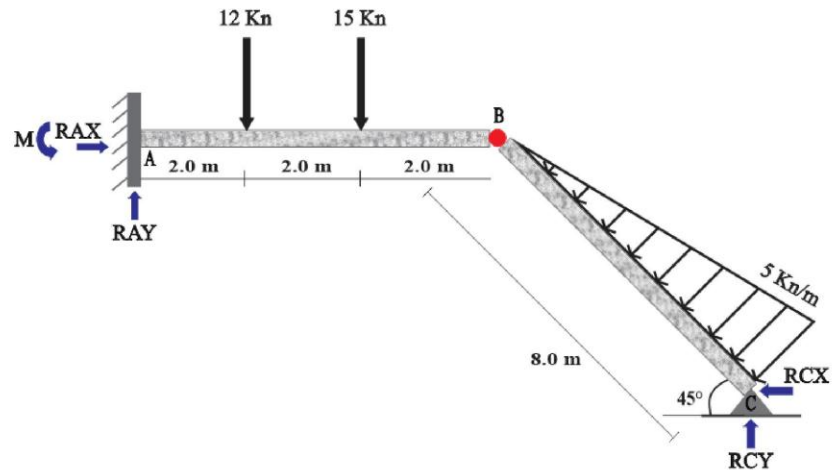
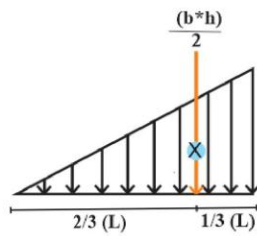


Figura 39. Ejemplo De pórtico 9  
Fuente: Autor

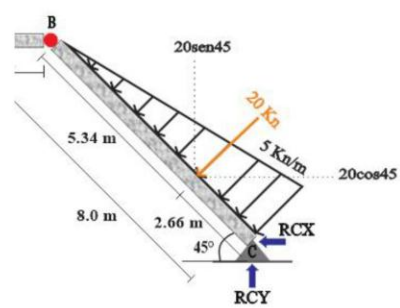


Dependiendo de la dirección en la que estemos tomando los momentos, se utilizará la distancia que se requiera.

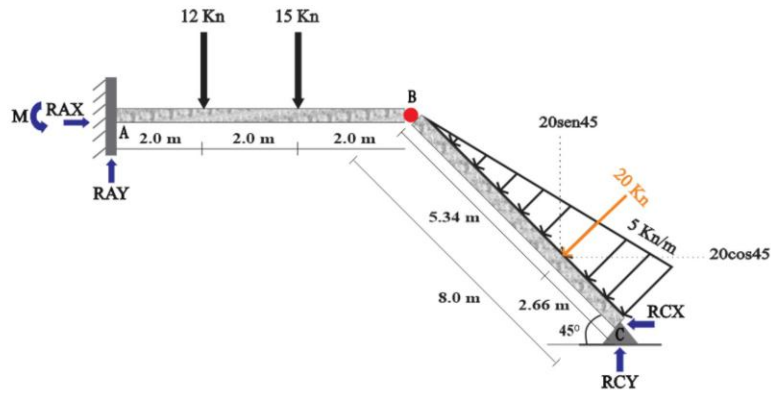
$L =$  Distancia base del triángulo

$$\frac{2}{3} (L) = \frac{2}{3} (8\text{m}) = 5.33\text{m}$$

$$\frac{1}{3} (L) = \frac{1}{3} (8\text{m}) = 2.66\text{m}$$



Colocamos los componentes en X y Y junto a las funciones trigonométricas



Separamos los cuerpos a fin de hallar las incógnitas de las reacciones con las ecuaciones de equilibrio.

$\sum M=0$

$R1=6.67 \text{ Kn}$   
 $Rix= 6.67\cos45=4.72 \text{ Kn}$   
 $Riy=6.67\text{sen}45=4.72 \text{ Kn}$

$\sum MC=0$  ↻ (+)

Tomamos como punto de partida el punto C.

 $20(2.66)+R1(8)=0$   
 $-53.2+R1(8)=0$   
 $R1=6.67$  resultante en la rótula

$\sum FY=0$

$\sum FY=0$  ↑ (+)

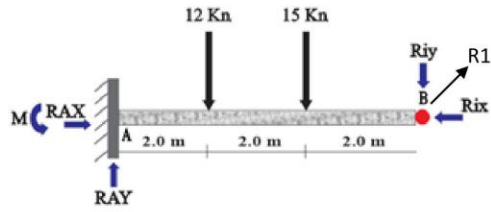
 $Riy-(20\text{sen}45)+RCY=0$   
 $4.72-(20\text{sen}45)+RCY=0$   
 $RCY=9.38 \text{ KN}$

$\sum FX=0$

$\sum FX=0$  → (+)

 $Rix-14.1+RCX=0$   
 $4.72-14.1+RCX=0$   
 $RCX=9.38 \text{ KN}$  →





$$\sum M=0$$

$$\sum MA=0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$-4.72(6)-15(4)-12(2)+MA=0$$

$$-112.32+MA=0$$

$$MA=112.32 \text{ Kn}\cdot\text{m}$$

$$\sum FY=0$$

$$\sum FY=0 \quad \uparrow (+)$$

$$RAY-12-15-4.72=0$$

$$RAY-31.72=0$$

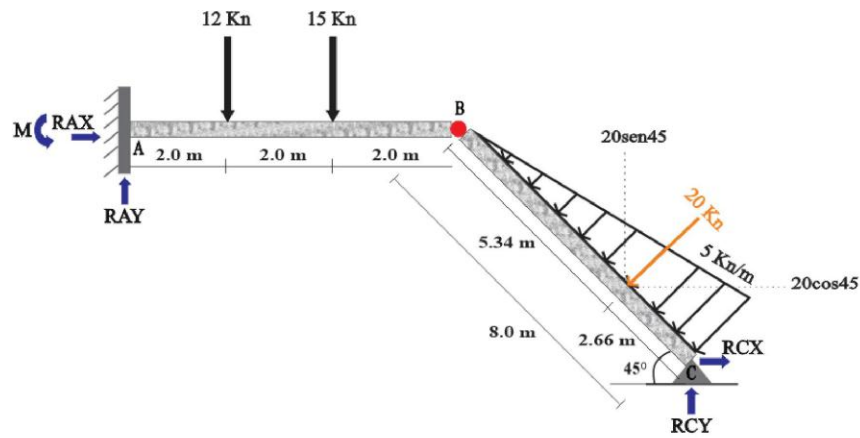
$$RAY=31.72 \text{ KN}$$

$$\sum FX=0$$

$$\sum FX=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$RAX-4.72=0$$

$$RAX=4.72 \text{ KN}$$



10.

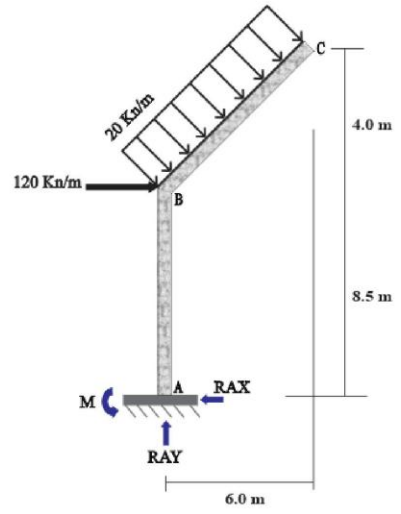
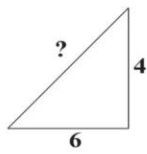


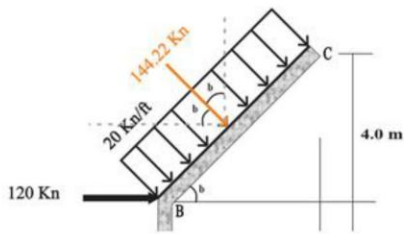
Figura 40. Ejemplo De pórtico 10  
Fuente: Autor



Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras:

$$C^2 = \sqrt{4^2 + 6^2}$$

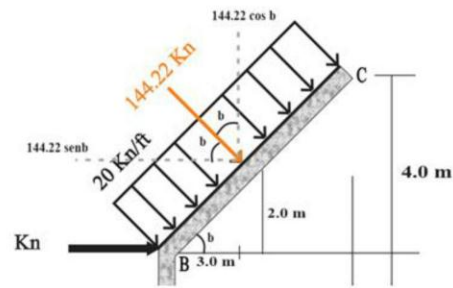
$$C = 7.211m$$



Para descomponer, hallaremos el ángulo **b** por trigonometría:

$$\tan^{-1} = \frac{4}{6}$$

$$b = 33.69^\circ$$



$$\sum F_Y = 0$$

Debemos tomar una dirección referente como positiva, en este caso, apuntando hacia arriba (+).

$$\begin{aligned} \sum F_Y = 0 \quad \uparrow (+) \\ RAY - (144.22 \cos 33.69) = 0 \\ RAY - (119.99) = 0 \\ \mathbf{RAY = 120.0 \text{ KN}} \end{aligned}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$\sum F_X = 0 \quad \rightarrow (+)$$

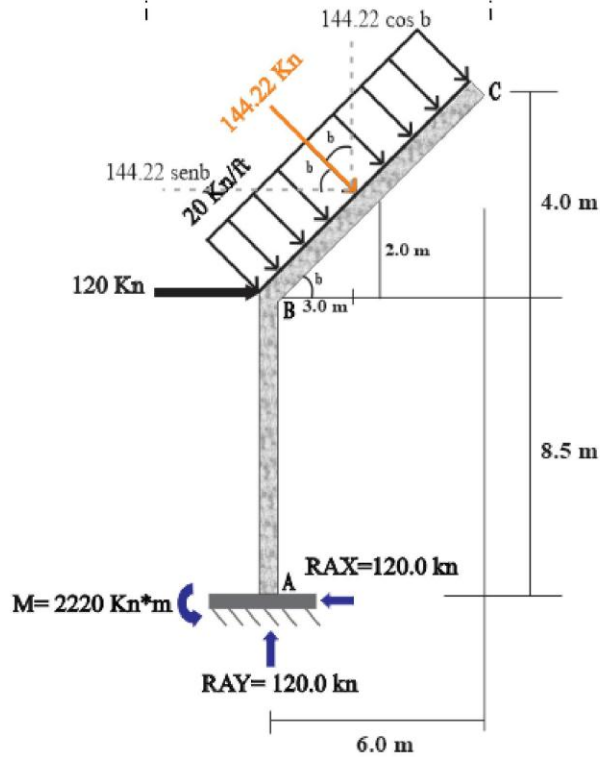
$$\begin{aligned} -RAX + 120 + (144.22 \text{ SEN } 33.69) = 0 \\ -RAX + 120 + (79.998) = 0 \\ -RAX + 199.998 = 0 \\ \mathbf{RAX = 120.0 \text{ KN}} \end{aligned}$$

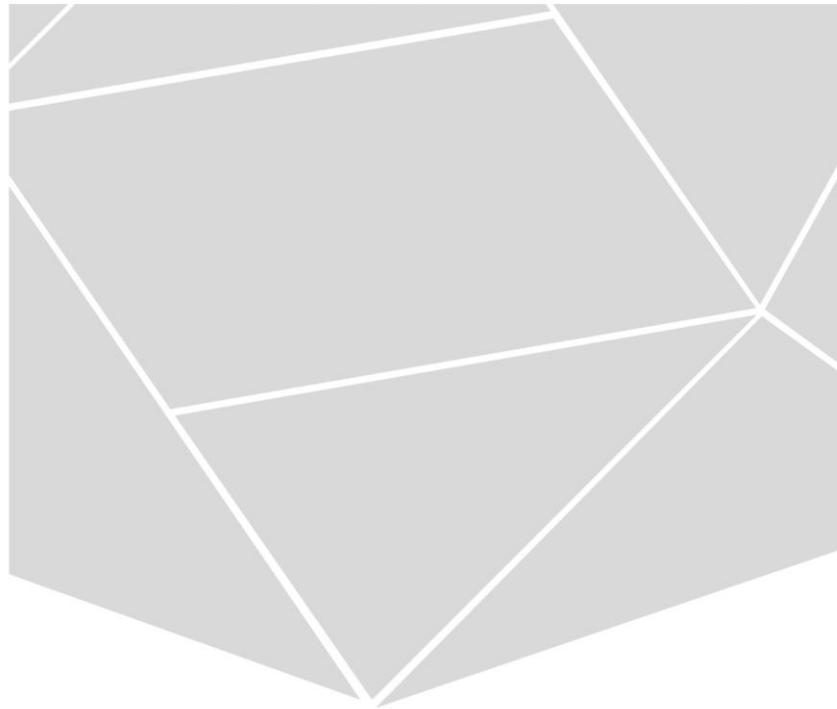
$$\sum M = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

Tomamos como punto de partida el punto A.

$$\begin{aligned} -144.22 \cos b(3) - 144.22 \text{ SEN } b(10.5) - 120(8.5) + M_A = 0 \\ -2219.98 + M_A = 0 \\ \mathbf{M_A = 2220 \text{ Kn}^*\text{m}} \end{aligned}$$





# **FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR**

**VIGAS Y PÓRTICOS**

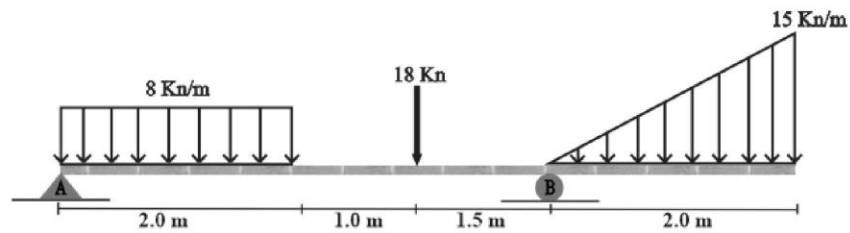
UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA  
SANTANDER

# FUERZA CORTANTE Y momento

## Vigas y pórticos

### VIGAS RESUELTAS

1.

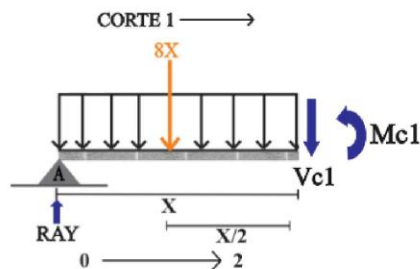


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{AY} = 14.0 \text{ Kn}$$

$$R_{BY} = 35.0 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 0$$



$$W = 8X$$

$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

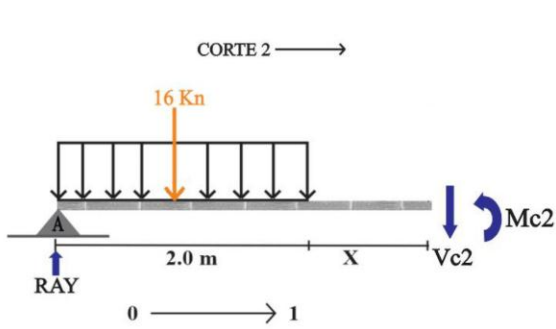
$$-14(X) + 8X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -4X^2 - 14X \quad (0;2)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$14 - 8X - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -8X + 14 \quad (0;2)$$



$$\sum Mc2=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14(2+X)+16(1+X)+Mc2=0$$

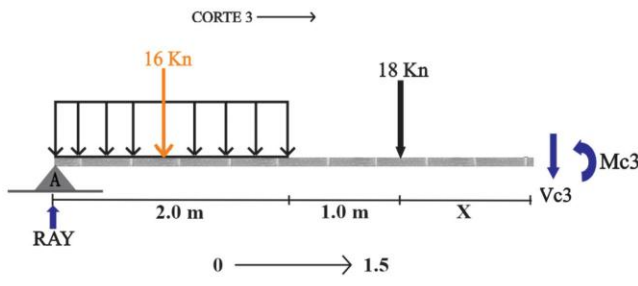
$$-28-14X+16+16X+Mc2$$

$$Mc2 = -2X + 12 \quad (0;1)$$
  

$$\sum Vc2=0 \quad \uparrow (+)$$

$$14-16-Vc2=0$$

$$Vc2 = -2 \quad (0;1)$$



$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14(3+X)+16(2+X)+18+Mc3=0$$

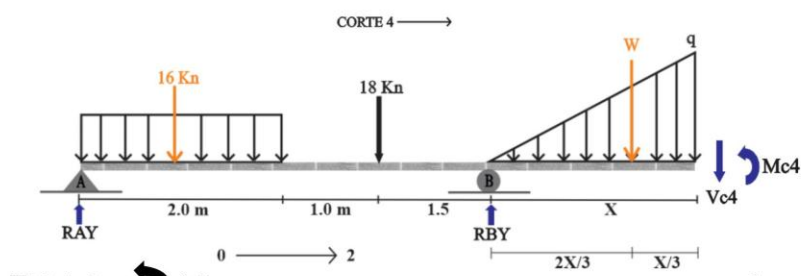
$$-42+14X+32+16X+18+Mc3=0$$

$$Mc3 = -20X + 10 \quad (0;1.5)$$
  

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$14-16-18-Vc3=0$$

$$Vc3 = -20 \quad (0;1.5)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14(4.5+X) + 16(3.5+X) + 18(1.5) - 35(X) + \frac{15}{4}(X^2) + \left(\frac{X}{3}\right) + Mc4 = 0$$

$$-63 - 14X + 56 + 16X + 27 + 18X - 35X + \frac{15}{4}(X^2) + Mc4 = 0$$

$$Mc4 = -\frac{5}{4}(X^3) + 15X - 20 = 0 \quad (0;2)$$
  

$$\sum Vc4=0 \quad \uparrow (+)$$

$$14-16-18+35-\frac{15}{4}X^2+Vc4=0$$

$$Vc4 = -\frac{15}{4}X^2 + 15 \quad (0;2)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:

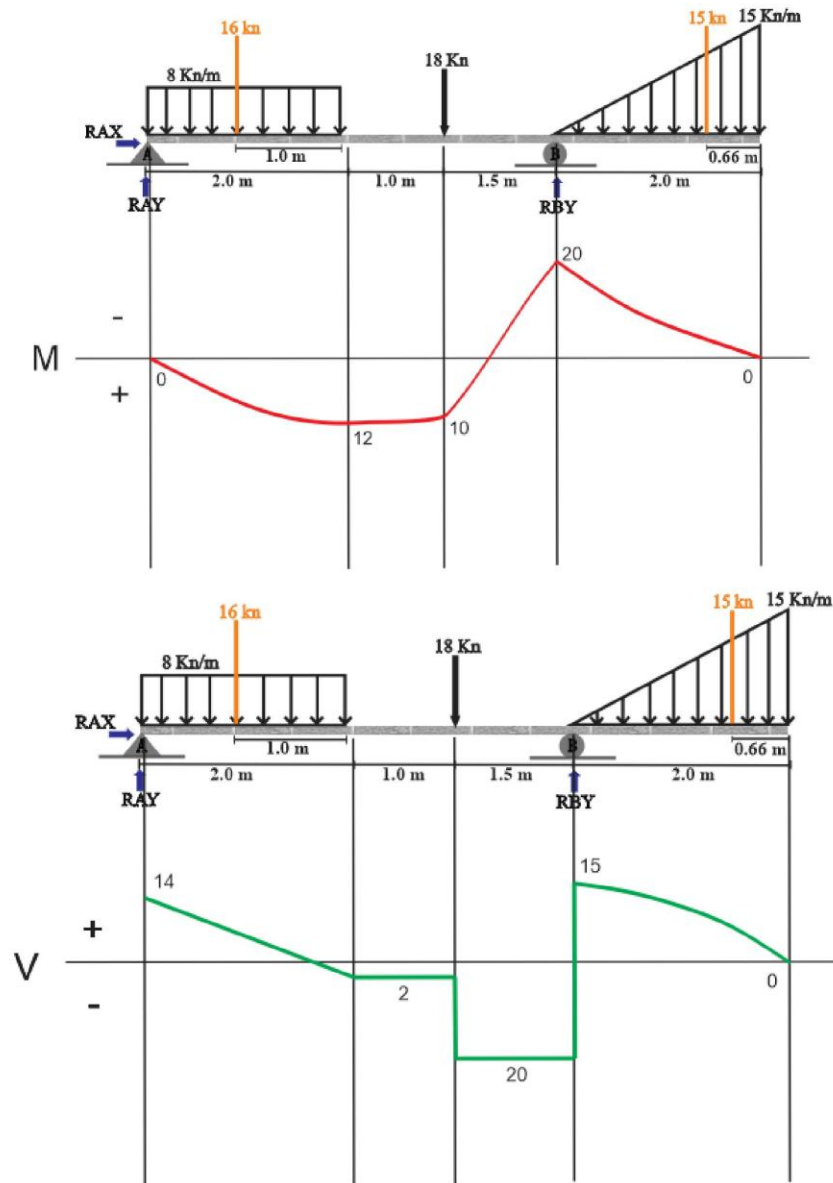
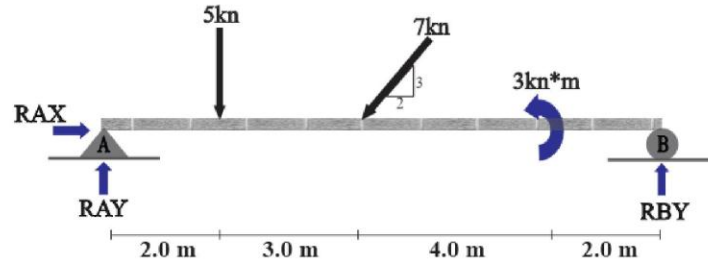


Figura 41. Diagrama de Fuerza cortante y momento flector viga 1

2.

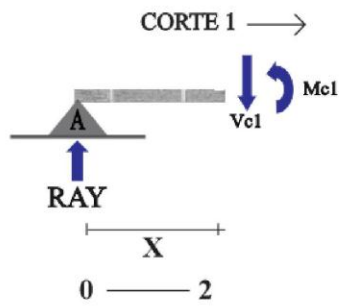


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 7.5 \text{ Kn}$

$R_{BY} = 3.3 \text{ Kn}$

$R_{AX} = 3.9 \text{ Kn}$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

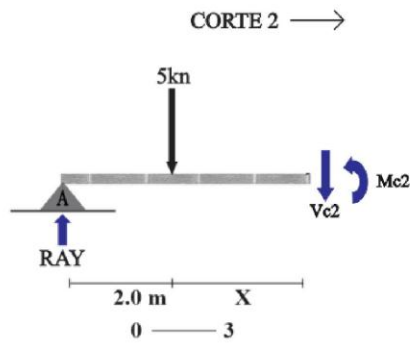
$$-7.5(X) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = 7.5X \quad (0;2)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$7.5 - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = 7.5 \quad (0;2)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-7.5(2+X) + 5(X) + M_{c2} = 0$$

$$-15 - 7.5X + 5X + M_{c2} = 0$$

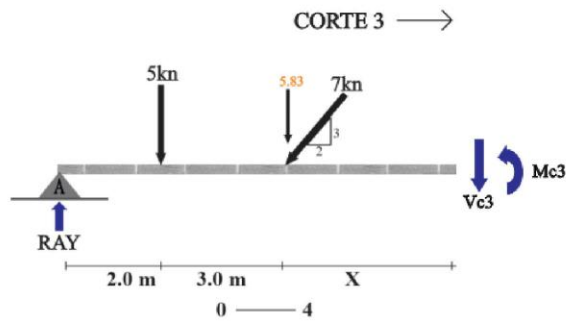
$$M_{c2} = -2.5X + 15 \quad (0;3)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$7.5 - 5 - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = 2.5 \quad (0;3)$$





$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-7.5(5+X)+5(3+X)+5.8(X)+Mc3=0$$

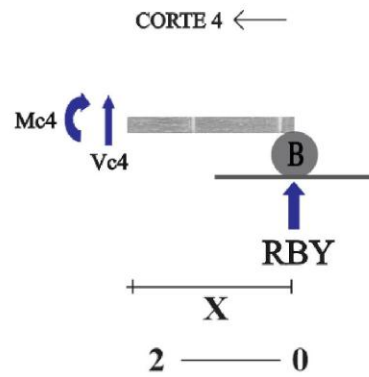
$$-37.5-7.5X+15+5X+5.8X+Mc3=0$$

$$Mc3 = -3.3X + 22.5 \quad (0;4)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$7.5-5-5.8-Vc3=0$$

$$Vc3 = -3.3 \quad (0;4)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-3.3(X)+Mc4=0$$

$$Mc4 = 3.3X \quad (2;0)$$

$$\sum Vc4=0 \quad \uparrow (+)$$

$$3.3+Vc4=0$$

$$Vc4 = -3.3 \quad (2;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:

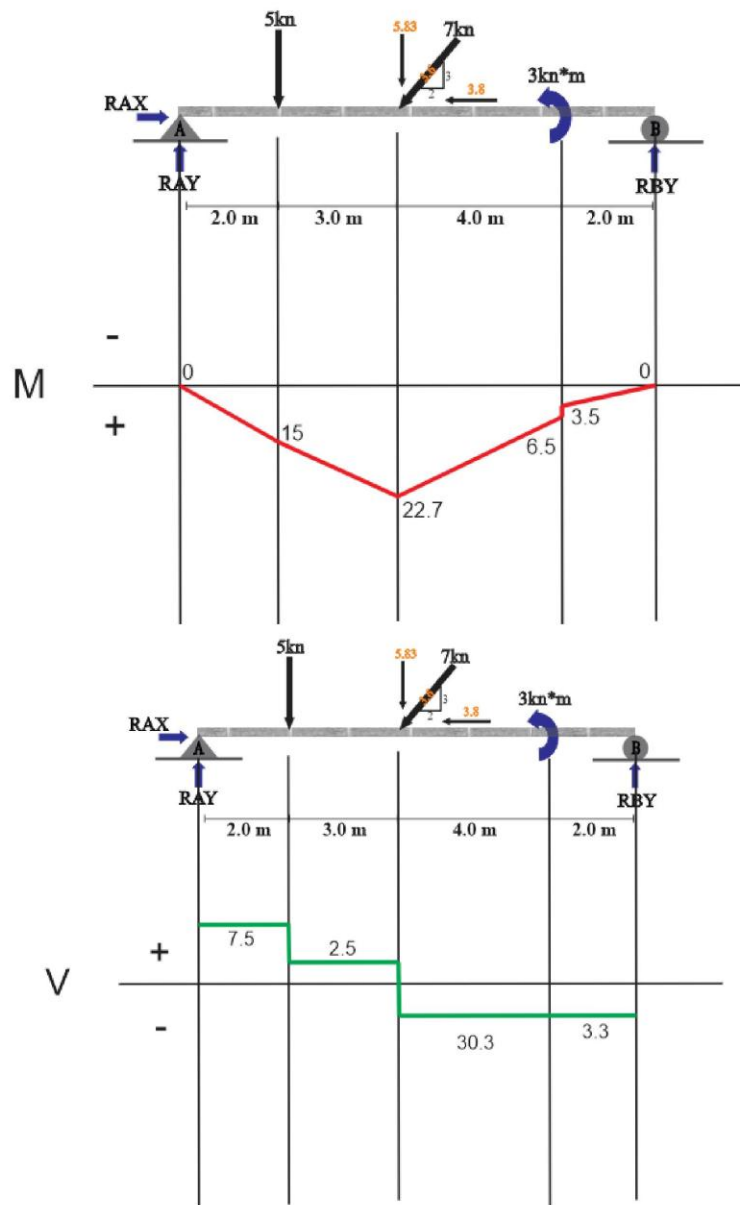
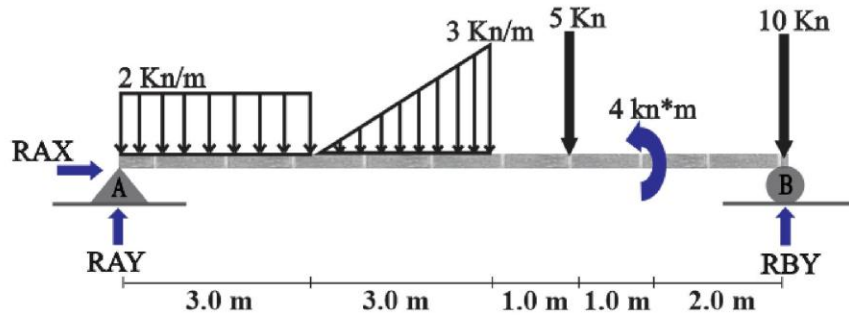


Figura 42. Diagrama de Fuerza cortante y momento flector viga 3

3.

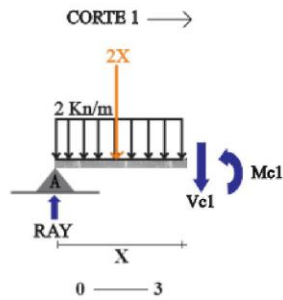


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 9.25 \text{ Kn}$

$R_{BY} = 16.25 \text{ Kn}$

$R_{AX} = 0$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

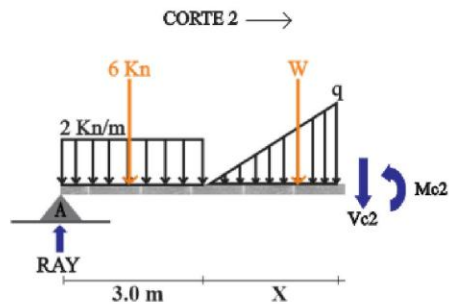
$$-9.25(X) + 2X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -X^2 + 9.25X \quad (0,3)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$9.25 - 2X - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -2X + 9.25 \quad (0,3)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-9.25(3+X) + 6(1.5+X) + \frac{X^2}{2}\left(\frac{X}{3}\right) + M_{c2} = 0$$

$$-27.75 - 9.25X + 9 + 6X + \frac{X^3}{6} + M_{c2} = 0$$

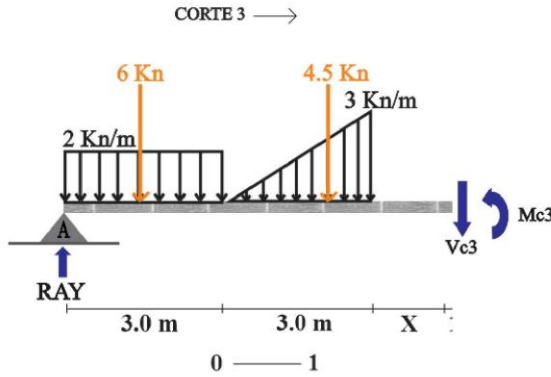
$$M_{c2} = -\frac{X^3}{6} + 3.25X + 18.75 \quad (0,3)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$9.25 - 6 - \frac{X^2}{2} - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -\frac{X^2}{2} + 3.25 \quad (0,3)$$

$$W = \frac{X^2}{2}$$



$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-9.25(6+X)+6(4.5+X)+4.5(1+X)+Mc3=0$$

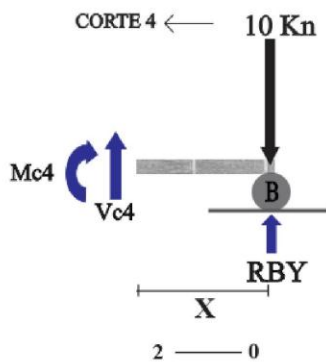
$$-55.5-9.25X+27+6X+4.5+4.5X+Mc3=0$$

$$Mc3 = -\frac{5}{4}X + 24 \quad (0;1)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$9.25-6-4.5-Vc3=0$$

$$Vc3 = -1.25 \quad (0;1.5)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

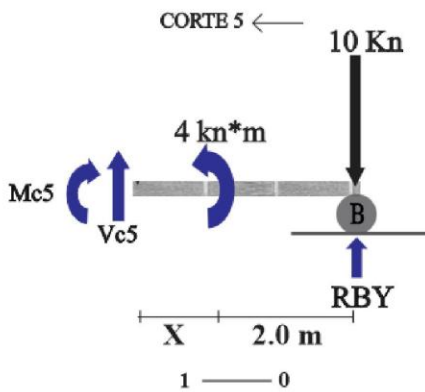
$$-16.25(X)+10(X)+Mc4=0$$

$$Mc4 = 6.25 X \quad (2;0)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$16.25-10+Vc4=0$$

$$Vc4 = -6.25 \quad (2;0)$$



$$\sum Mc5=0 \quad (+) \quad \curvearrowleft$$

$$-16.25(2+X)+10(2+X)-4+Mc5=0$$

$$-32.5-16.25X+20+10X-4.5+Mc5=0$$

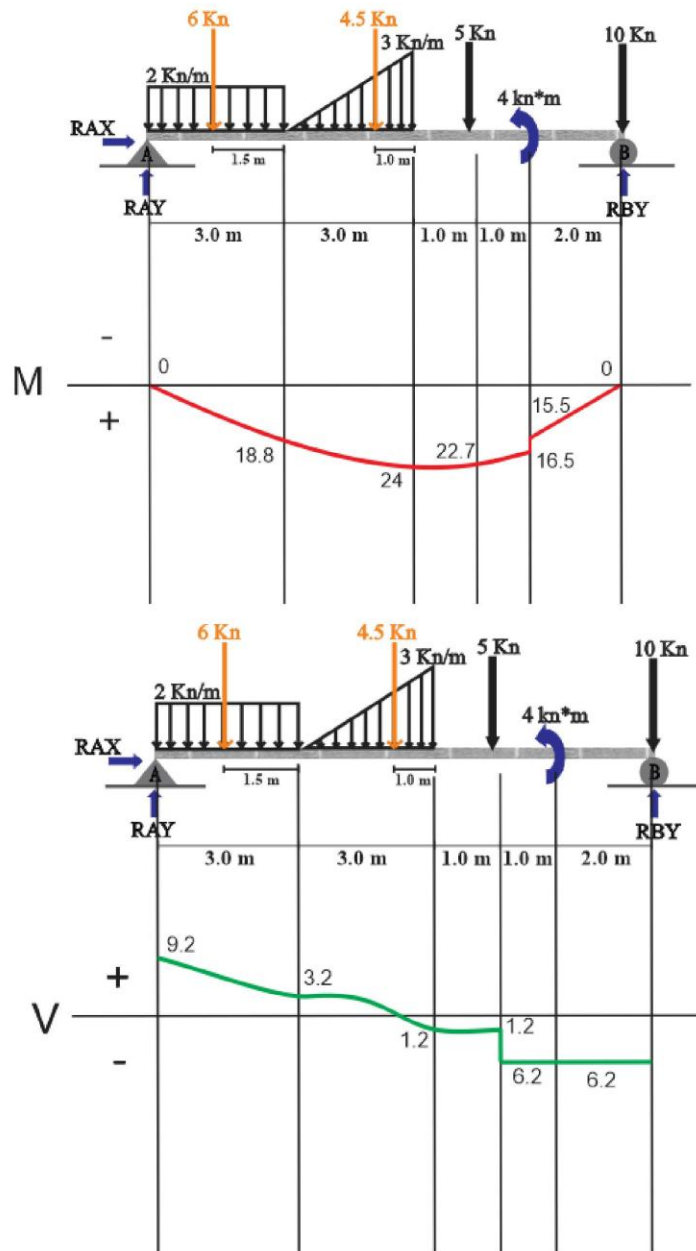
$$Mc5 = 6.25X + 16.5 \quad (1;0)$$

$$\sum Vc5=0 \quad \uparrow (+)$$

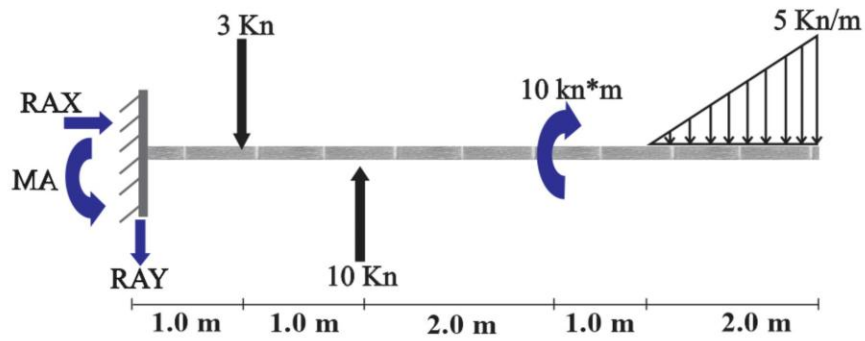
$$16.25-10+Vc5=0$$

$$Vc5 = -6.25 \quad (1;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



4.

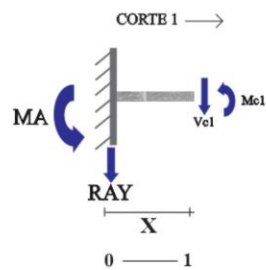


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 2.00 \text{ Kn}$$

$$RBY = 16.25 \text{ Kn}$$

$$MA = 24.5 \text{ Kn}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

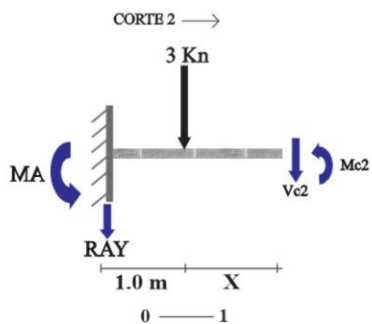
$$24.5 + 2(X) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = -2X - 24.5 \quad (0;1)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-Vc1 - 2 = 0$$

$$Vc1 = -2 \quad (0;1)$$



$$\sum Mc2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

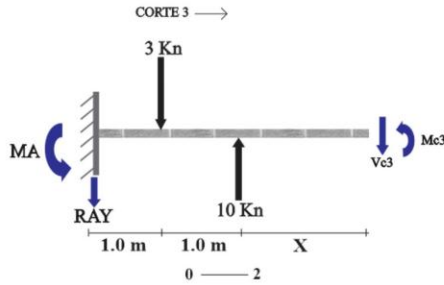
$$24.5 + 2(1+X) + 3(X) + Mc2 = 0$$

$$Mc2 = -5X - 26.5 \quad (0;1)$$

$$\sum Vc2 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-2 - 3 - Vc2 = 0$$

$$Vc2 = -5 \quad (0;1)$$



$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$24.5+2(2+X)+3(1+X)-10(X)+Mc3=0$$

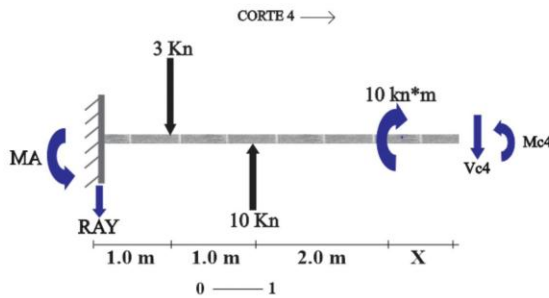
$$24.5+4+2X+3+3X-10X+Mc3=0$$

$$Mc3 = 5X - 31.5 \quad (0;2)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-2-3+10-Vc3=0$$

$$Vc3 = 5 \quad (0;2)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowright (+)$$

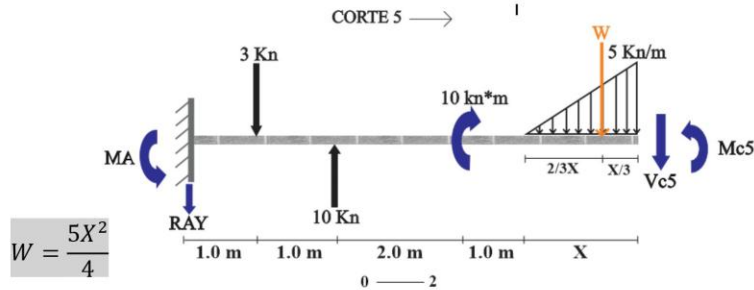
$$24.5+2(4+X)+3(3+X)-10(2+X)-10+Mc4=0$$

$$Mc4 = 5X - 11.5 \quad (0;1)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-2-3+10-Vc4=0$$

$$Vc4 = 5 \quad (0;1)$$



$$W = \frac{5X^2}{4}$$

$$\sum Mc5=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$24.5+2(5+X)+3(4+X)-10(3+X)-10+\frac{5X^2}{4}\left(\frac{X}{3}\right)+Mc5=0$$

$$24.5+10+2X+12+3X-30-10X-10+\frac{5X^3}{12}+Mc5=0$$

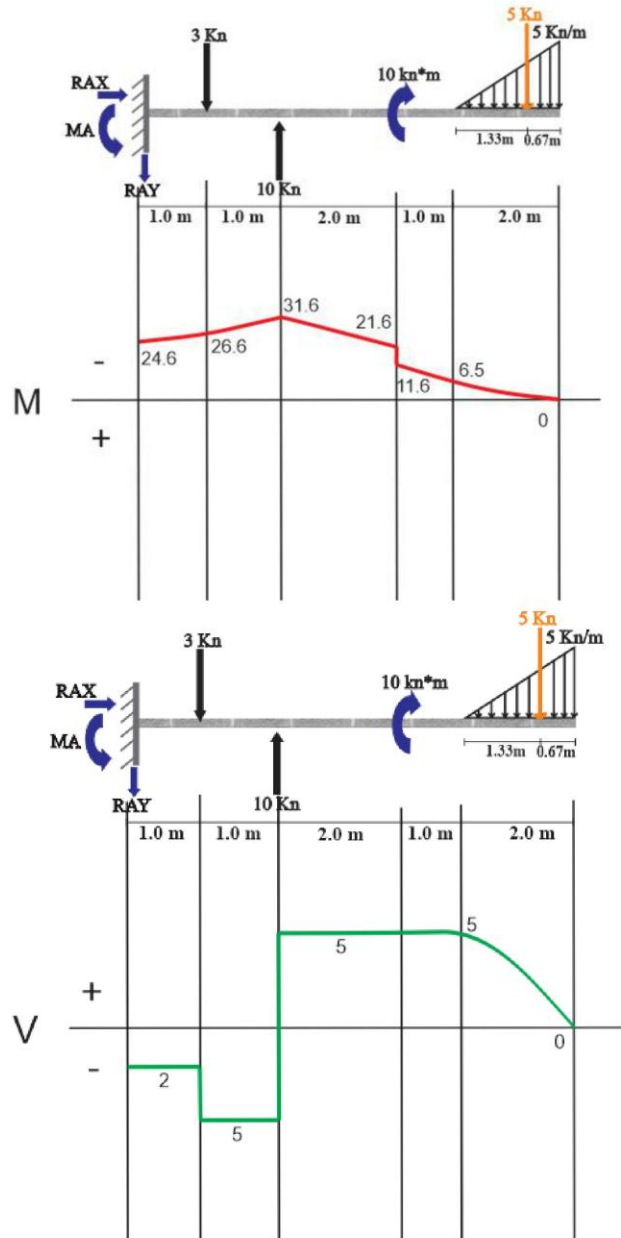
$$Mc5 = -\frac{5X^3}{12} + 5X - 6.5 \quad (0;2)$$

$$\sum Vc5=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-2-3+10-\frac{5X^2}{4}-Vc5=0$$

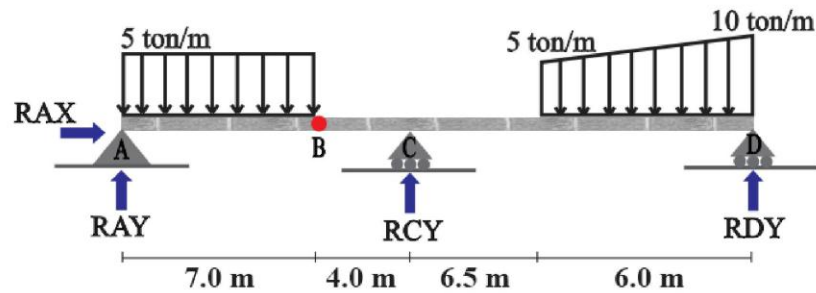
$$Vc5 = -\frac{5X^2}{4} + 5 \quad (0;2)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





5.



Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

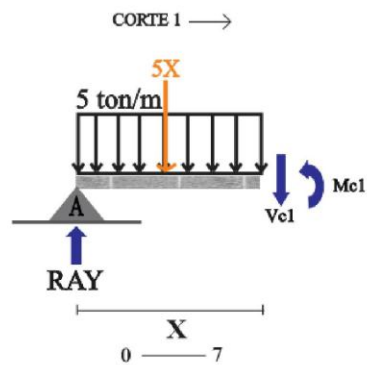
$$RAY = 17.5 \text{ Ton}$$

$$RBY = 17.5 \text{ Ton}$$

$$RCY = 32.7 \text{ Ton}$$

$$RDY = 29.8 \text{ Ton}$$

$$RAX = 0$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

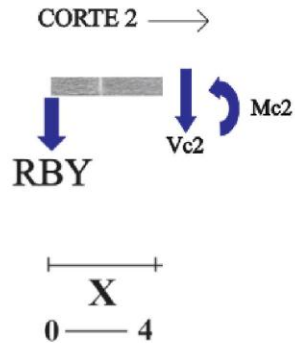
$$-17.5(X) + 5X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = -\frac{5X^2}{2} + 17.5X \quad (0;7)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$17.5 - 5X - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = -5X + 17.5 \quad (0;7)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14(2+X) + 16(1+X) + M_{c2} = 0$$

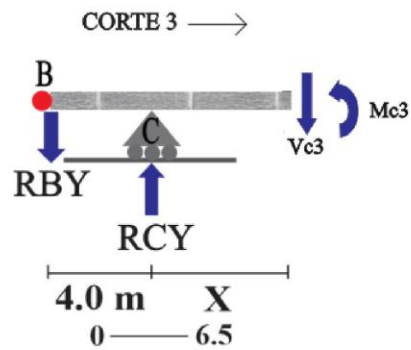
$$-28 - 14X + 16 + 16X + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = -2X + 12 \quad (0;1)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$14 - 16 - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -2 \quad (0;1)$$



$$\sum M_{c3} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$17.5(4+X) - 32.7(X) + M_{c3} = 0$$

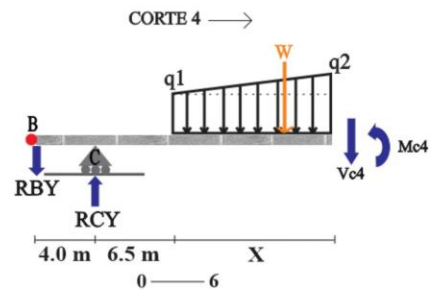
$$70 + 17.5X - 32.7X + M_{c3} = 0$$

$$M_{c3} = 15.2X - 70 \quad (0;6.5)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-17.5 + 32.7 - V_{c3} = 0$$

$$V_{c3} = 15.2 \quad (0;6.5)$$



$$W = \frac{5X^2}{12}$$

$$\sum M_{c4} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-17.5(10.5 + X) - 32.7(6.5 + X) + 5X \left(\frac{X}{2}\right) + \frac{5X^2}{12} \left(\frac{X}{3}\right) + M_{c4} = 0$$

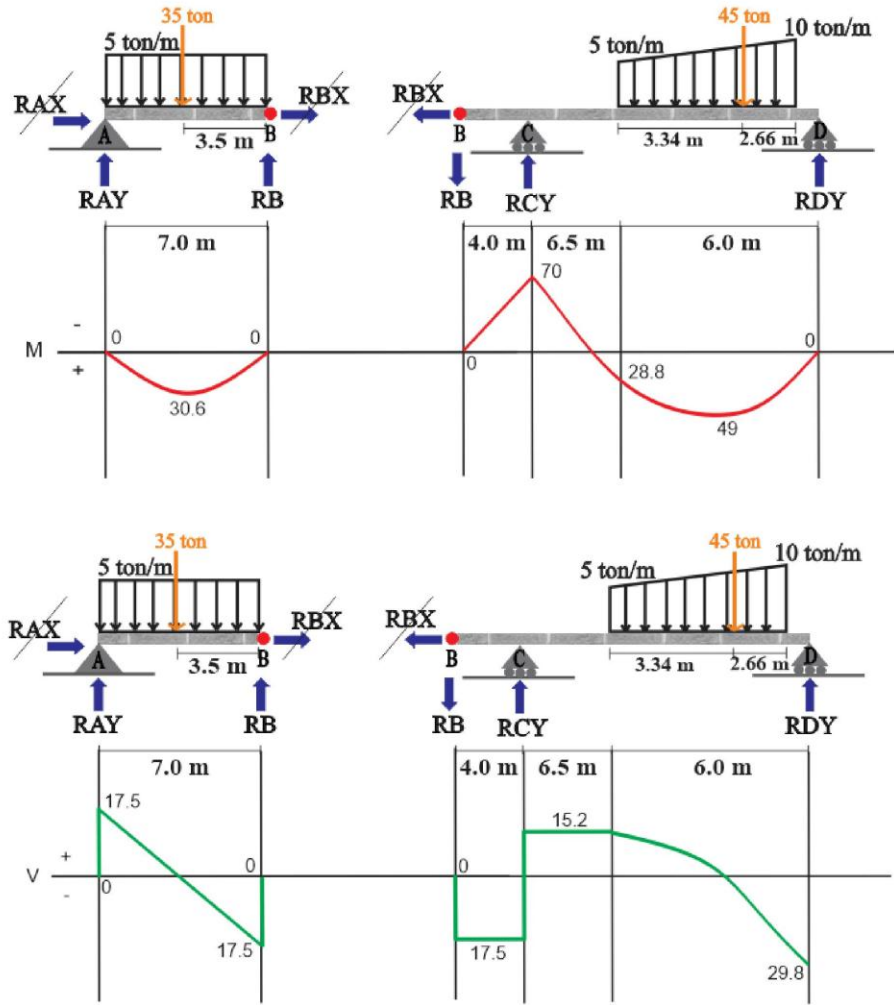
$$M_{c4} = -\frac{5X^3}{36} - \frac{5X^2}{2} + 15.2X - 28.8 \quad (0;6)$$

$$\sum V_{c4} = 0 \quad \uparrow (+)$$

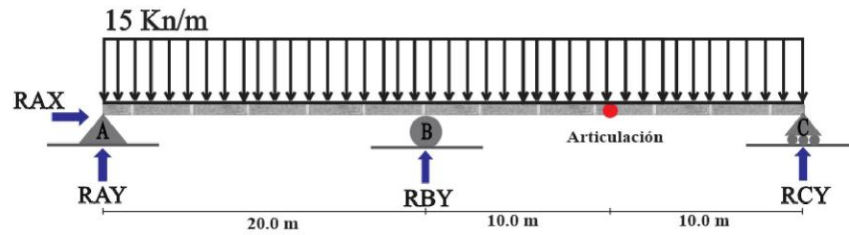
$$-17.5 + 32.7 - 5X - \frac{5X^2}{6} - V_{c4} = 0$$

$$V_{c4} = -\frac{5X^2}{6} - 5X + 15.2 \quad (0;6)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



6.



Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

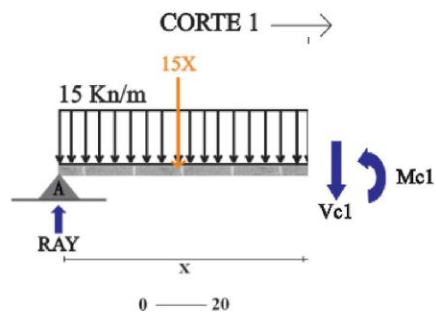
$$R_{AY} = 75.0 \text{ Kn}$$

$$R_{BY} = 450.0 \text{ Kn}$$

$$R_i = 75.0 \text{ Kn}$$

$$R_{CY} = 75.0 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 0$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

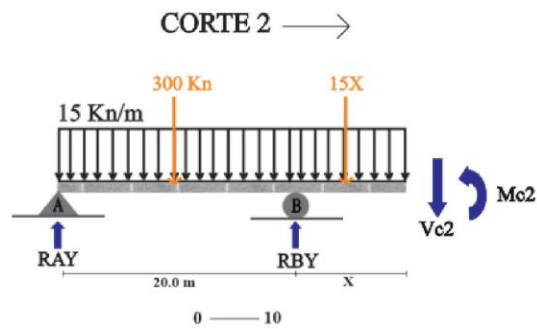
$$-75(X) + 15X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -\frac{15X^2}{2} + 75X \quad (0;20)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$75 - 15X - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -15X + 75 \quad (0;20)$$



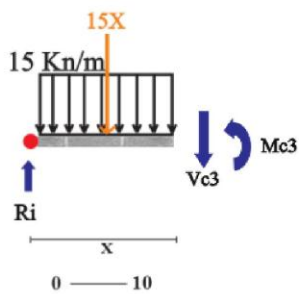
$$\sum Mc_2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$\begin{aligned} -75(20+X) + 300(10+X) - 450(X) + 15X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc_2 &= 0 \\ -28 - 14X + 16 + 16X + Mc_2 & \\ Mc_2 = -2X + 12 & \quad (0;10) \end{aligned}$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$\begin{aligned} 75 - 300 + 450 - 15X - V_{c2} &= 0 \\ V_{c2} = -15X + 225 & \quad (0;10) \end{aligned}$$

CORTE 3 →



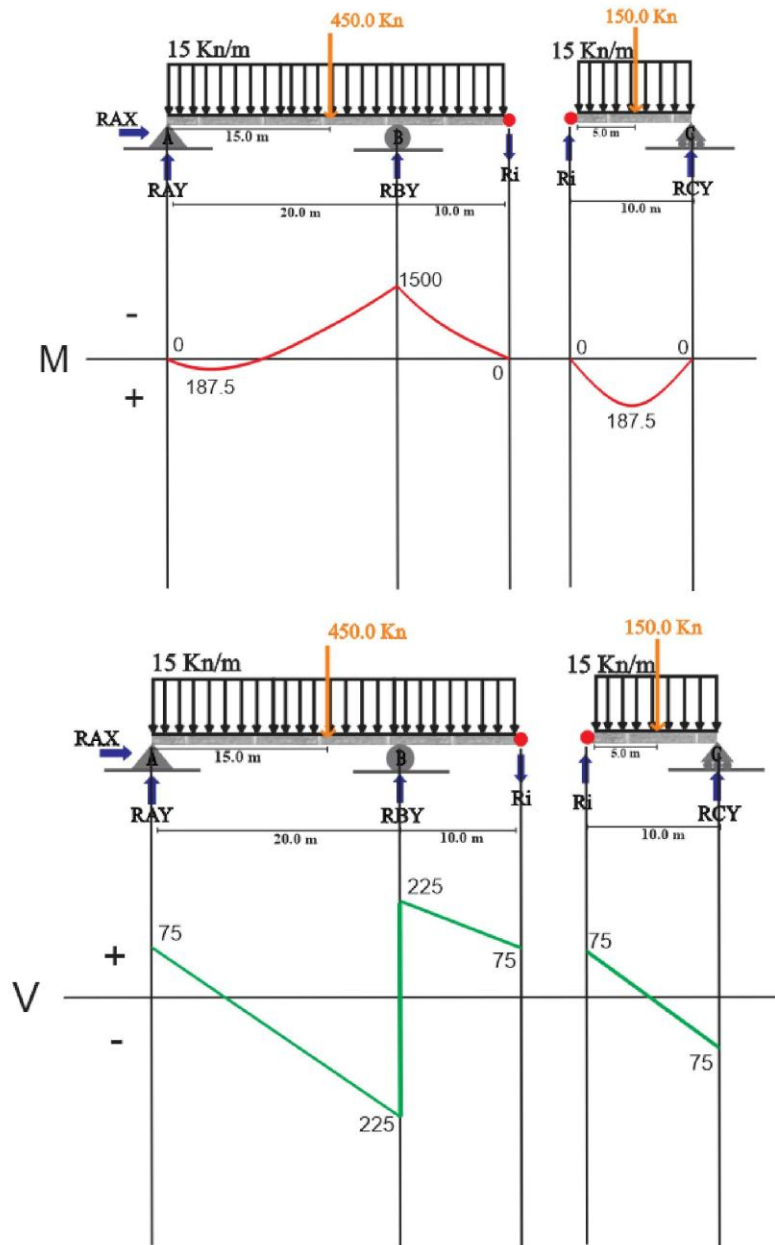
$$\sum Mc_3 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$\begin{aligned} -75(X) + 15X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc_3 &= 0 \\ 70 + 17.5X - 32.7X + Mc_3 &= 0 \\ Mc_3 = -\frac{15X^2}{2} + 75X & \quad (0;10) \end{aligned}$$

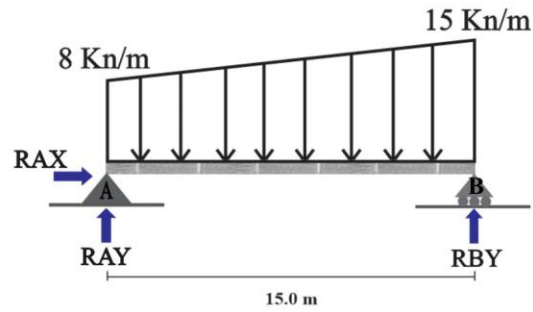
$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$\begin{aligned} 75 - 15X - V_{c3} &= 0 \\ V_{c3} = -15X + 75 & \quad (0;10) \end{aligned}$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



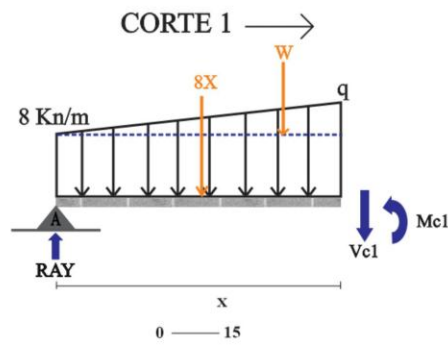
7.



Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 77.5 \text{ Kn}$$

$$RBY = 95.0 \text{ Kn}$$



$$\frac{q}{X} = \frac{7}{15} = q = \frac{7X}{15}$$

$$W = \frac{7X}{15} \left( \frac{X}{2} \right) = \frac{7X^2}{30}$$

$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-77.5(X) + 8X \left( \frac{X}{2} \right) + \frac{7X^2}{30} \left( \frac{X}{3} \right) + Mc1 = 0$$

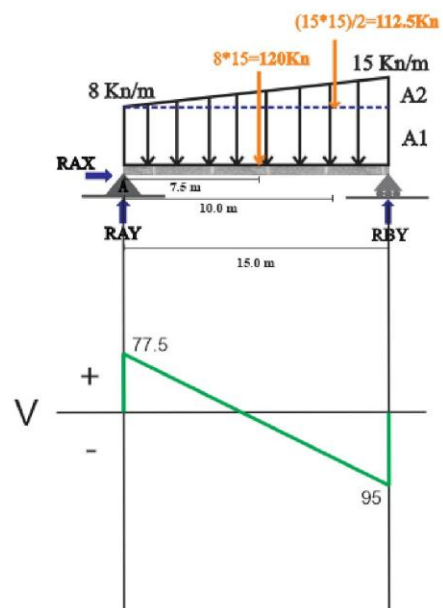
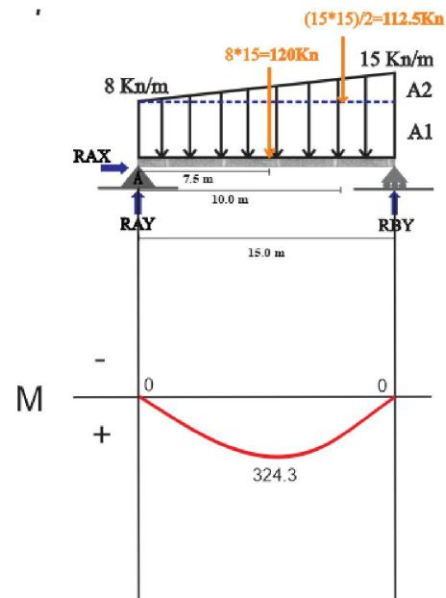
$$Mc1 = -\frac{7X^3}{90} - 4X^2 + 77.5X \quad (0;15)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$77.5 - 8X - \frac{7X^2}{30} - Vc1 = 0$$

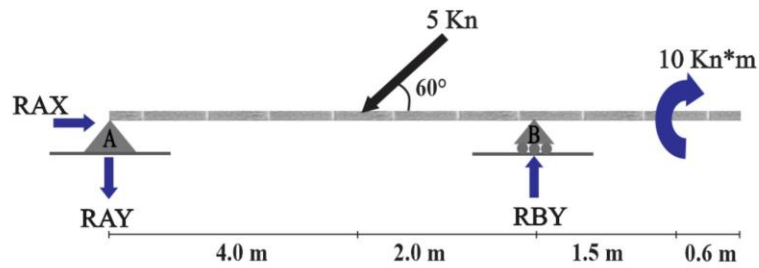
$$Vc1 = -\frac{7X^2}{30} - 8X + 77.5 \quad (0;15)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





8.

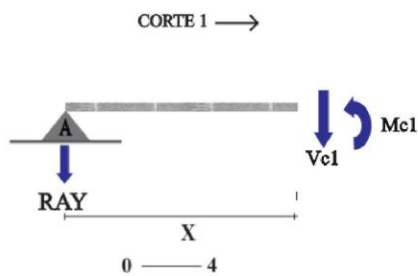


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{AY} = 0.23 \text{ Kn}$$

$$R_{BY} = 4.53 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 2.5 \text{ Kn}$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

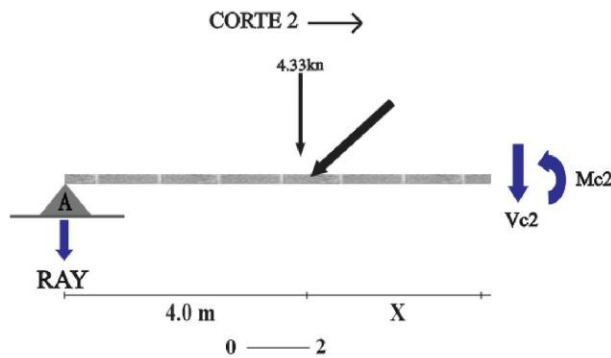
$$0.23(X) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -0.23X \quad (0;4)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-0.23 - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -0.23X \quad (0;4)$$



$$\sum M_{c2}=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$0.23(4+X)+4.3(X)+M_{c2}=0$$

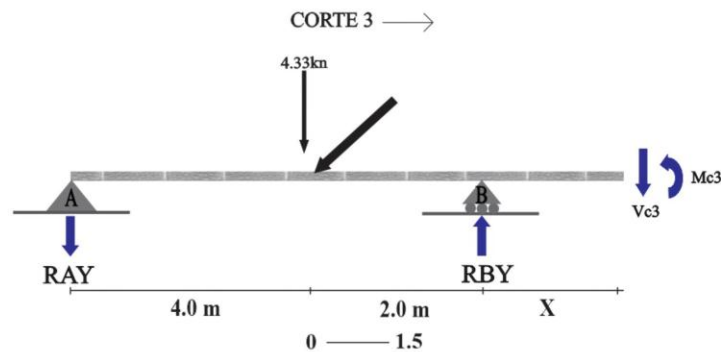
$$0.92+0.23X+4.3X+M_{c2}$$

$$M_{c2} = -4.53X - 0.92 \quad (0;2)$$

$$\sum V_{c2}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-0.23-4.3-V_{c2}=0$$

$$V_{c2} = -4.53 \quad (0;2)$$



$$\sum M_{c3}=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$0.23(6+X)-4.3(2+X)-4.53(X) + M_{c3}=0$$

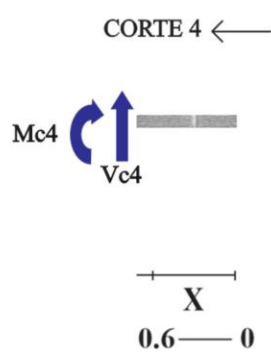
$$138+0.23X+8.6+4.3X-4.53+M_{c3}=0$$

$$M_{c3} = -9.98 \quad (0;1.5)$$

$$\sum V_{c3}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-0.23-4.3+4.53-V_{c3}=0$$

$$V_{c3} = 0 \quad (0;1.5)$$



$$\sum M_{c4}=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$M_{c4} = 0$$

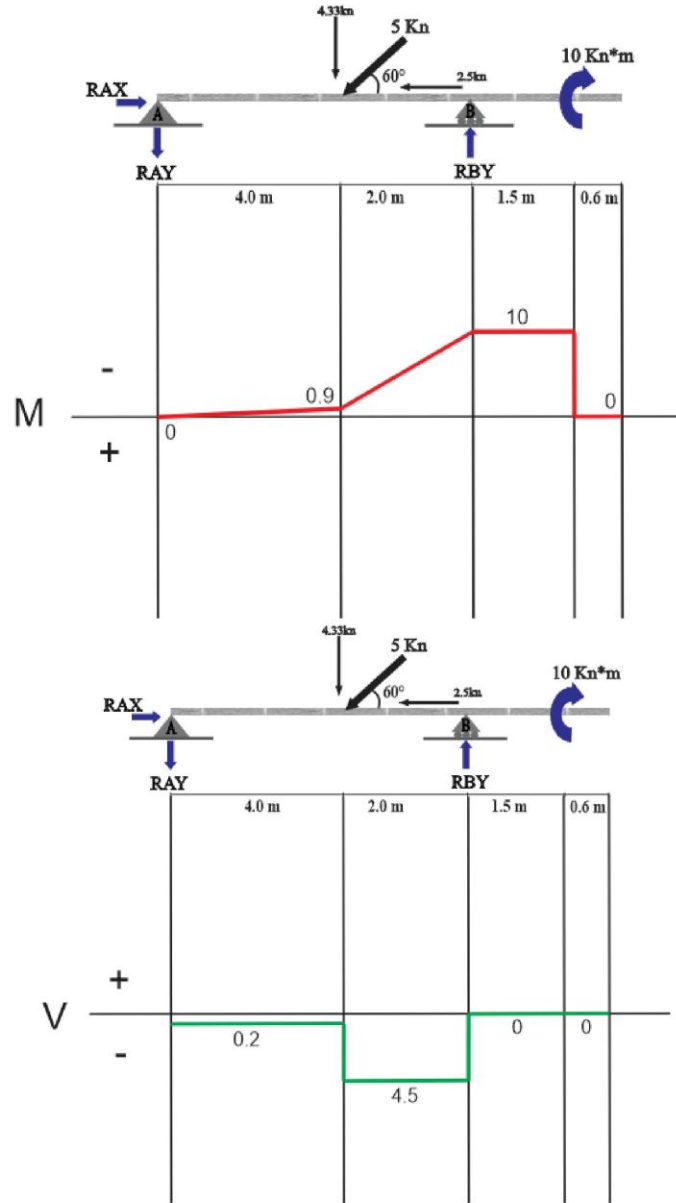
$$M_{c4} = 0 \quad (0.6;0)$$

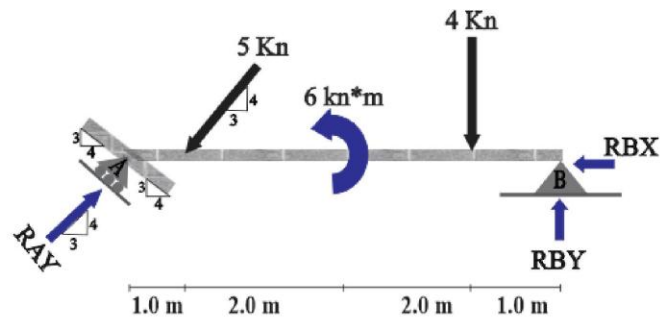
$$\sum V_{c4}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_{c4}=0$$

$$V_{c4} = 0 \quad (0.6;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

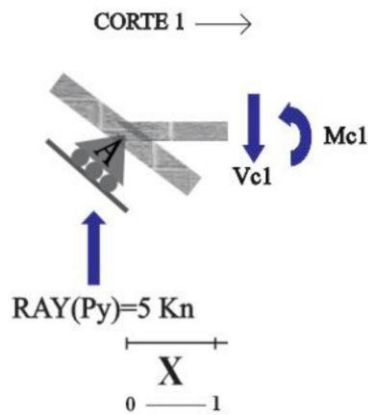
$$RAY(Py) = 5 \text{ Kn}$$

$$RBY = 3 \text{ Kn}$$

$$RAY(Px) = 3.75 \text{ Kn}$$

$$RBX = 0.75 \text{ Kn}$$

$$RAY = 6.25 \text{ Kn}$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

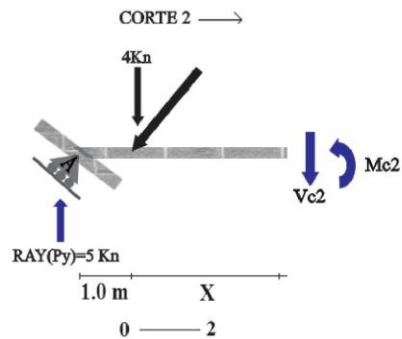
$$-5(X) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = 5X \quad (0;1)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

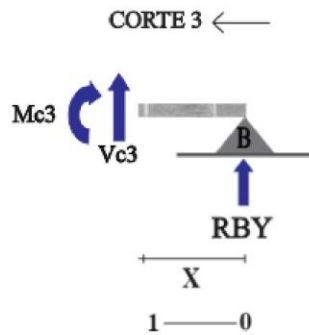
$$5 - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = 5 \quad (0;1)$$



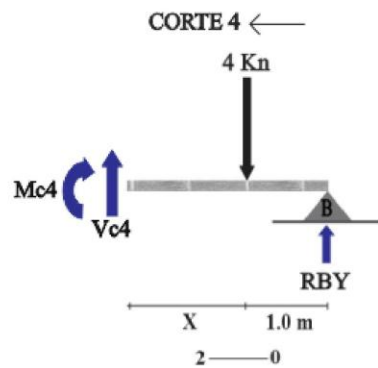
$$\begin{aligned}\sum M_{c2} &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -5(1+X) + 4(X) + M_{c2} &= 0 \\ -5 - 5X + 4X + M_{c2} &= 0 \\ M_{c2} &= X + 5 \quad (0;2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum V_{c2} &= 0 \quad \uparrow (+) \\ 5 - 4 - V_{c2} &= 0 \\ V_{c2} &= 1 \quad (0;2)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum M_{c3} &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -3(X) + M_{c3} &= 0 \\ M_{c3} &= 3X \quad (1;0)\end{aligned}$$

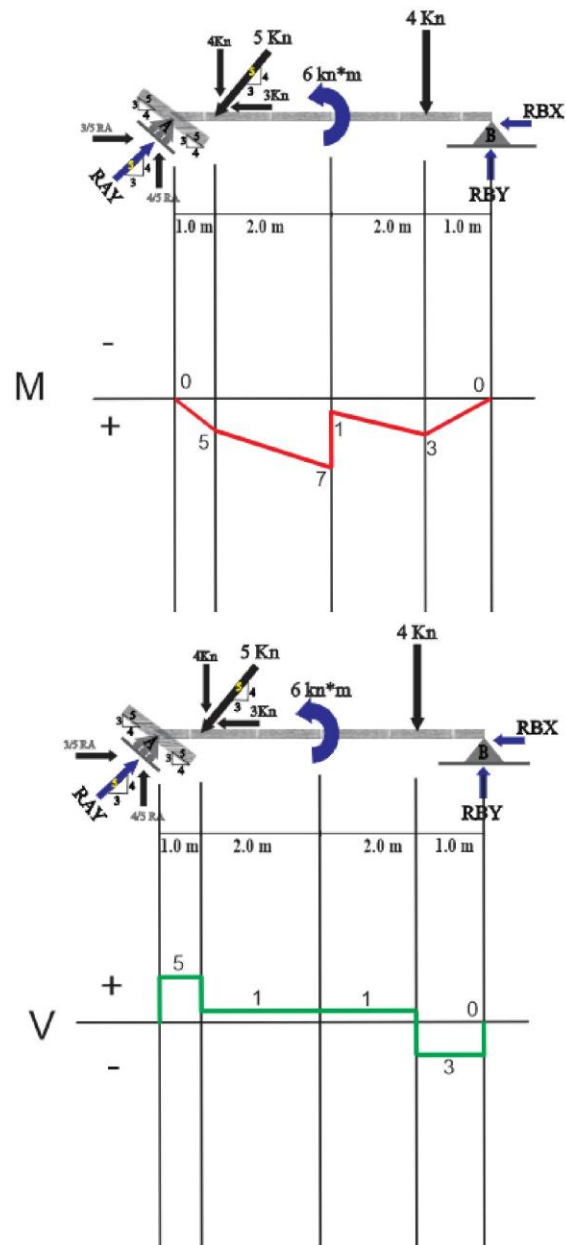
$$\begin{aligned}\sum V_{c3} &= 0 \quad \uparrow (+) \\ 3 + V_{c3} &= 0 \\ V_{c3} &= -3 \quad (1;0)\end{aligned}$$



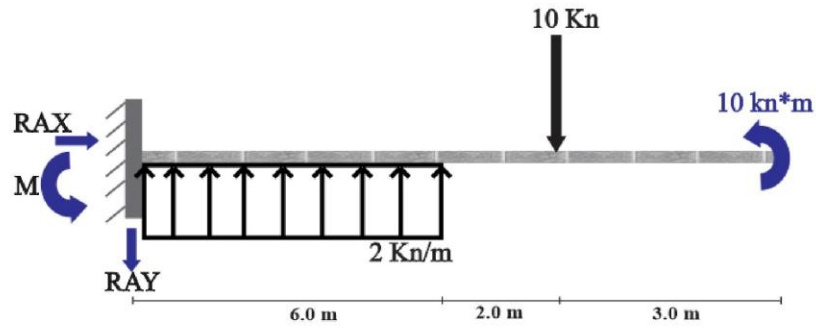
$$\begin{aligned}\sum M_{c4} &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -3(1+X) + 4X + M_{c4} &= 0 \\ -3 - 3X + 4X + M_{c4} &= 0 \\ M_{c4} &= -X + 3 \quad (2;0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum V_{c4} &= 0 \quad \uparrow (+) \\ 3 - 4 + V_{c4} &= 0 \\ V_{c4} &= 1 \quad (2;0)\end{aligned}$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



10.

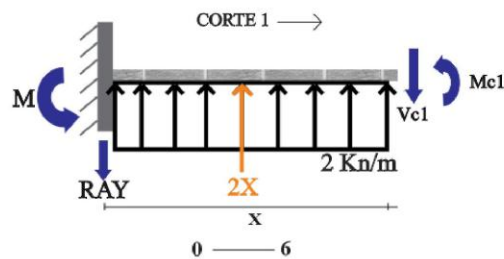


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 2.0 \text{ Kn}$$

$$RAX = 0$$

$$MA = 34.0 \text{ Kn} \cdot \text{m}$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

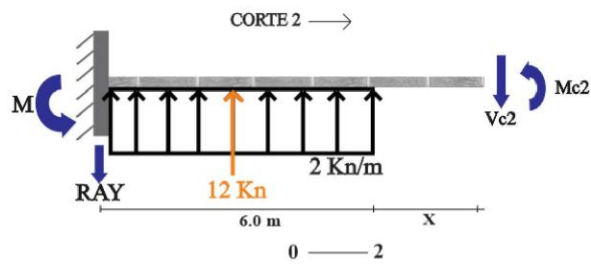
$$34 + 2(X) - 2X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = X^2 - 2X - 34 \quad (0,6)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-2 + 2X - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = 2X - 2 \quad (0,6)$$



$$\sum Mc_2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$34 + 2(6+x) - 12(3+x) + Mc_2 = 0$$

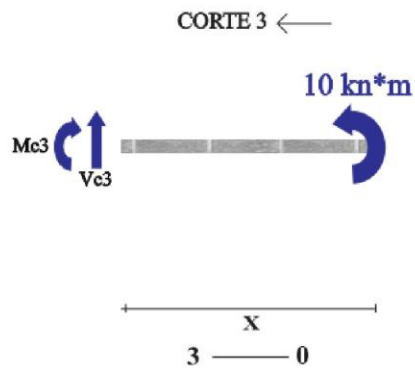
$$34 + 12 + 2x - 36 - 12x + Mc_2 = 0$$

$$Mc_2 = 10x - 10 \quad (0;2)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-2 + 12 - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = 10 \quad (0;2)$$



$$\sum Mc_3 = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$-10 + Mc_3 = 0$$

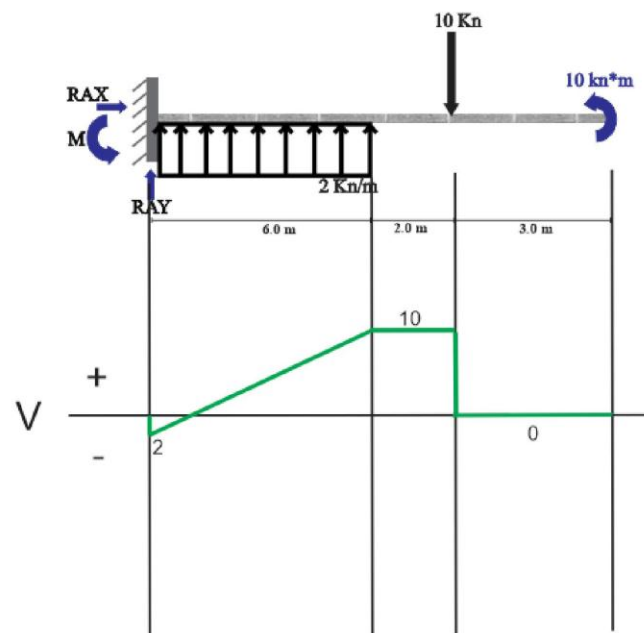
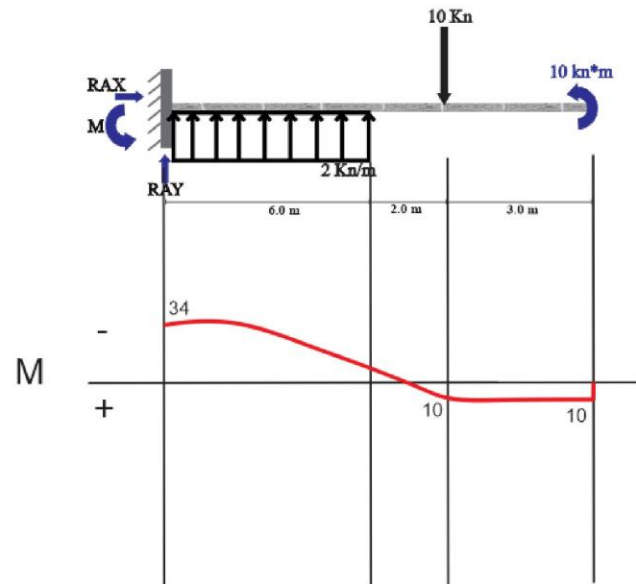
$$Mc_3 = 10 \quad (0;3)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

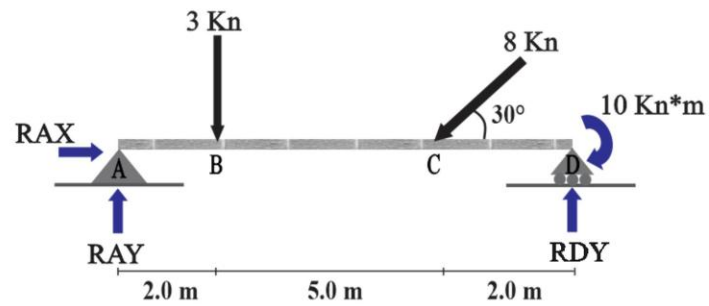
$$V_{c3} = 0 \quad (0;3)$$



Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



11.

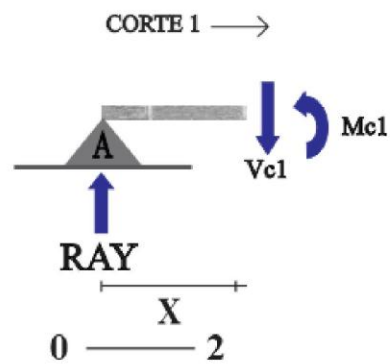


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 2.11 \text{ Kn}$$

$$RDY = 4.89 \text{ Kn}$$

$$RAX = 6.93 \text{ Kn}$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

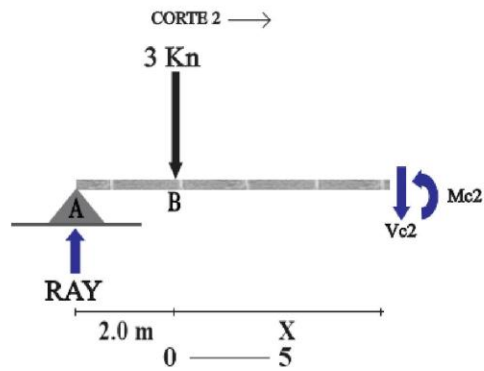
$$-2.11(X) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = 2.11X \quad (0;2)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$2.11 - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = 2.11 \quad (0;2)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-2.11(2+X) + 3(X) + M_{c2} = 0$$

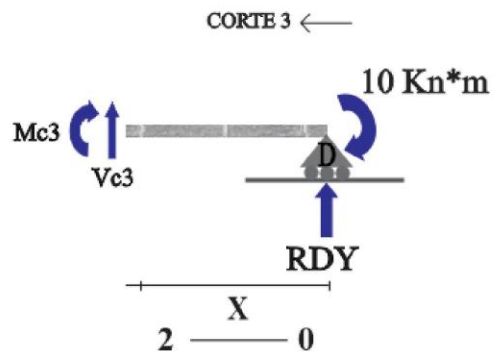
$$-4.22 - 2.11X + 3X + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = -0.89X + 4.22 \quad (0;5)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$2.11 - 3 - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -0.89 \quad (0;5)$$



$$\sum M_{c3} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$-4.89(X) + 10 + M_{c3} = 0$$

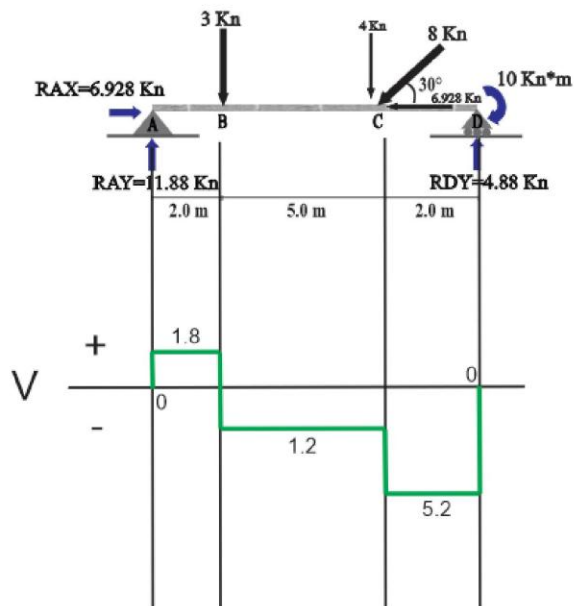
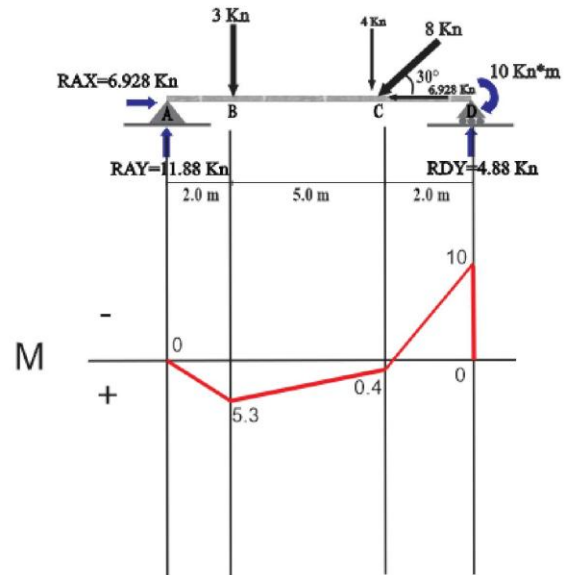
$$M_{c3} = 4.89X - 10 \quad (2;0)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

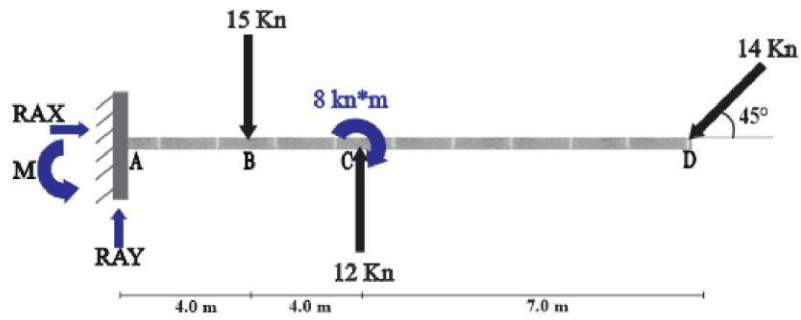
$$4.89 + V_{c3} = 0$$

$$V_{c3} = -4.89 \quad (2;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



12.

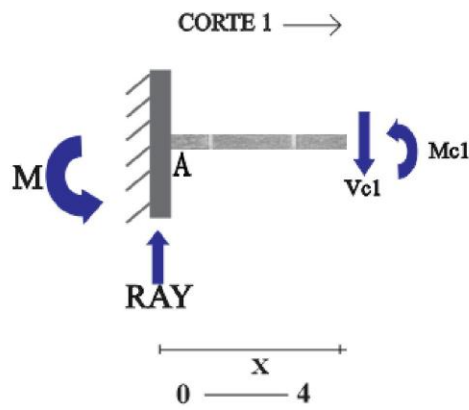


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$M_A = 120.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$R_{AY} = 12.9 \text{ kN}$$

$$R_{AX} = 9.9 \text{ kN}$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

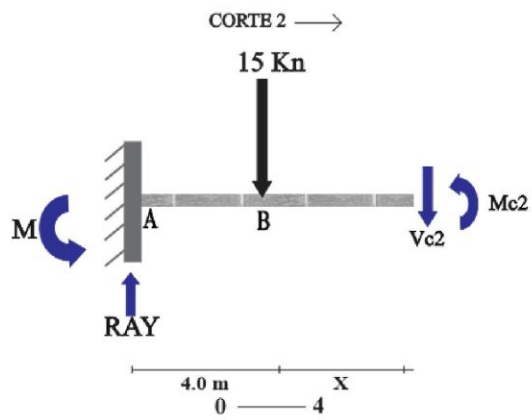
$$-12.9(x) + 120.5 + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = 12.9x - 120.5 \quad (0;4)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$12.9 - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = 12.9 \quad (0;4)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$120.5 - 12.9(4+X) + 15(X) + M_{c2} = 0$$

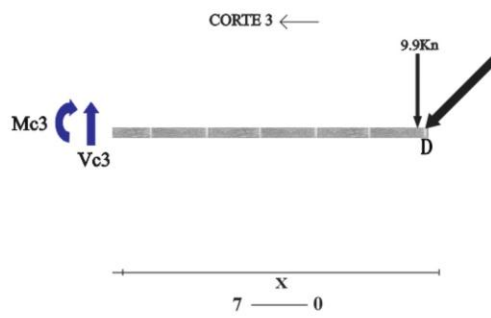
$$120.5 - 51.6 - 12.9X + 15X + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = -2.1X - 68.9 \quad (0;4)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$12.9 - 15 - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -2.1 \quad (0;4)$$



$$\sum M_{c3} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$9.9(X) + M_{c3} = 0$$

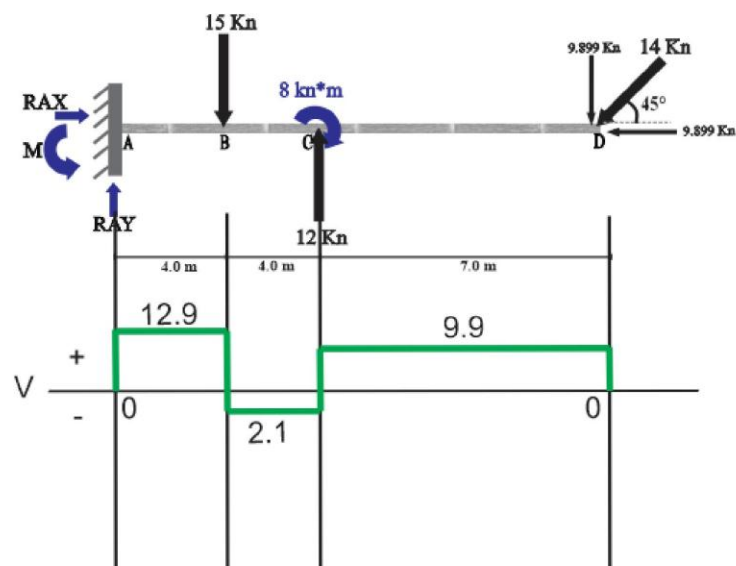
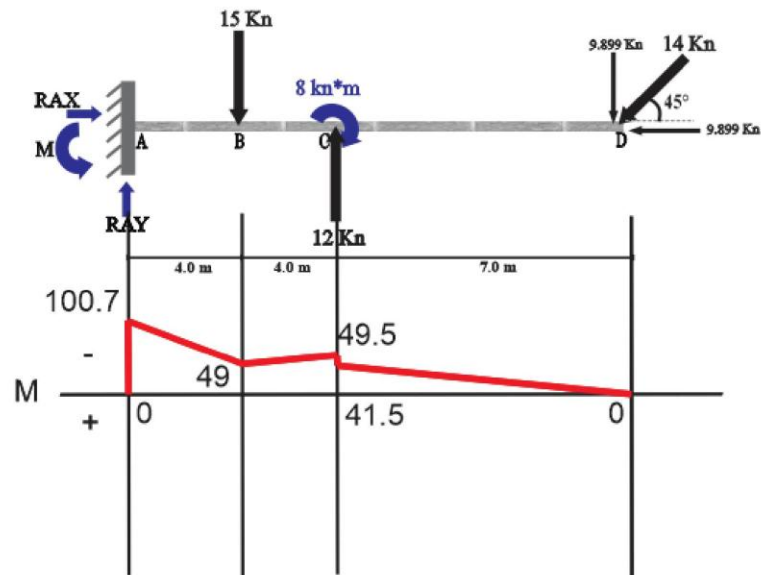
$$M_{c3} = -9.9X \quad (7;0)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

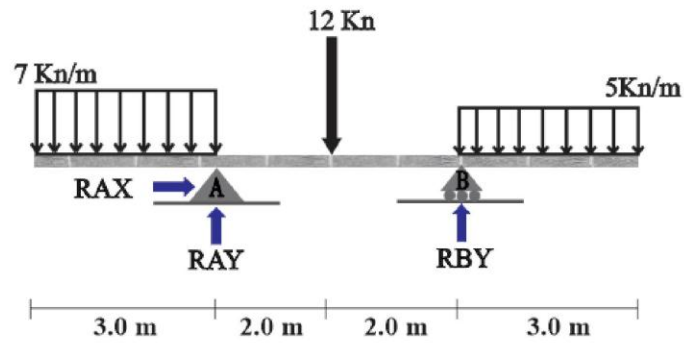
$$-9.9 + V_{c3} = 0$$

$$V_{c3} = 9.9 \quad (7;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



13.

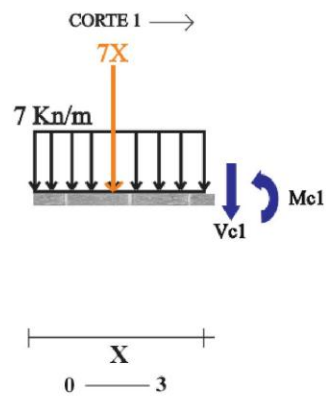


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 29.25 \text{ Kn}$$

$$RAX = 0$$

$$RBY = 18.75 \text{ Kn}$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$7X \left( \frac{X}{2} \right) + Mc1 = 0$$

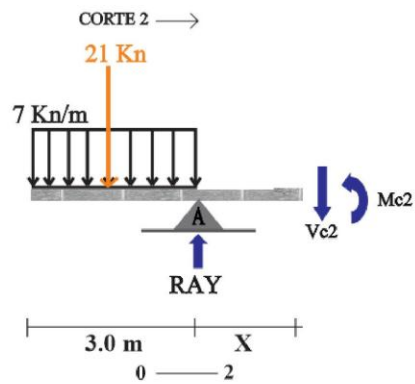
$$Mc1 = -\frac{7X^2}{2} \quad (0;3)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-7X - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = -7X \quad (0;3)$$





$$\sum M_{c2}=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$21(1.5+X)-29.25(X)+M_{c2}=0$$

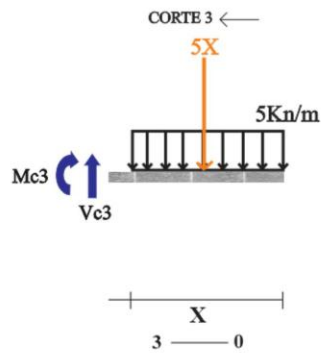
$$31.5+21X-29.25X+M_{c2}=0$$

$$M_{c2} = 8.25X - 31.5 \quad (0;2)$$

$$\sum V_{c2}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$29.25-21-V_{c2}=0$$

$$V_{c2} = 8.25 \quad (0;2)$$



$$\sum M_{c3}=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

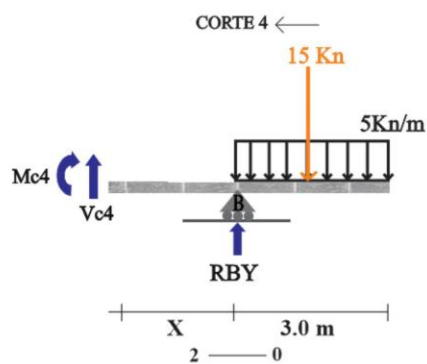
$$5X\left(\frac{X}{2}\right)+M_{c3}=0$$

$$M_{c3} = -\frac{5X^2}{2} \quad (3;0)$$

$$\sum V_{c3}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$V_{c3}-5X=0$$

$$V_{c3} = 5X \quad (3;0)$$



$$\sum M_{c4}=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$15(1.5+X)-18.75(X)+M_{c4}=0$$

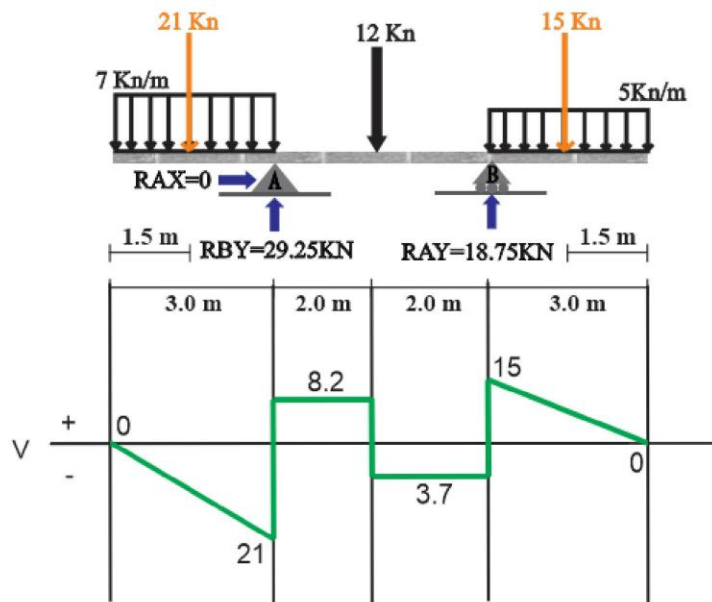
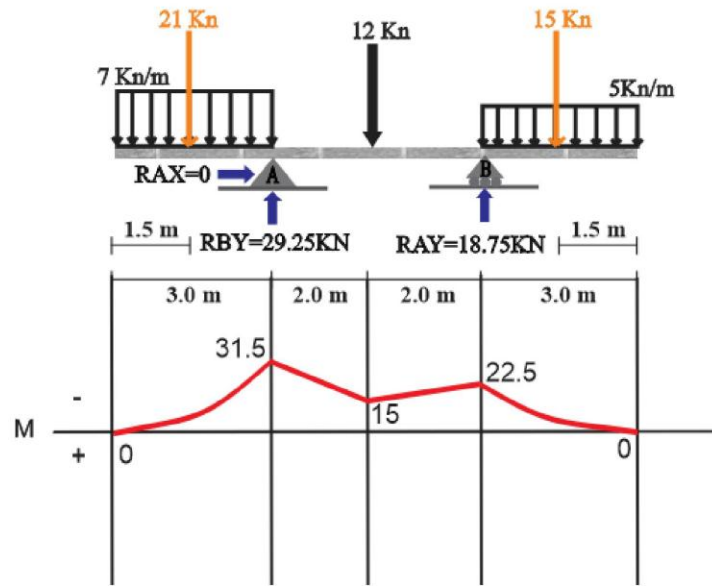
$$M_{c4} = 3.75X - 22.5 \quad (2;0)$$

$$\sum V_{c4}=0 \quad \uparrow (+)$$

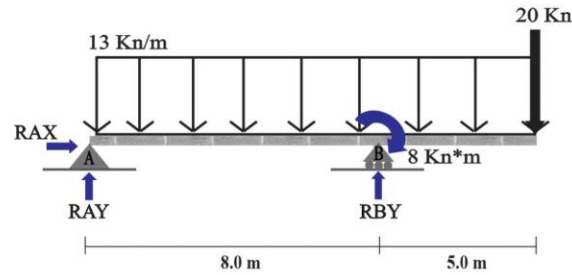
$$-15+18.75+V_{c4}=0$$

$$V_{c4} = -3.75 \quad (2;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



14.

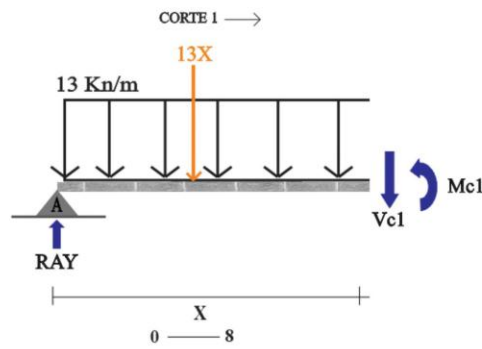


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 18.2 \text{ Kn}$

$R_{AX} = 0$

$R_{BY} = 170.8 \text{ Kn}$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

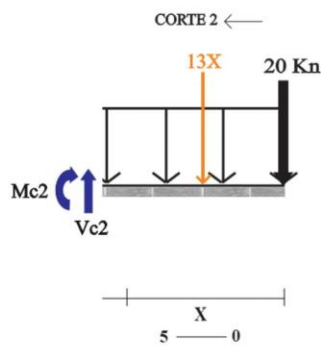
$$-18.2X + 13X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -\frac{13X^2}{2} + 18.2X \quad (0;8)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$18.2 - 13X - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -13X + 18.2 \quad (0;8)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$20(X) + 13X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c2} = 0$$

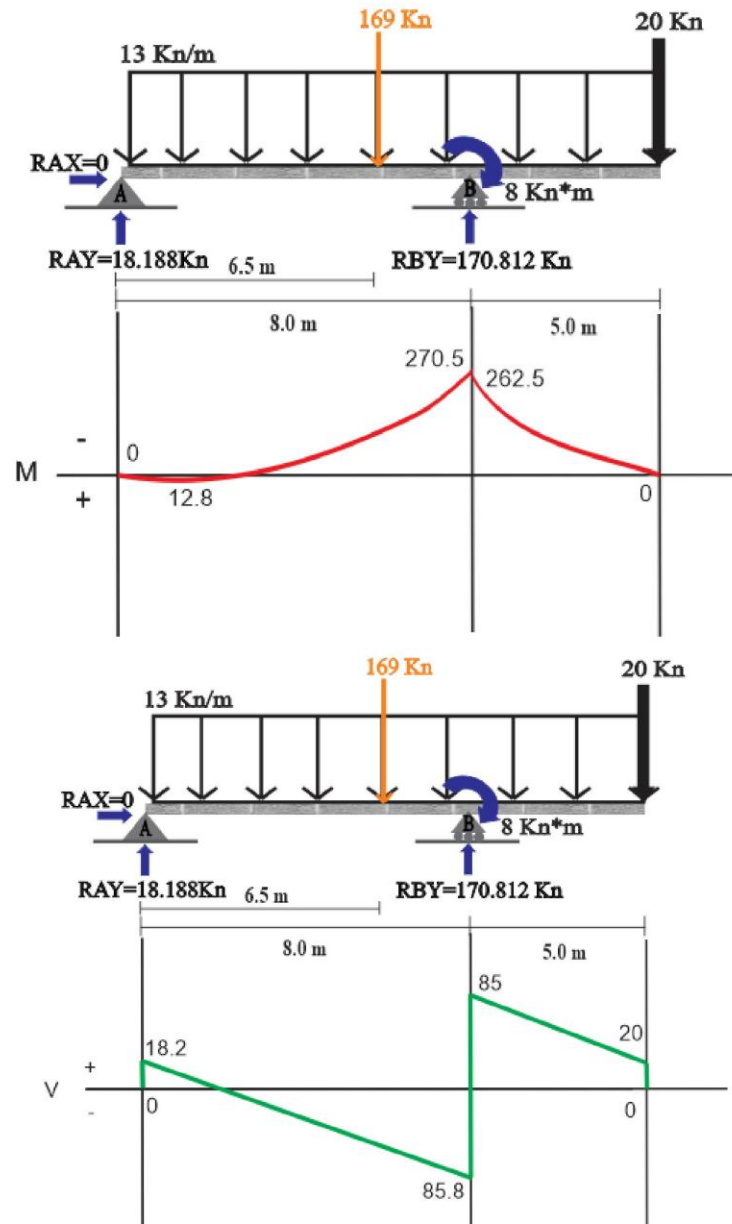
$$M_{c2} = -\frac{13X^2}{2} - 20X \quad (5;0)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

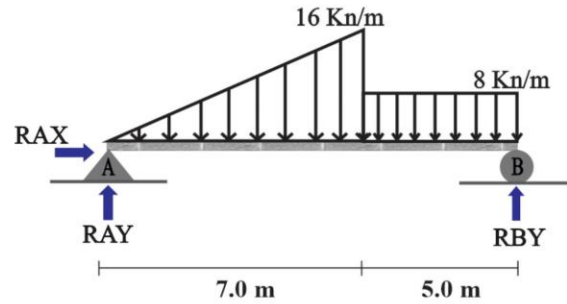
$$V_{c2} - 13X - 20 = 0$$

$$V_{c2} = 13X + 20 \quad (5;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



15.

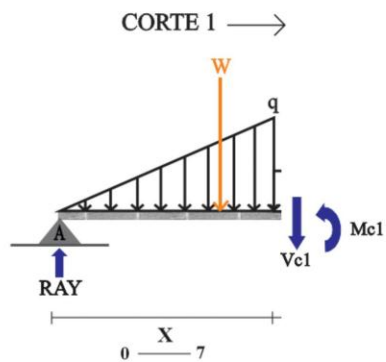


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 42.6 \text{ Kn}$$

$$RAX = 0$$

$$RBY = 53.4 \text{ Kn}$$



$$\frac{q}{X} = \frac{16}{7} = q = \frac{16}{7}X$$

$$W = \frac{16X}{7} \left( \frac{X}{2} \right) = \frac{8X^2}{7}$$

$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

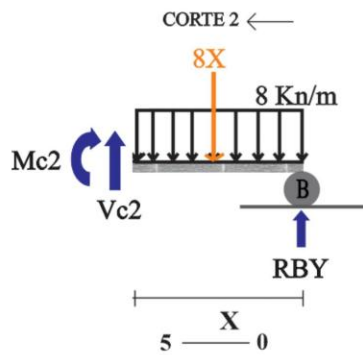
$$-42.6(X) + \frac{8X^2}{7} \left( \frac{X}{3} \right) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = -\frac{8X^2}{21} + 42.6X \quad (0;7)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$42.6 - \frac{8X^2}{7} - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = -\frac{8X^2}{7} + 42.6 \quad (0;7)$$



$$\sum Mc_2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-53.4(X) + 8X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc_2 = 0$$

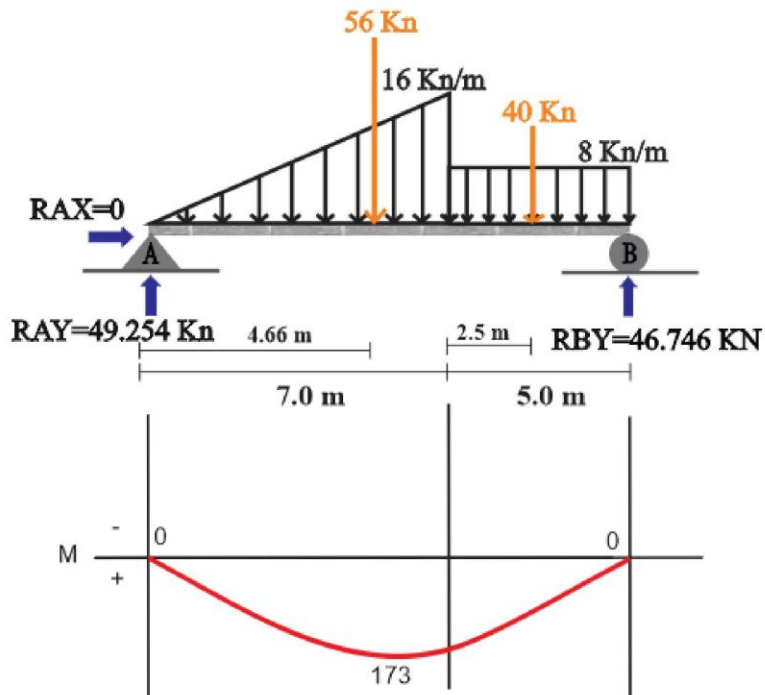
$$Mc_2 = -4X^2 + 53.4X \quad (5;0)$$

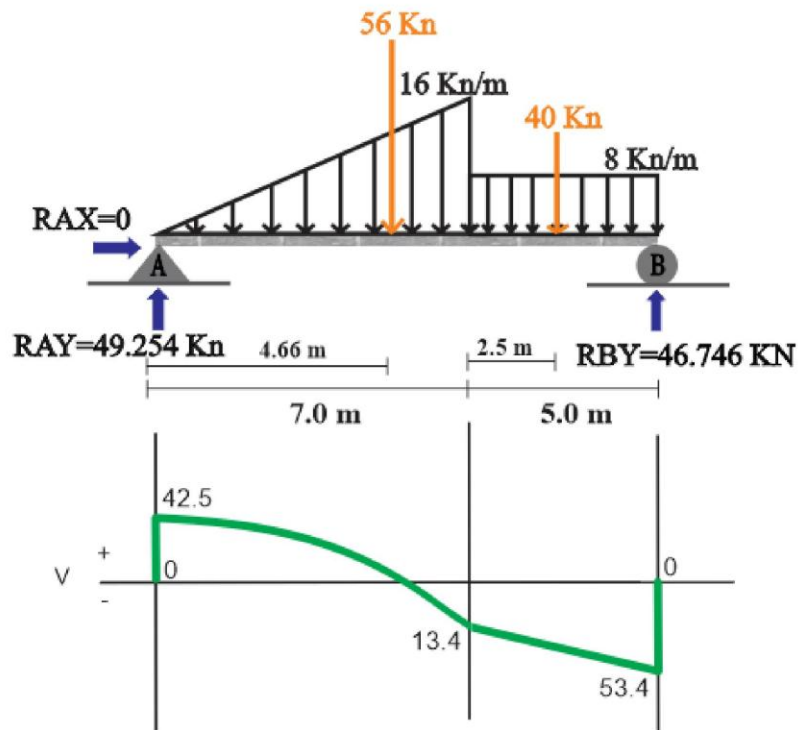
$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$53.4 - 8X + V_{c2} = 0$$

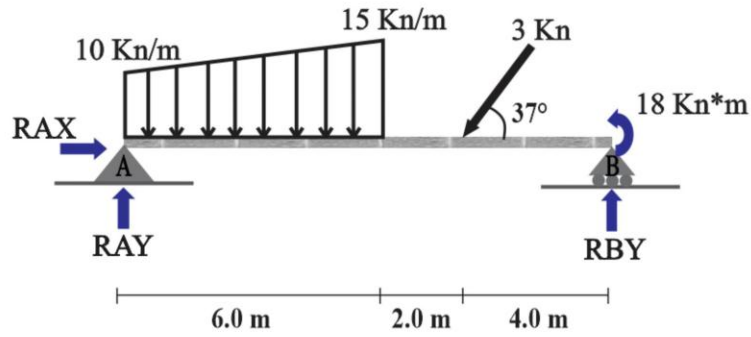
$$V_{c2} = 8X - 53.4 \quad (5;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





16.

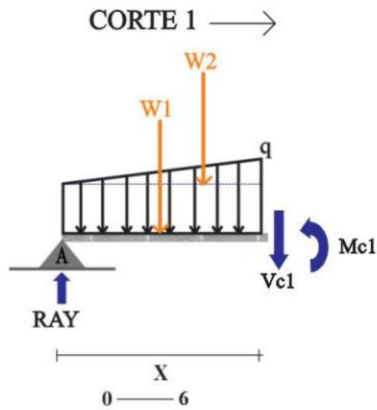


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 57.1 \text{ Kn}$

$R_{BY} = 19.7 \text{ Kn}$

$R_{AX} = 2.4 \text{ Kn}$



$\frac{q}{X} = \frac{5}{6} = q = \frac{5}{6} X$

$W = \frac{5X}{6} \left(\frac{X}{2}\right) = W_2 = \frac{5X^2}{12} \quad W_1 = 10X$

$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$

$-57.1(X) + 10X\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{5X^2}{12}\left(\frac{X}{3}\right) + M_{c1} = 0$

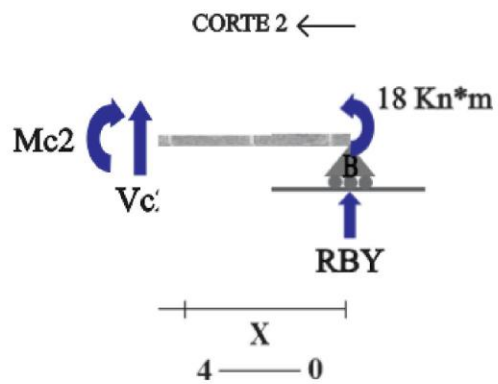
$M_{c1} = -\frac{5X^3}{36} - 5X^2 + 57.1X \quad (0;6)$

$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$

$57.1 - 10X - \frac{5X^2}{12} - V_{c1} = 0$

$V_{c1} = -\frac{5X^2}{12} - 10X + 57.1 \quad (0;6)$





$$\sum Mc_2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

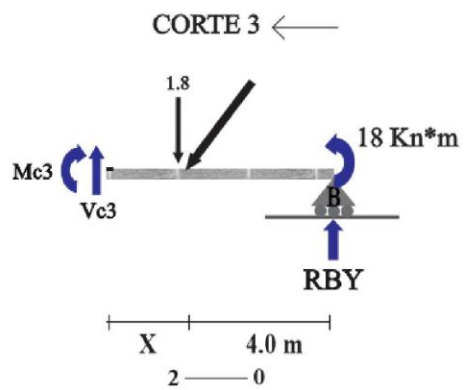
$$-18 - 19.7(X) + Mc_2 = 0$$

$$Mc_2 = 19.7X + 18 \quad (4;0)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$19.7 + V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -19.7 \quad (4;0)$$



$$\sum Mc_3 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-18 - 19.7(4+X) + 1.8(X) + Mc_3 = 0$$

$$-18 - 78.8 - 19.7X + 18X + Mc_3 = 0$$

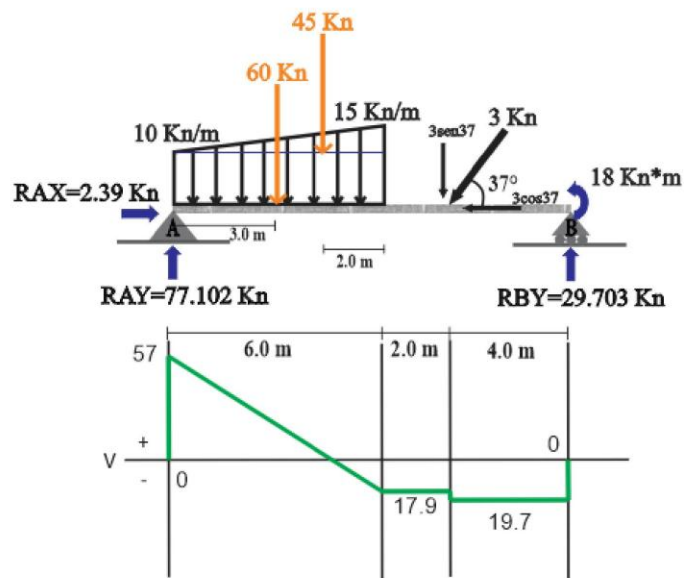
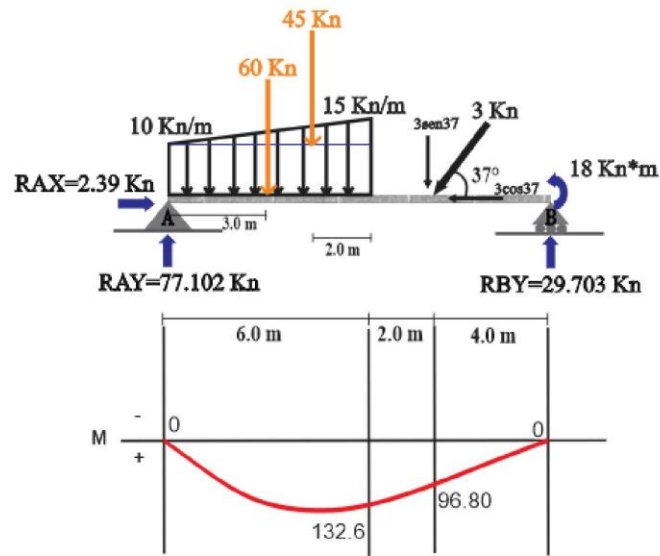
$$Mc_3 = 17.9X + 96.8 \quad (2;0)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

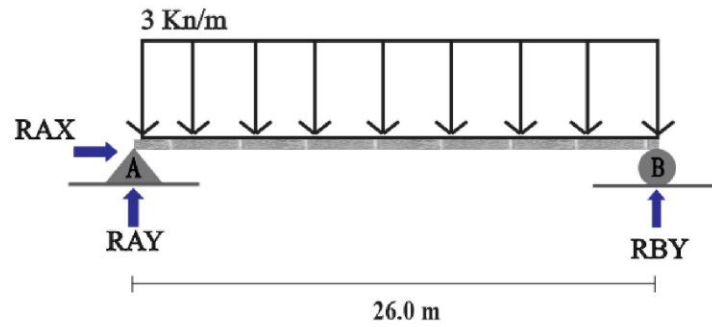
$$19.7 - 1.8 + V_{c3} = 0$$

$$V_{c3} = -17.9 \quad (2;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



17.

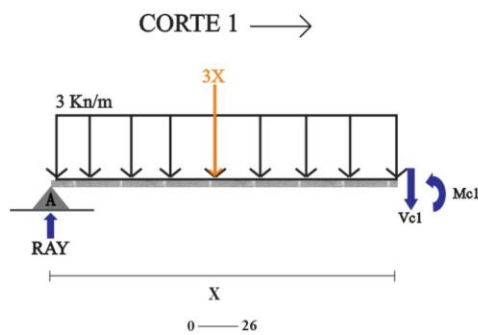


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 39.0 \text{ Kn}$$

$$RBY = 39.0 \text{ Kn}$$

$$RAX = 0$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-39(X) + 3X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

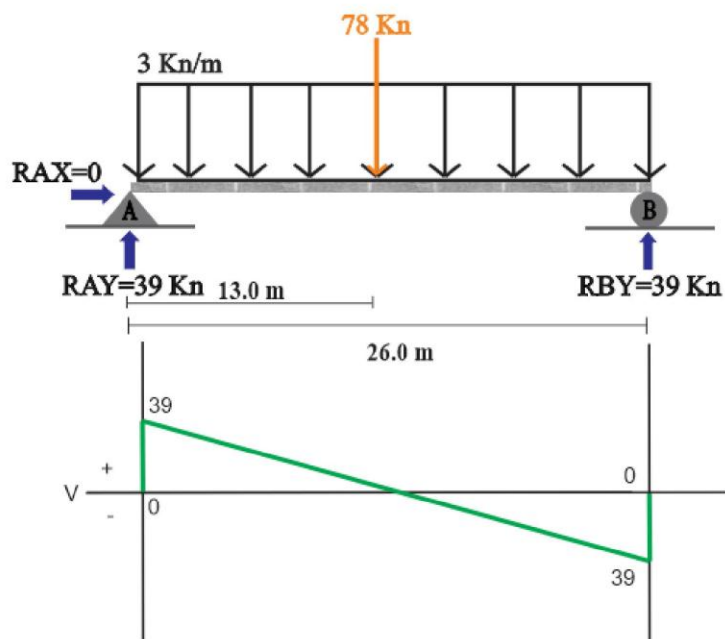
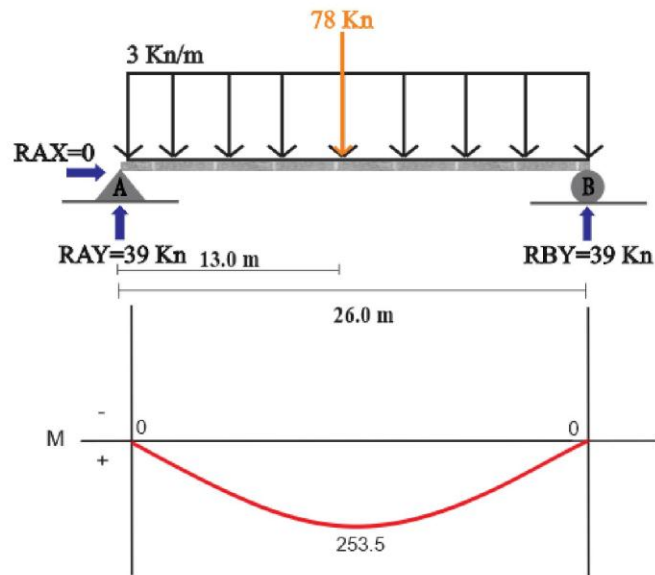
$$M_{c1} = -\frac{3X^2}{2} + 39X \quad (0;26)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

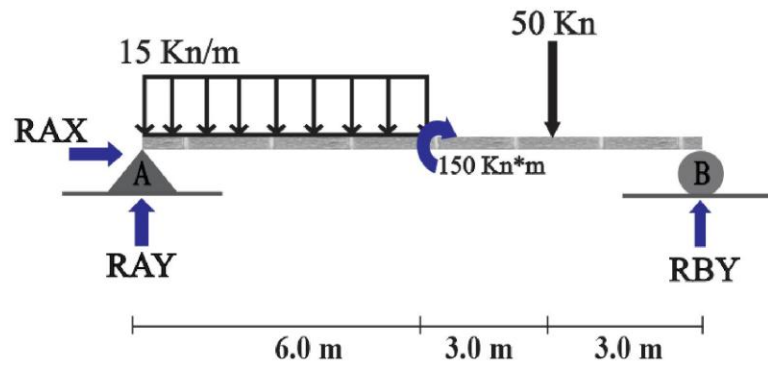
$$39 - 3X - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -3X + 39 \quad (0;26)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



18.

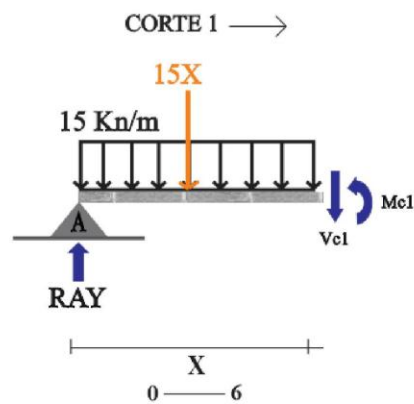


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 67.5 \text{ Kn}$$

$$RBY = 72.5 \text{ Kn}$$

$$RAX = 0$$



$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

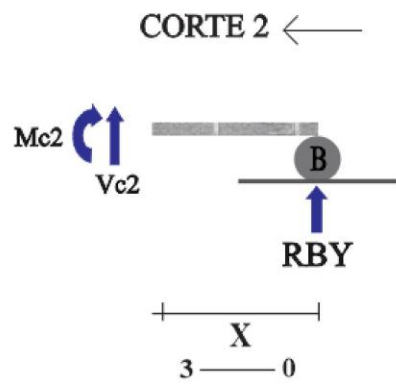
$$-67.5(X) + 15X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = -\frac{15X^2}{2} + 67.5X \quad (0;6)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$67.5 - 15X - Vc1 = 0$$

$$Vc1 = -15X + 67.5 \quad (0;6)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

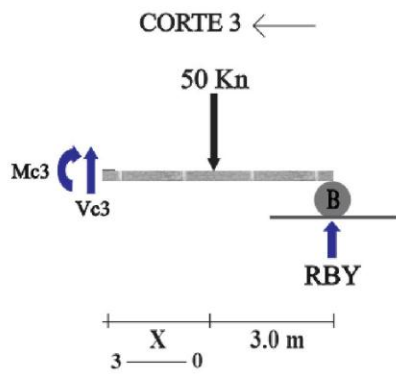
$$-72.5(X) + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = 72.5X \quad (3;0)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$72.5 + V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -72.5 \quad (3;0)$$



$$\sum M_{c3} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$-72.5(3+X) + 50(X) + M_{c3} = 0$$

$$-217.5 - 72.5X + 50X + M_{c3} = 0$$

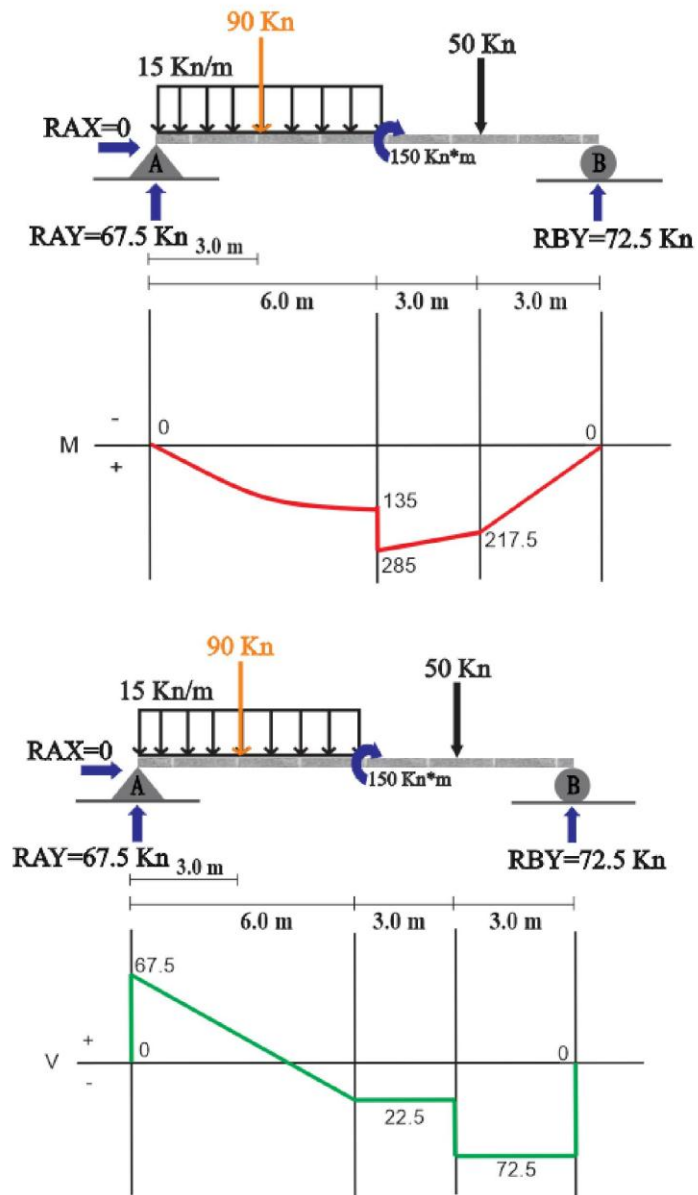
$$M_{c3} = 22.5X + 217.5 \quad (3;0)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \uparrow (+)$$

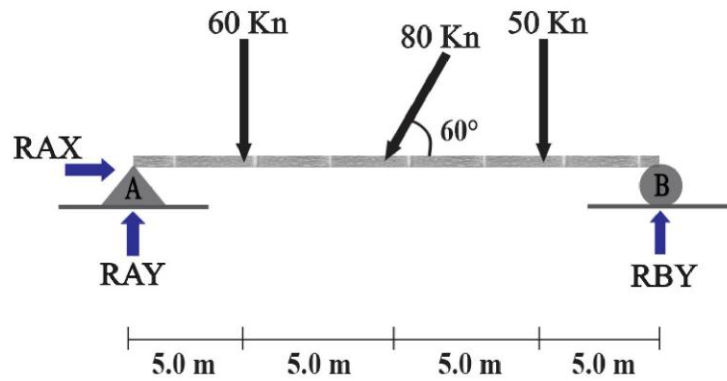
$$72.5 - 50 + V_{c3} = 0$$

$$V_{c3} = -22.5 \quad (3;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



19.

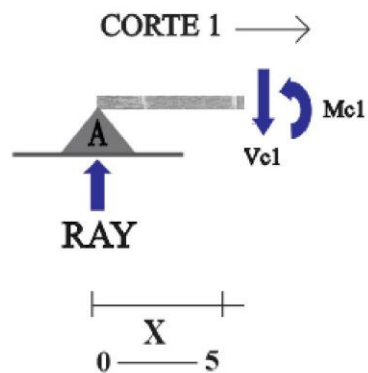


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 92.15 \text{ Kn}$$

$$RBY = 87.15 \text{ Kn}$$

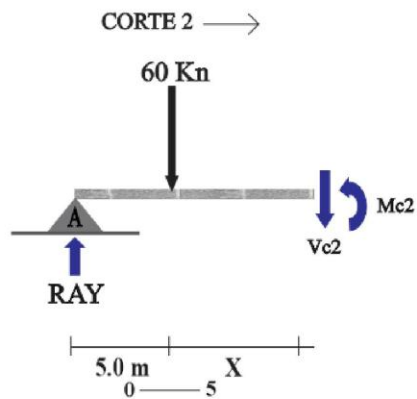
$$RAX = 40.0 \text{ Kn}$$



$$\begin{aligned} \sum M_{c1} &= 0 \quad \curvearrowright (+) \\ -92.15(X) + M_{c1} &= 0 \\ M_{c1} &= 92.15X \quad (0;5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum V_{c1} &= 0 \quad \uparrow (+) \\ 92.15 - V_{c1} &= 0 \\ V_{c1} &= 92.15 \quad (0;5) \end{aligned}$$





$$\sum M_{c2}=0 \quad \curvearrowright (+)$$

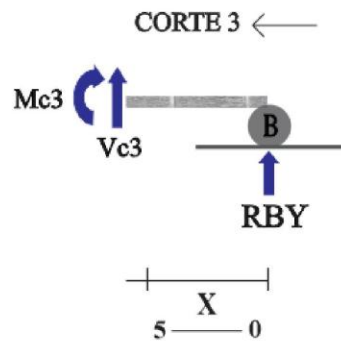
$$-92.15(5+X)+60(X)+M_{c2}=0$$

$$M_{c2} = -32.15X + 460.75 \quad (0;5)$$

$$\sum V_{c2}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$92.5-60-V_{c2}=0$$

$$V_{c2} = 32.15 \quad (0;5)$$



$$\sum M_{c3}=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

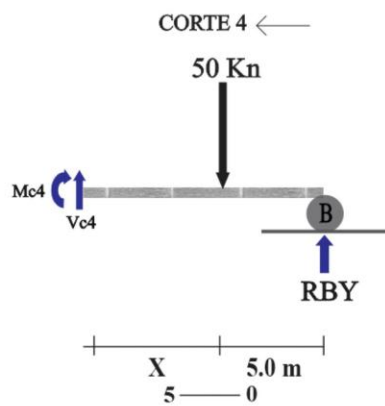
$$-87.5(X)+M_{c3}=0$$

$$M_{c3} = 87.15X \quad (5;0)$$

$$\sum V_{c3}=0 \quad \uparrow (+)$$

$$87.15+V_{c3}=0$$

$$V_{c3} = -87.15 \quad (2;0)$$



$$\sum M_{c4}=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$-87.15(5+X)+50(X)+M_{c4}=0$$

$$-435.75-87.15X+50X+M_{c4}=0$$

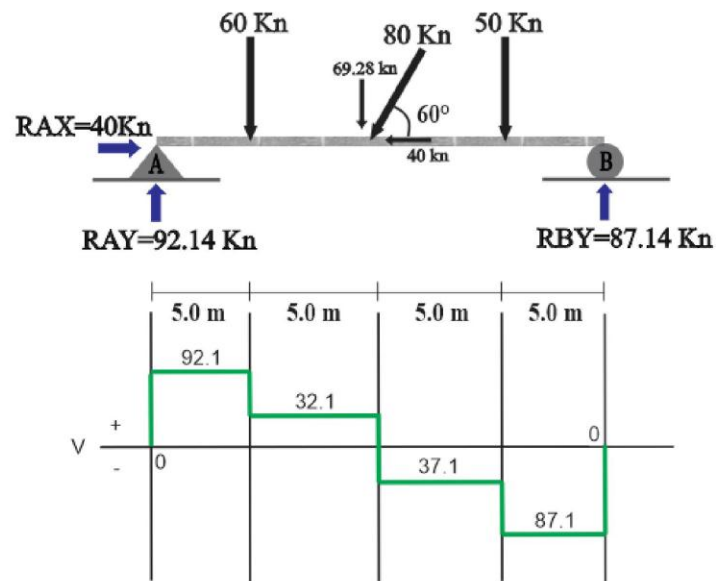
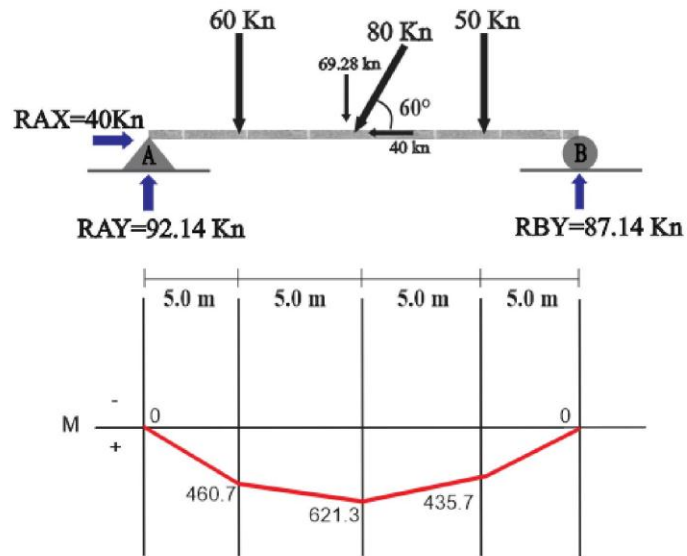
$$M_{c4} = 37.15X + 435.75 \quad (5;0)$$

$$\sum V_{c4}=0 \quad \uparrow (+)$$

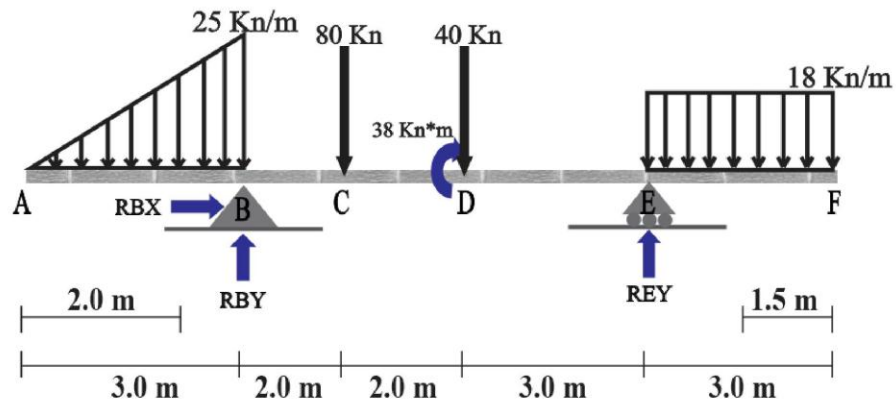
$$87.15-50+V_{c4}=0$$

$$V_{c4} = -37.15 \quad (5;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



20.

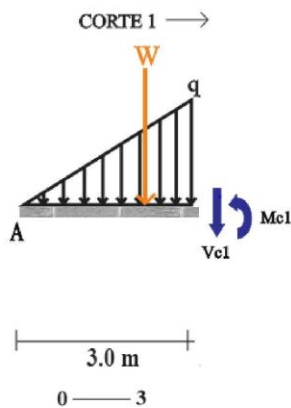


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{BY} = 100.14 \text{ Kn}$$

$$R_{EY} = 111.36 \text{ Kn}$$

$$R_{BX} = 0$$



$$\frac{q}{X} = \frac{25}{3} = q = \frac{25}{3} X$$

$$W = \frac{25X}{3} \left( \frac{X}{2} \right) = W = \frac{25X^2}{6}$$

$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

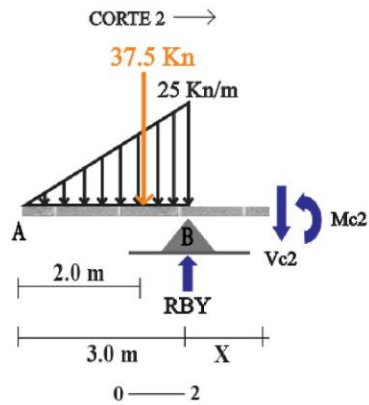
$$\frac{25X^2}{6} \left( \frac{X}{3} \right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -\frac{25X^3}{18} \quad (0;3)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-\frac{25X^2}{6} - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -\frac{25X^2}{6} \quad (0;3)$$



$$\sum Mc_2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

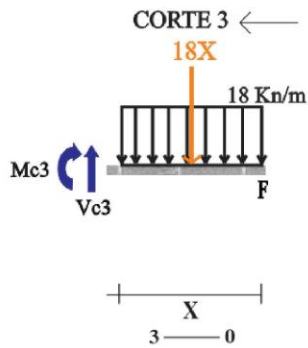
$$37.5(1+X) - 100.14(X) + Mc_2 = 0$$

$$Mc_2 = 62.64X - 37.5 \quad (0;2)$$

$$\sum Vc_2 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-37.5 + 100.14 - Vc_2 = 0$$

$$Vc_2 = 62.64 \quad (0;2)$$



$$\sum Mc_3 = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

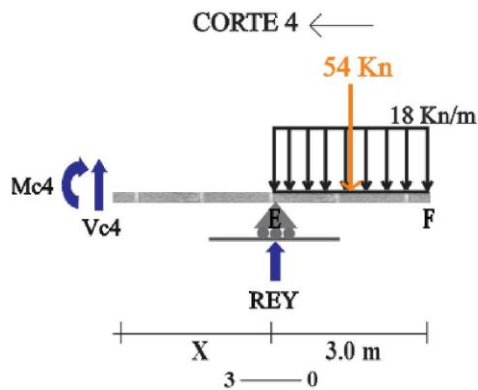
$$18X\left(\frac{X}{2}\right) + Mc_3 = 0$$

$$Mc_3 = -9X^2 \quad (3;0)$$

$$\sum Vc_3 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-18X + Vc_3 = 0$$

$$Vc_3 = 18X \quad (3;0)$$



$$\sum Mc_4 = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$54(1.5+X) - 111.36(X) + Mc_4 = 0$$

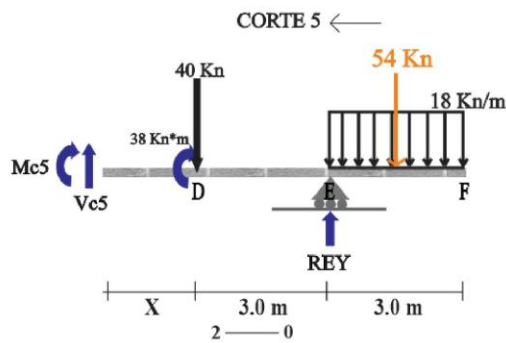
$$81 + 54X - 111.36X + Mc_4 = 0$$

$$Mc_4 = 57.36X - 81 \quad (3;0)$$

$$\sum Vc_4 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-54 + 111.36 + Vc_4 = 0$$

$$Vc_4 = -57.36 \quad (3;0)$$



$$\sum Mc5=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$54(4.5+X)-111.36(3+X)+40X+38+Mc5=0$$

$$243+54X-334.08-111.36X+40X+38+Mc5=0$$

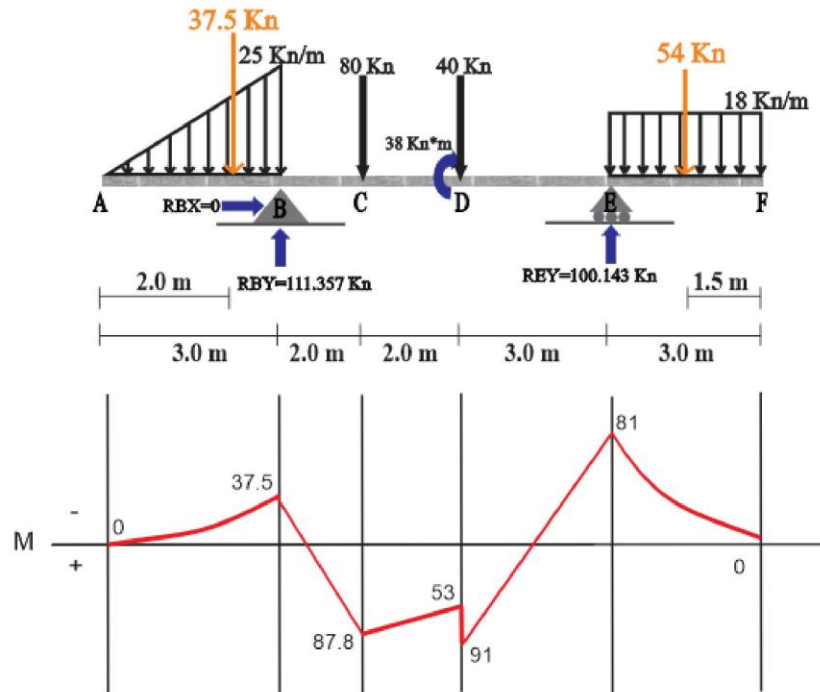
$$Mc5 = 17.36X + 53.08 \quad (2;0)$$

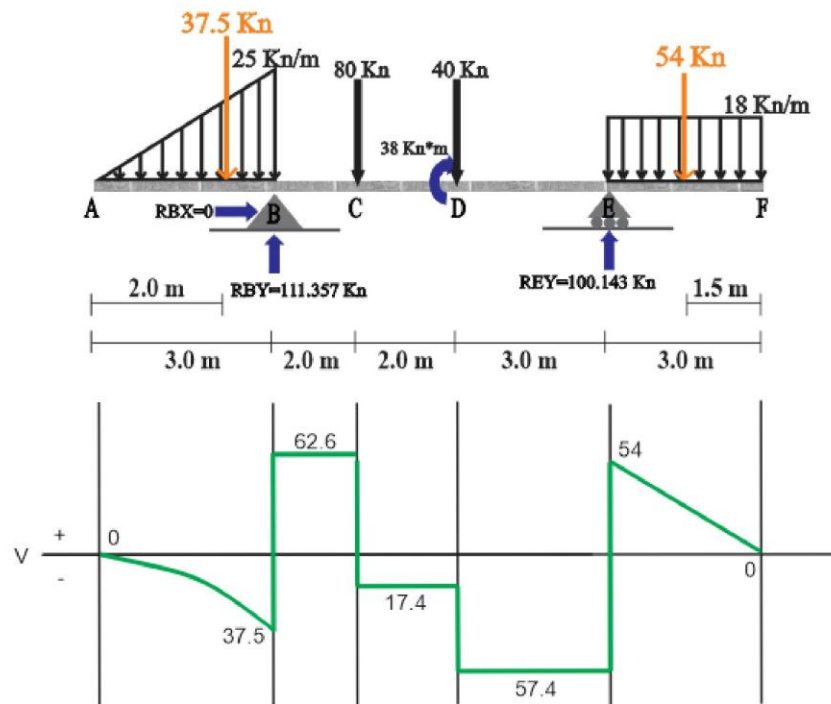
$$\sum Vc5=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-54+111.36-40+Vc5=0$$

$$Vc5 = 17.36 \quad (2;0)$$

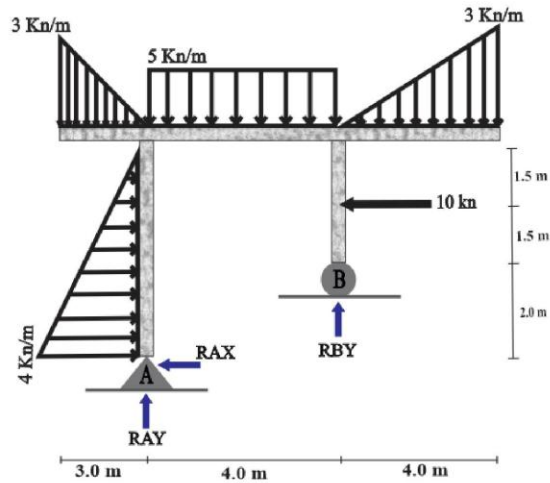
Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





## PÓRTICOS RESUELTOS

1.

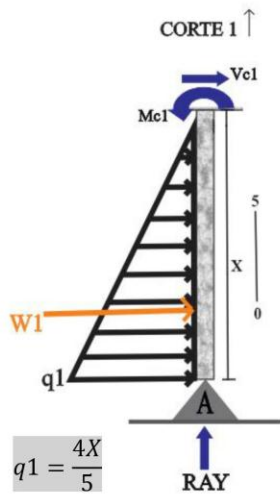


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 17.32 \text{ Kn}$

$R_{AX} = 0$

$R_{BY} = 13.18 \text{ Kn}$



$q1 = \frac{4X}{5}$

$W1 = \frac{4X}{5} \left( \frac{X}{2} \right) = W1 = \frac{4X^2}{10}$

$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$

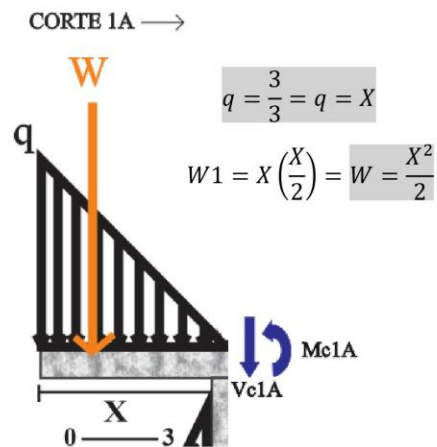
$\frac{4X^2}{10} \left( \frac{2X}{3} \right) + M_{c1} = 0$

$M_{c1} = -\frac{4X^3}{15} \quad (0,5)$

$\sum V_{c1} = 0 \quad \rightarrow (+)$

$\frac{4X^2}{10} + V_{c1} = 0$

$V_{c1} = -\frac{4X^2}{10} \quad (0,5)$



$$\sum Mc1A = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

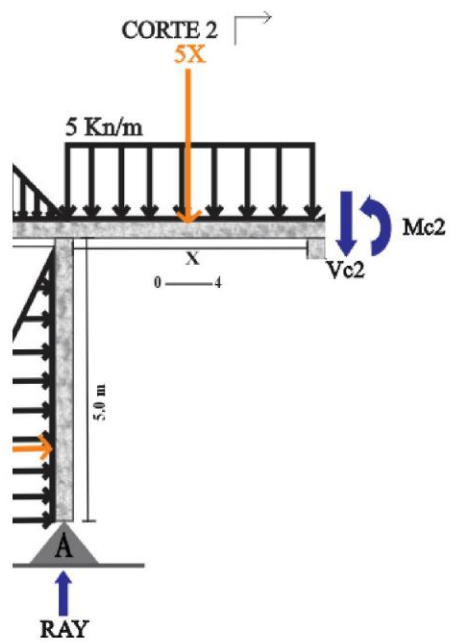
$$\frac{X^2}{2} \left( \frac{2X}{3} \right) + Mc1A = 0$$

$$Mc1A = -\frac{X^3}{3} \quad (0;3)$$

$$\sum Vc1A = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-\frac{X^2}{2} - Vc1A = 0$$

$$Vc1A = -\frac{X^2}{2} \quad (0;3)$$



$$\sum Mc2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-17.32(X) + 10 \left( \frac{10}{3} \right) + 5X \left( \frac{X}{2} \right) + Mc2 = 0$$

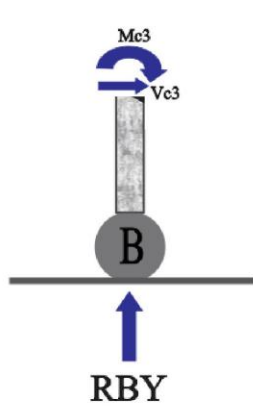
$$Mc2 = -\frac{5X^2}{2} + 17.32X - 33.33 \quad (0;4)$$

$$\sum Vc3 = 0 \quad \uparrow (+)$$

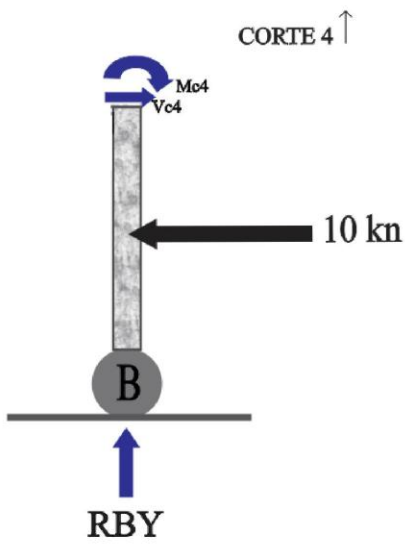
$$17.32 - 5X - Vc2 = 0$$

$$Vc2 = -5X + 17.32 \quad (0;4)$$

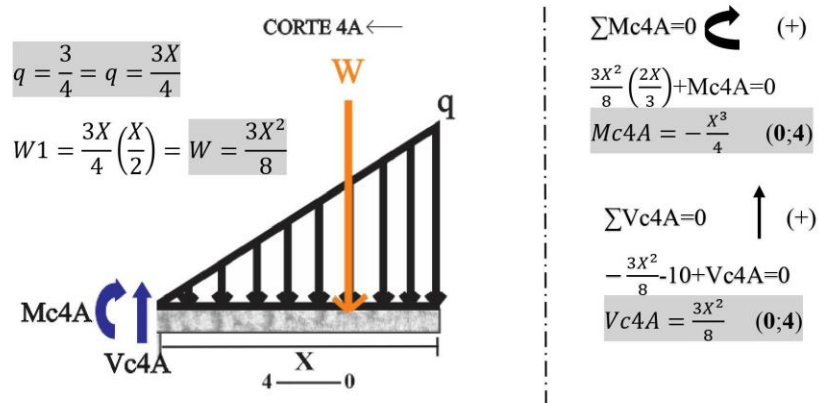




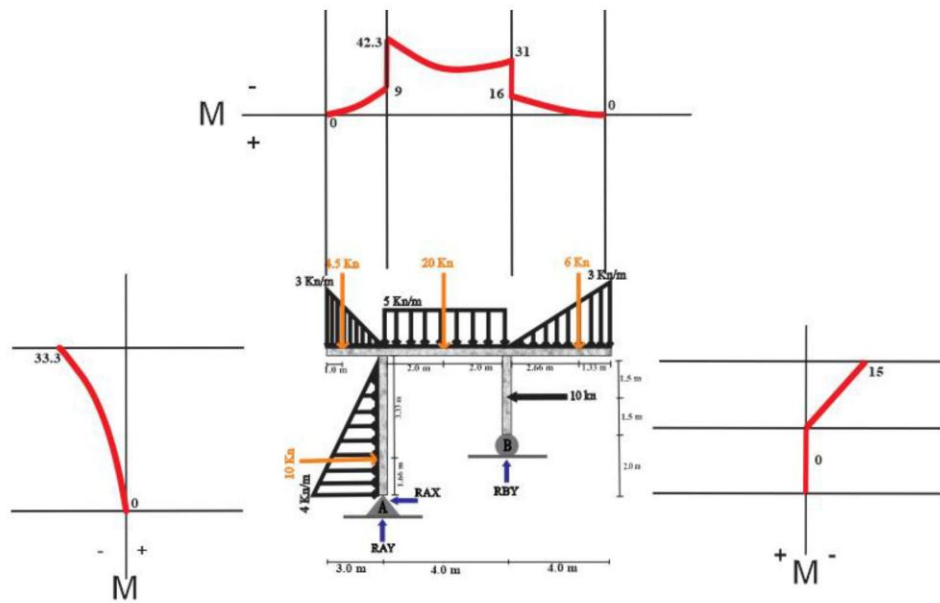
$$\begin{aligned} \sum M_{c3} &= 0 \quad \curvearrowleft (+) \\ M_{c3} &= 0 \\ \sum V_{c3} &= 0 \quad \rightarrow (+) \\ V_{c3} &= 0 \end{aligned}$$

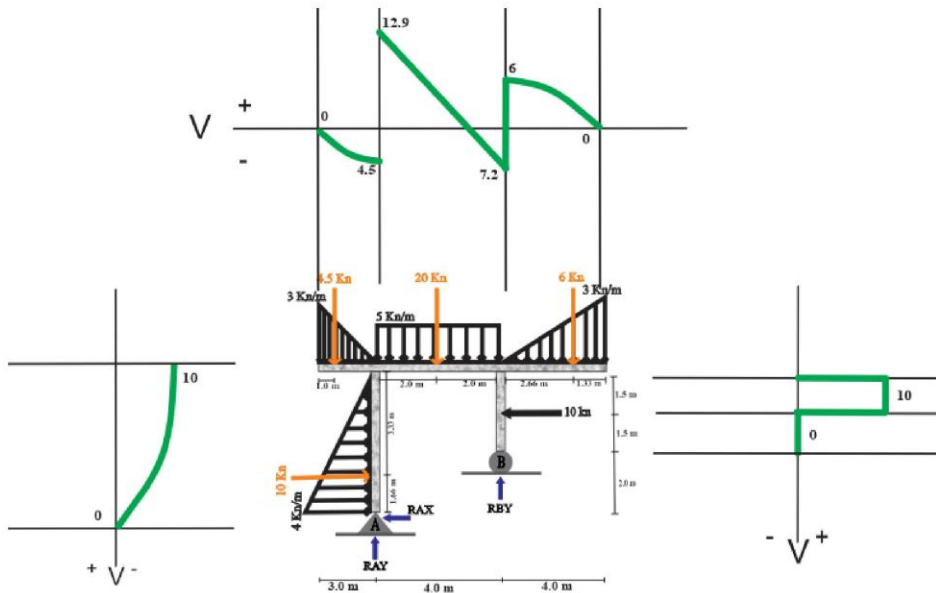


$$\begin{aligned} \sum M_{c4} &= 0 \quad \curvearrowleft (+) \\ 10(X) + M_{c4} &= 0 \\ M_{c4} &= -10X \quad (0; 1.5) \\ \sum V_{c4} &= 0 \quad \rightarrow (+) \\ -10 + V_{c4} &= 0 \\ V_{c4} &= 10 \quad (0; 1.5) \end{aligned}$$

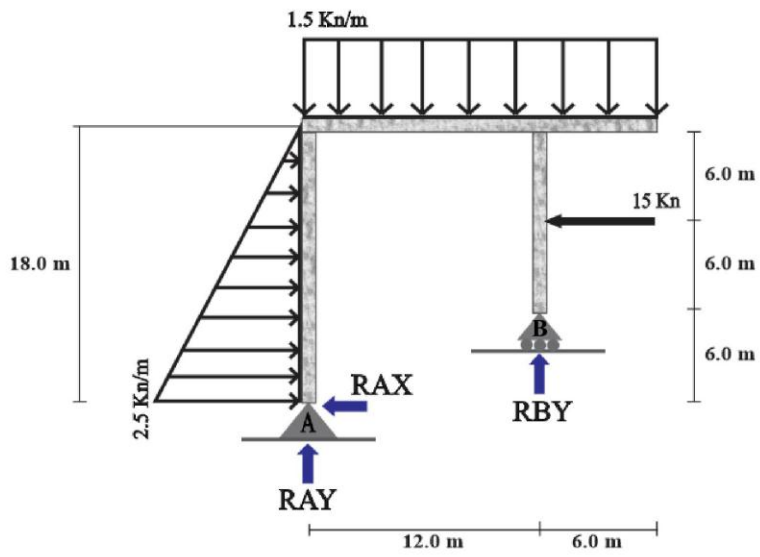


Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





2.

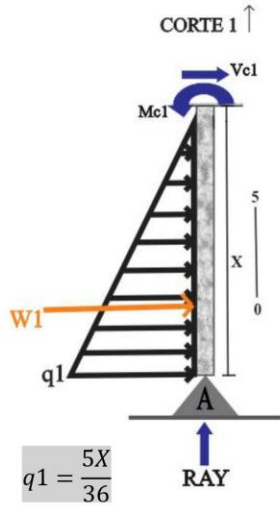


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 10.5 \text{ Kn}$

$R_{BY} = 16.5 \text{ Kn}$

$R_{AX} = 7.5 \text{ Kn}$



$$W1 = \frac{5X}{36} \left( \frac{X}{2} \right) = W1 = \frac{5X^2}{72}$$

$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

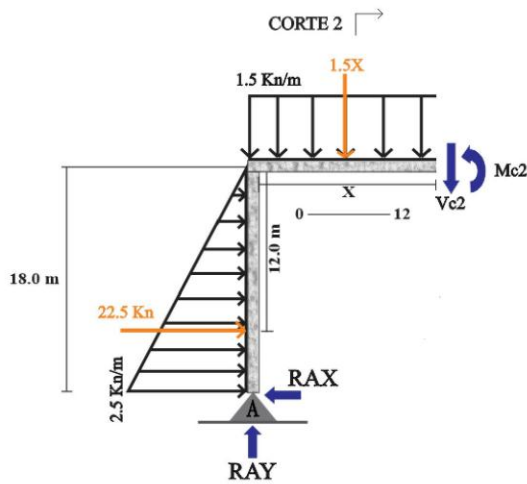
$$Mc1 - 7.5X + \frac{5X^2}{72} \left( \frac{2X}{3} \right) = 0$$

$$Mc1 = -\frac{5X^3}{108} + 7.5X \quad (0;18)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-7.5 + \frac{5X^2}{72} + Vc1 = 0$$

$$Vc1 = -\frac{5X^2}{72} + 7.5 \quad (0;18)$$



$$\sum Mc2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-7.5(18) - 10.5(X) + 22.5(12) + 1.5 \left( \frac{X}{2} \right) + Mc2 = 0$$

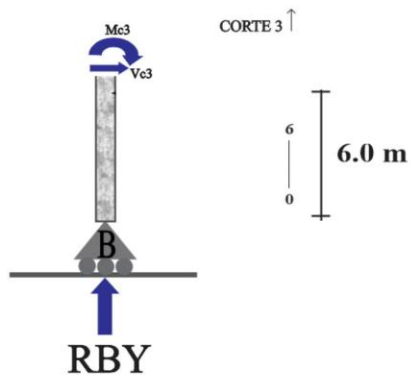
$$-135 - 10.5X + 270 + \frac{3}{4}X^2 + Mc2 = 0$$

$$Mc2 = -\frac{3X^2}{4} + 10.5X - 135 \quad (0;12)$$

$$\sum Vc2 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$10.5 - 1.5X - Vc2 = 0$$

$$Vc2 = -1.5X + 10.5 \quad (0;12)$$

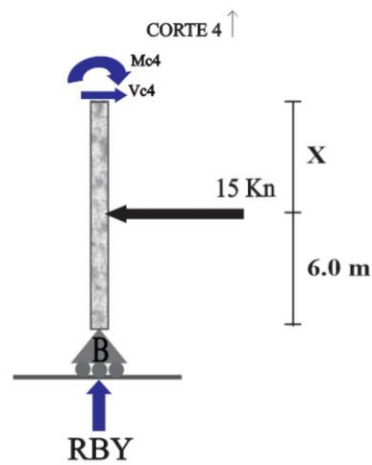


$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$Mc3 = 0 \quad (0;6)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$Vc3 = 0 \quad (0;6)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

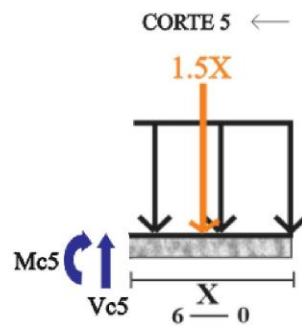
$$15X + Mc4 = 0$$

$$Mc4 = -15X \quad (0;6)$$

$$\sum Vc4=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-15 + Vc3 = 0$$

$$Vc4 = 15 \quad (0;6)$$



$$\sum Mc5=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$1.5(X)\left(\frac{X}{2}\right) + Mc5 = 0$$

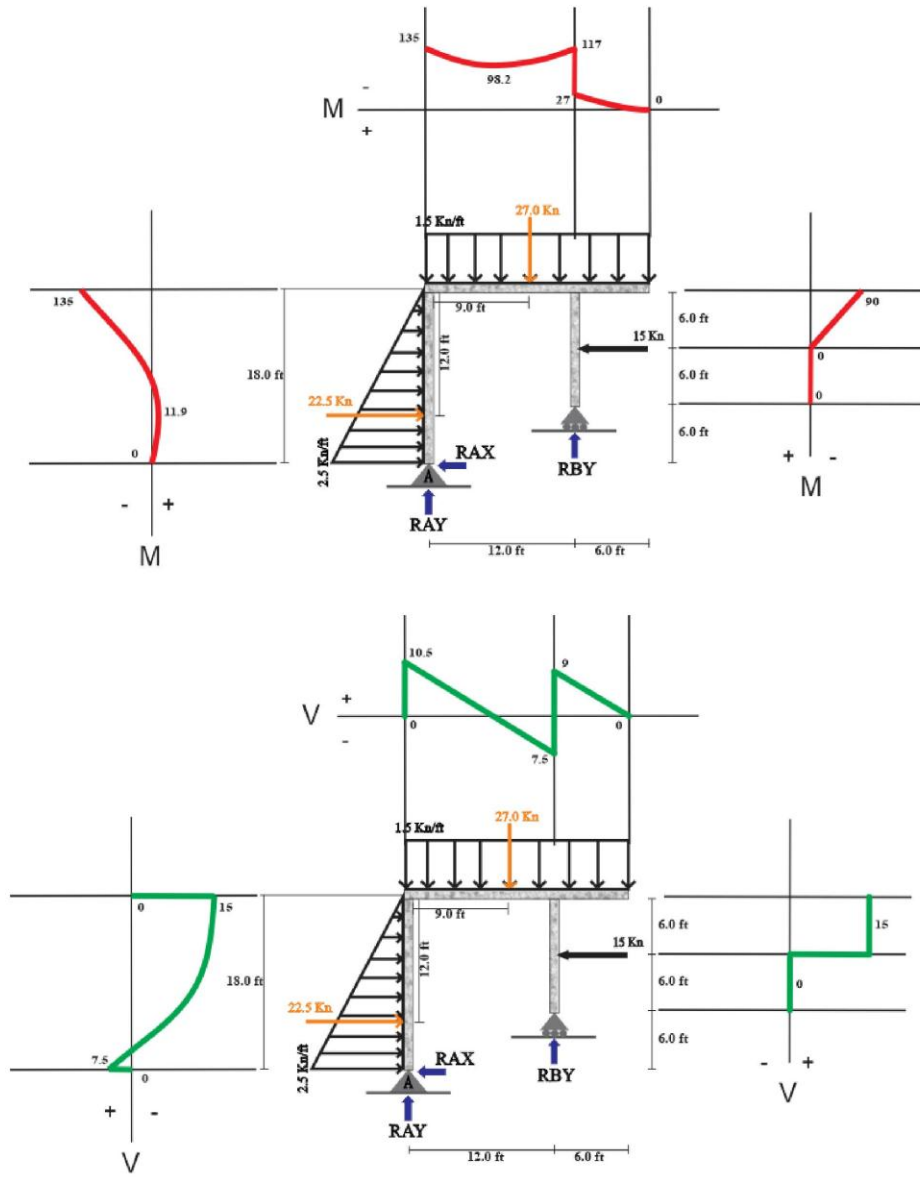
$$Mc5 = -\left(\frac{3X^2}{4}\right) \quad (0;6)$$

$$\sum Vc5=0 \quad \uparrow (+)$$

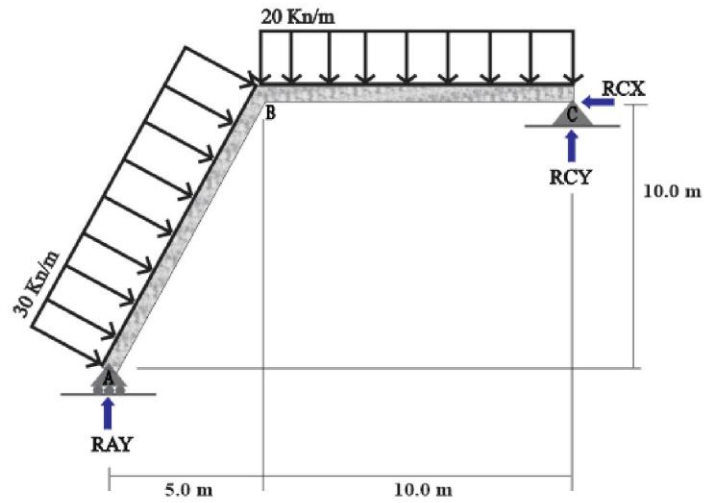
$$-1.5 + Vc5 = 0$$

$$Vc5 = 1.5X \quad (0;6)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



3.

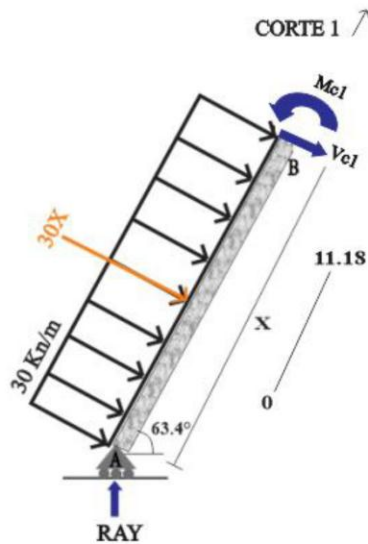


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 291.67 \text{ Kn}$$

$$RBY = 58.33 \text{ Kn}$$

$$RBX = 300.0 \text{ Kn}$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-291.67 \cdot \cos 63.4 (X) + 30X \left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

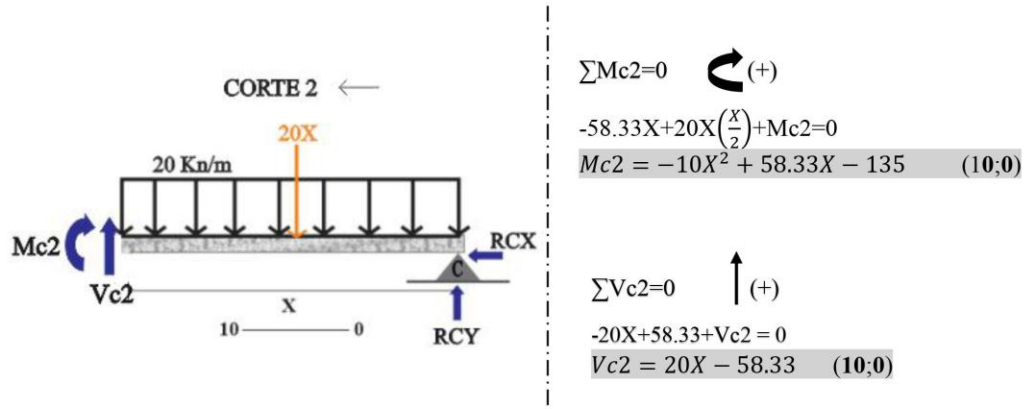
$$-130.6X + 15X^2 + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -15X^2 + 130.6X \quad (0; 11.18)$$

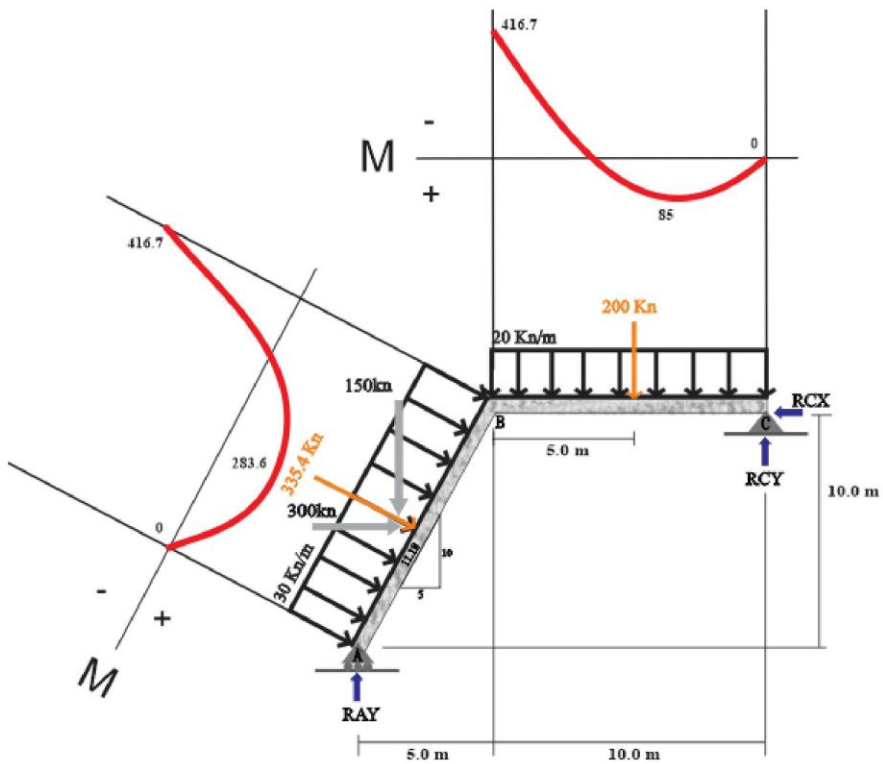
$$\sum V_{c1} = 0 \quad \nearrow (+)$$

$$291.67 \cdot \cos 63.4 - 30X - V_{c1} = 0$$

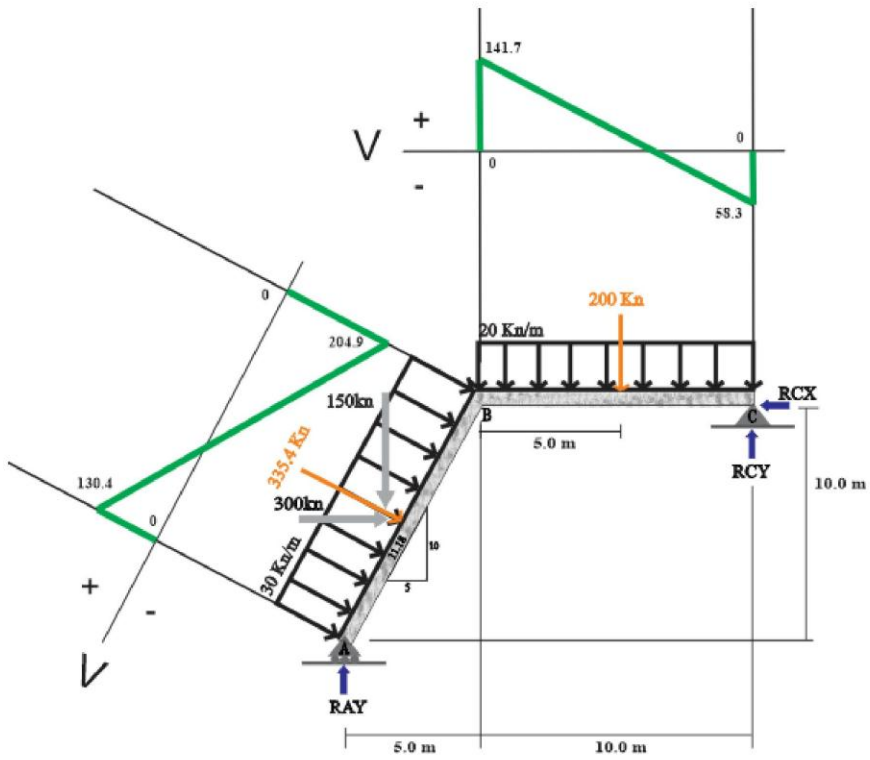
$$V_{c1} = -30X + 130.6 \quad (0; 11.18)$$



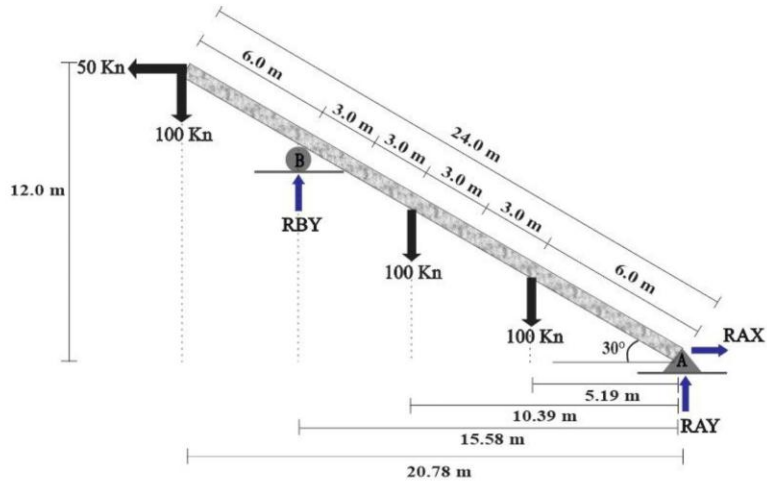
Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:







4.

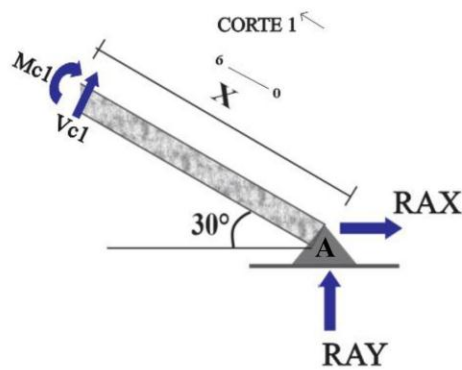


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{AY} = 28.2 \text{ Kn}$$

$$R_{BY} = 271.8 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 50 \text{ Kn}$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

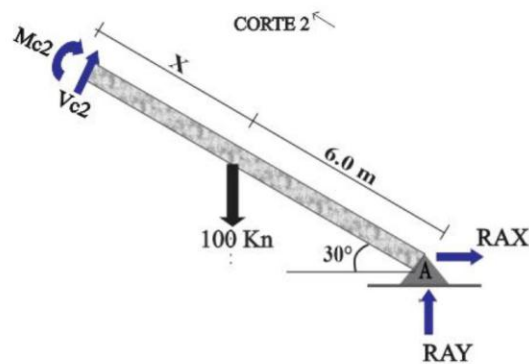
$$-50 \cdot \text{Sen}30(X) - 28.2 \cdot \text{Cos}30(X) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = 49.4X \quad (0;6)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \nearrow (+)$$

$$V_{c1} + 28.2 \cdot \text{Cos}30 + 50 \cdot \text{Sen}30 = 0$$

$$V_{c1} = -49.4 \quad (0;6)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$-50 \cdot \text{Sen}30(6+X) - 28.2 \cdot \text{Cos}30(6+X) + 100 \cdot \text{Cos}30(X) + M_{c2} = 0$$

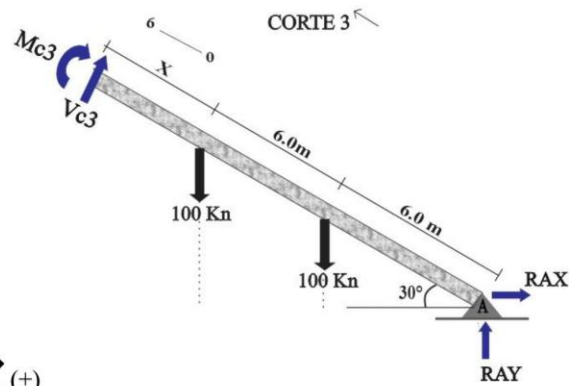
$$-146.4 - 24.4X + 86.6X + M_{c2} - 150 - 25X = 0$$

$$M_{c2} = -37.2X + 296.4 \quad (0;6)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \nearrow (+)$$

$$28.2 \cdot \text{Cos}30 - 100 \cdot \text{Cos}30 + 50 \cdot \text{Sen}30 + V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = 37.2 \quad (0;6)$$



$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$Mc3-50*\text{Sen}30(12+X)-28.2*\text{Cos}30(12+X)+100*\text{Cos}30(6+X)+100*\text{Cos}30(X) = 0$$

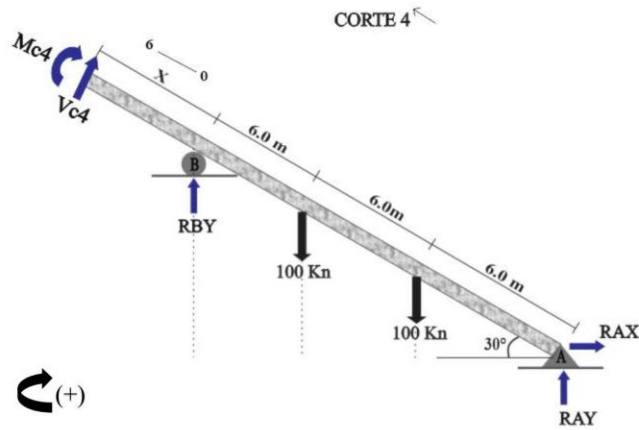
$$Mc3-300-25X-292.8-24.4X+519.6+86.6X+86.6X = 0$$

$$Mc3 = -123.8X + 73.2 \quad (0;6)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \nearrow (+)$$

$$Vc3-100*\text{Cos}30-100*\text{cos}30+28.2*\text{Cos}30+50*\text{Sen}30 = 0$$

$$Vc3 = 123.8 \quad (0;6)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$Mc4-50*\text{Sen}30(18+X)-28.2*\text{Cos}30(18+X)+100*\text{Cos}30(12+X)+100*\text{Cos}30(6+X)-271.8\text{Cos}30(X) = 0$$

$$Mc4-450-25X-439.2-24.4X+1039.2+86.6X+519.6+86.6X-235.4X = 0$$

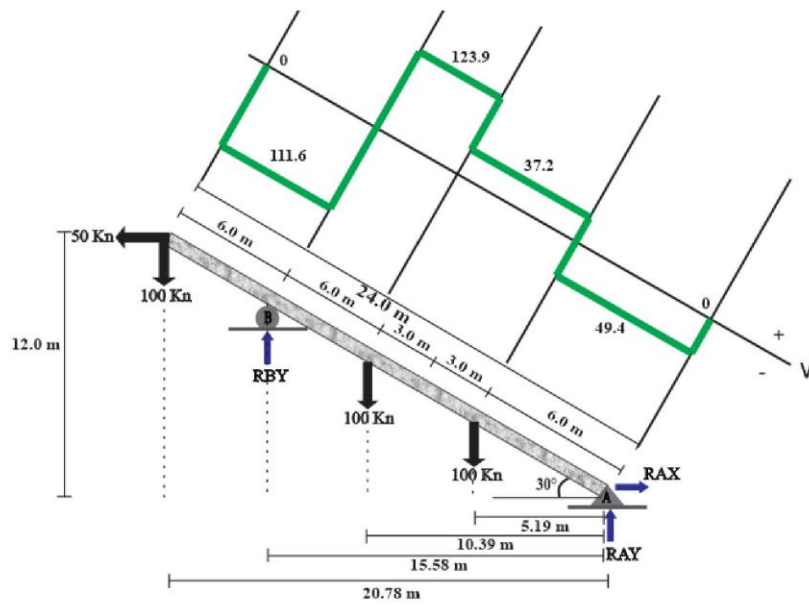
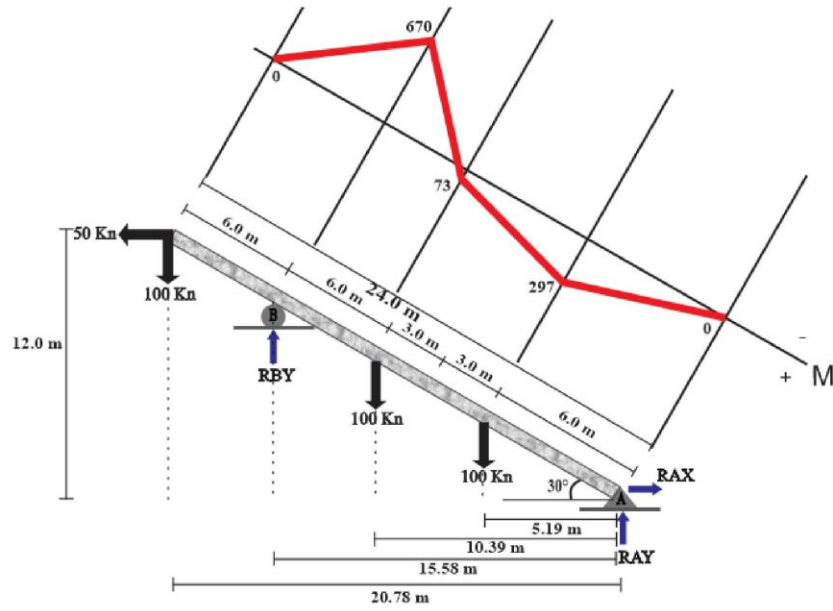
$$Mc4 = -111.6X - 669.6 \quad (0;6)$$

$$\sum Vc4=0 \quad \nearrow (+)$$

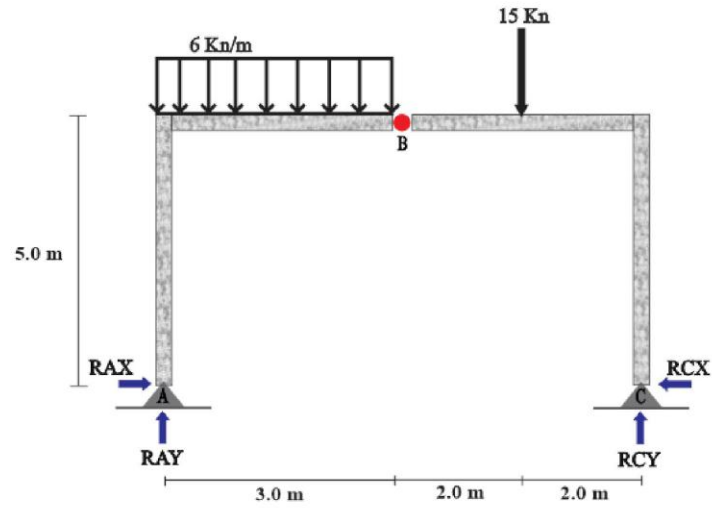
$$Vc4+271.8*\text{Cos}30-100*\text{cos}30-100*\text{Cos}30+28.2*\text{Cos}30+50*\text{Sen}30 = 0$$

$$Vc4 = 111.6 \quad (0;6)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:

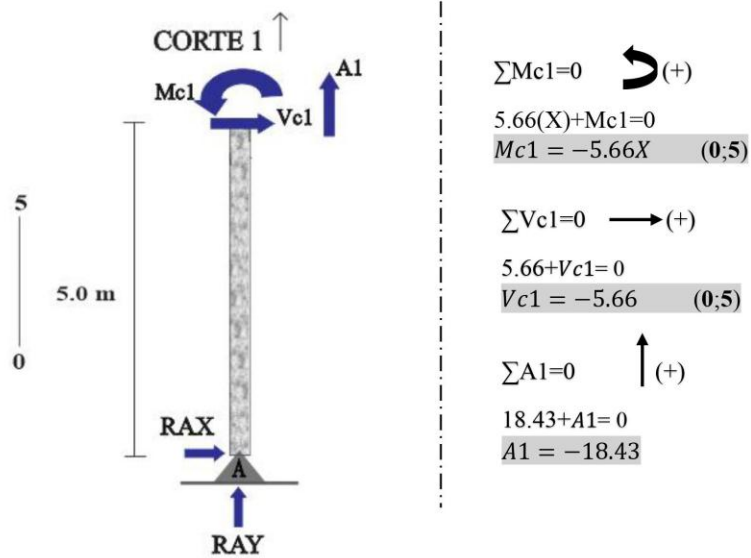


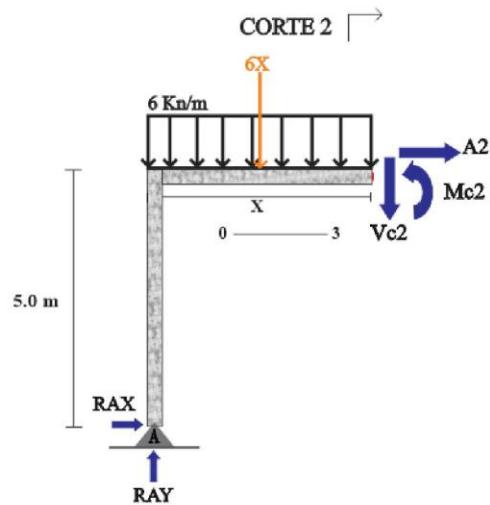
5.



Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$\begin{array}{ll} RAY = 18.43 \text{ Kn} & RAX = 5.66 \text{ Kn} \\ RBY = 14.57 \text{ Kn} & RBX = 5.66 \text{ Kn} \end{array}$$





$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$6X \left(\frac{X}{2}\right) + 5.66(5) - 18.43(X) + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = -3X^2 + 18.43X - 28.3 \quad (0;3)$$

$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

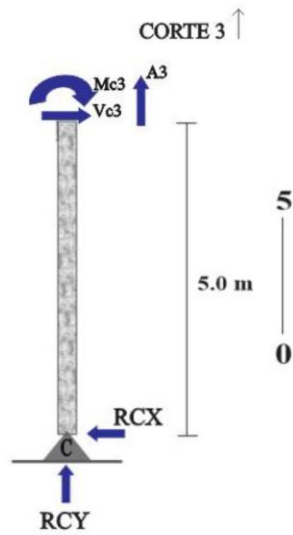
$$18.43 - 6X - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -6X + 18.43 \quad (0;3)$$

$$\sum A_2 = 0 \quad \rightarrow (+)$$

$$5.66 + A_2 = 0$$

$$A_2 = -5.66$$



$$\sum M_{c3} = 0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$5.66(X) + M_{c3} = 0$$

$$M_{c3} = -5.66X \quad (0;5)$$

$$\sum V_{c3} = 0 \quad \rightarrow (+)$$

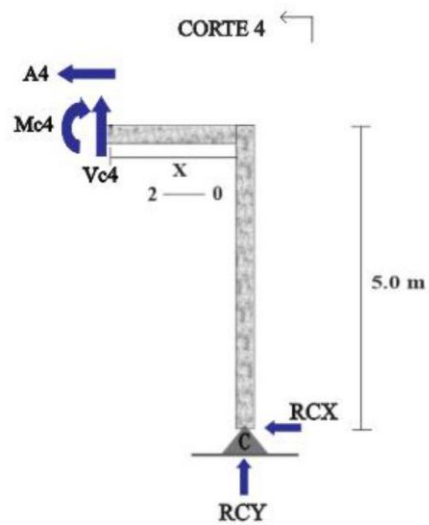
$$-5.66 + V_{c3} = 0$$

$$V_{c3} = 5.66 \quad (0;5)$$

$$\sum A_3 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$14.57 + A_3 = 0$$

$$A_3 = -14.57$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14.57(X)+5.66(5)+Mc4=0$$

$$Mc4 = 14.57X - 28.3 \quad (2;0)$$

$$\sum Vc4=0 \quad \uparrow (+)$$

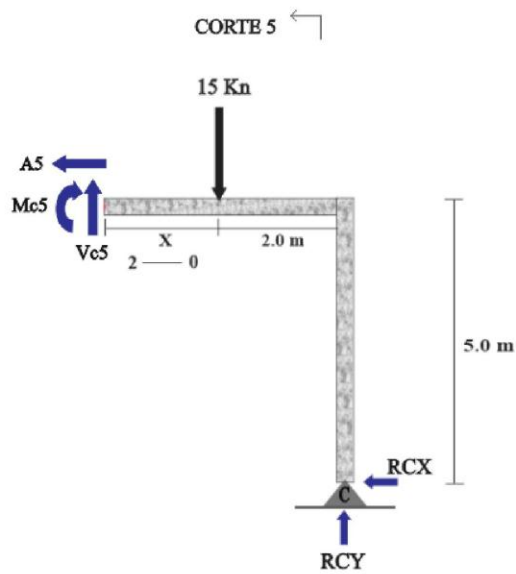
$$14.57+Vc4=0$$

$$Vc4 = -14.57 \quad (2;0)$$

$$\sum A4=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-5.66-A4=0$$

$$A4 = -5.66$$



$$\sum Mc5=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14.57(2+X)+5.66(5)+15(X)+Mc5=0$$

$$Mc5 = -0.43X + 0.84 \quad (2;0)$$

$$\sum Vc5=0 \quad \uparrow (+)$$

$$14.57-15+Vc5=0$$

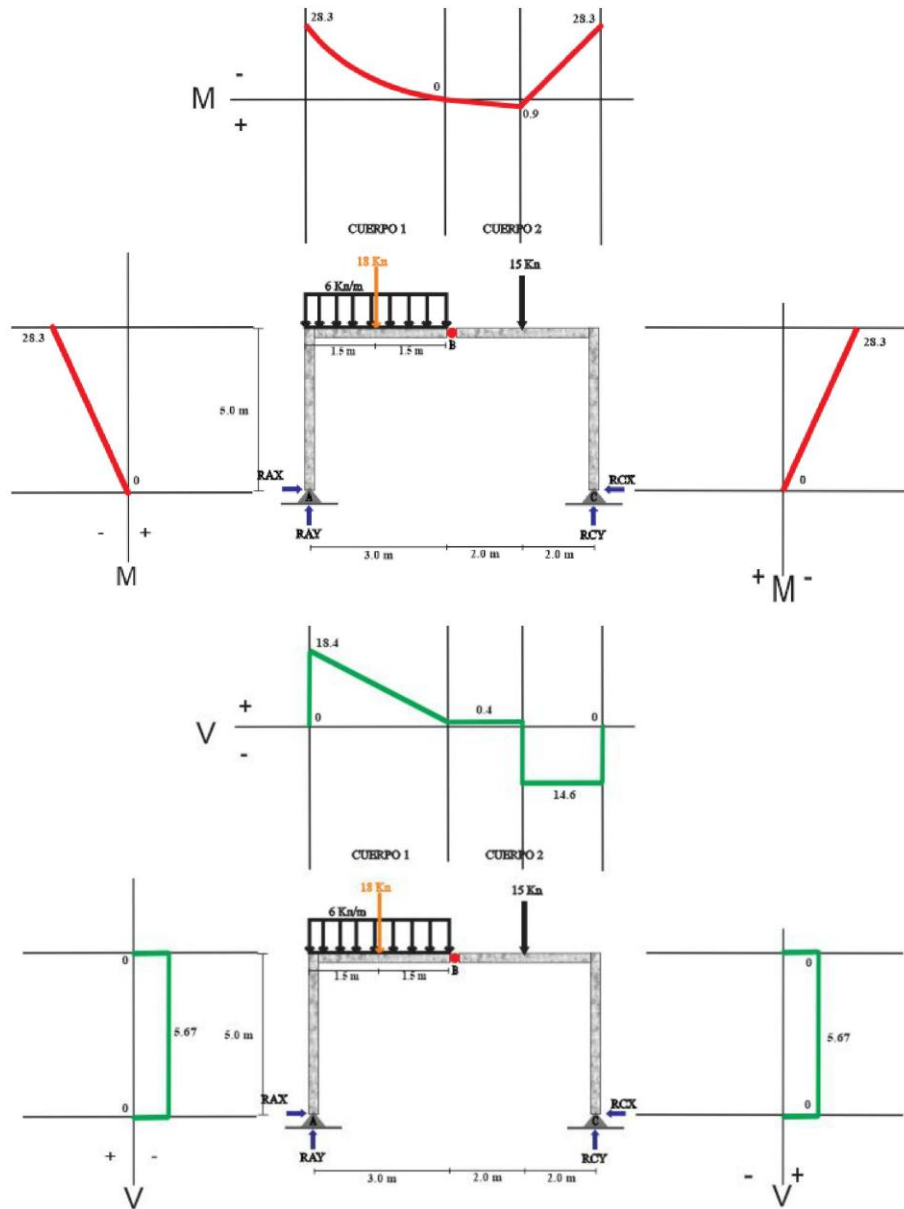
$$Vc5 = 0.43 \quad (2;0)$$

$$\sum Vc5=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-5.66-A5=0$$

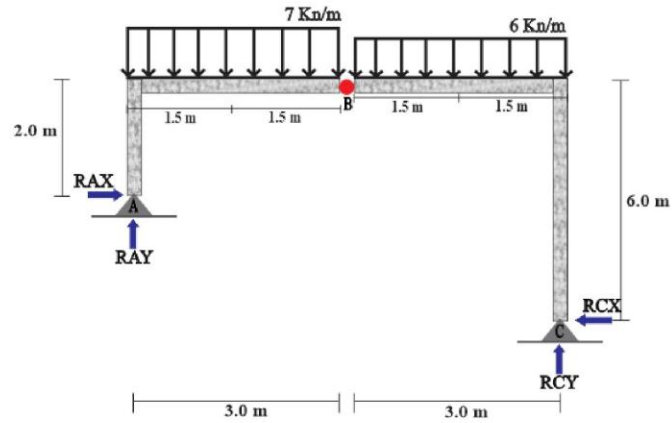
$$Vc5 = -5.66 \quad (2;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





6.



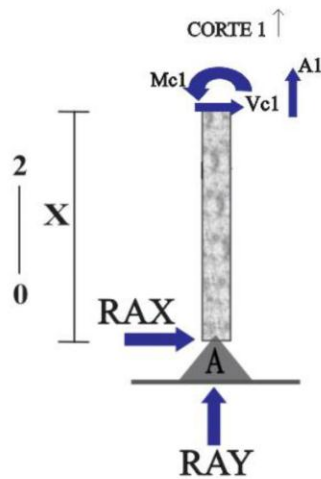
Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{AY} = 15.37 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 7.31 \text{ Kn}$$

$$R_{CY} = 23.63 \text{ Kn}$$

$$R_{CX} = 7.31 \text{ Kn}$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$7.31(X) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -7.31X \quad (0;2)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \rightarrow (+)$$

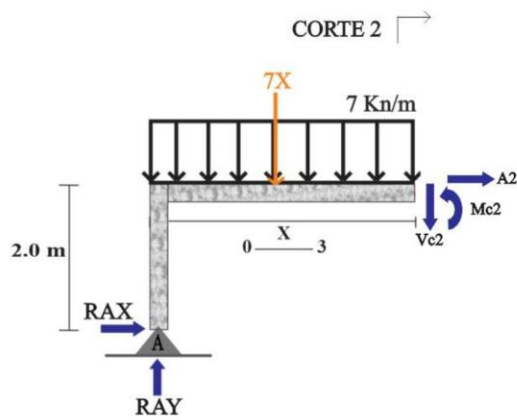
$$7.31 + V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -7.31 \quad (0;5)$$

$$\sum A_1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$15.37 + A_1 = 0$$

$$A_1 = -15.37$$



$$\sum Mc2=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-15.37(X)+7.31(2)+7X\left(\frac{X}{2}\right)+Mc2=0$$

$$Mc1A = -\frac{7X^2}{2} + 15.37X - 14.62 \quad (0;3)$$

$$\sum Vc2=0 \quad \uparrow (+)$$

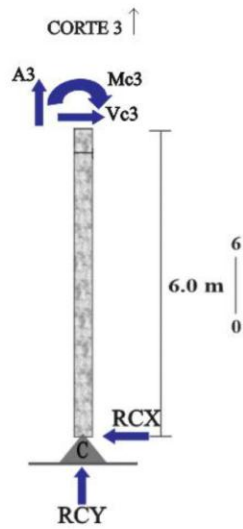
$$15.37-7X-Vc2=0$$

$$Vc2 = -7X + 15.37 \quad (0;3)$$

$$\sum A2=0 \quad \rightarrow (+)$$

$$7.31+A2=0$$

$$A1 = -7.31$$



$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$7.31(X)+Mc3=0$$

$$Mc3 = -7.31X \quad (0;6)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \rightarrow (+)$$

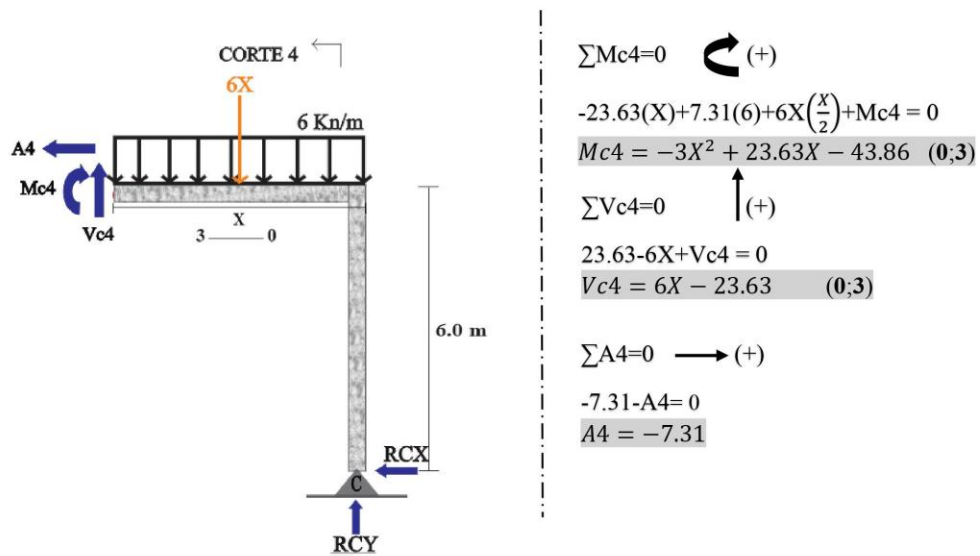
$$-7.31+Vc3=0$$

$$Vc3 = 7.31 \quad (0;5)$$

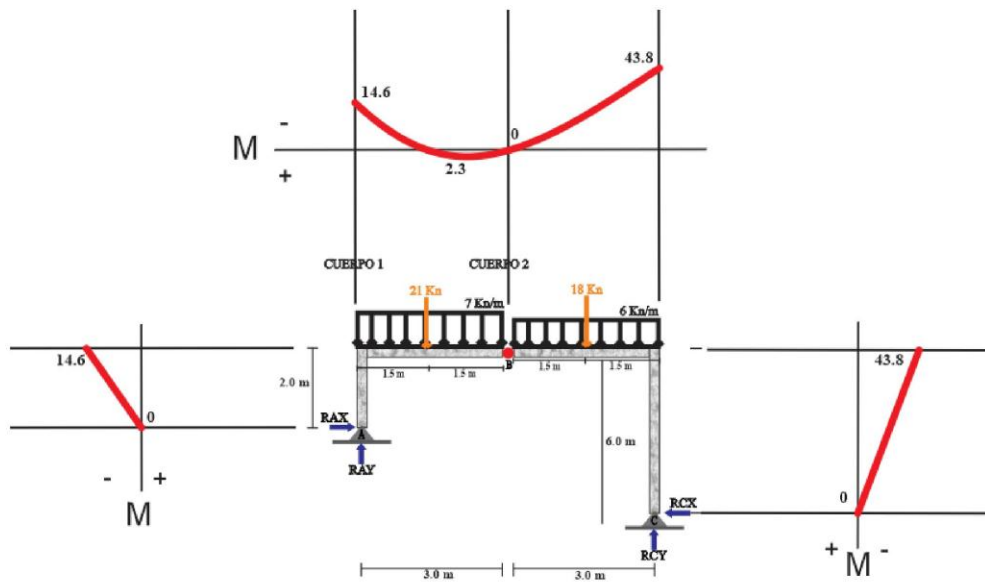
$$\sum A3=0 \quad \uparrow (+)$$

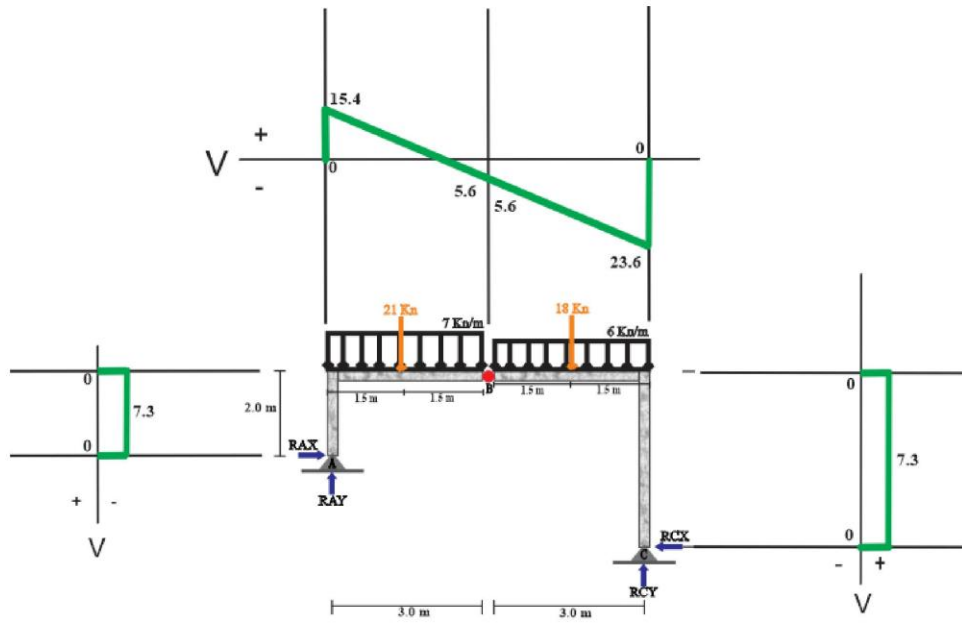
$$23.63+A3=0$$

$$A3 = -23.63$$

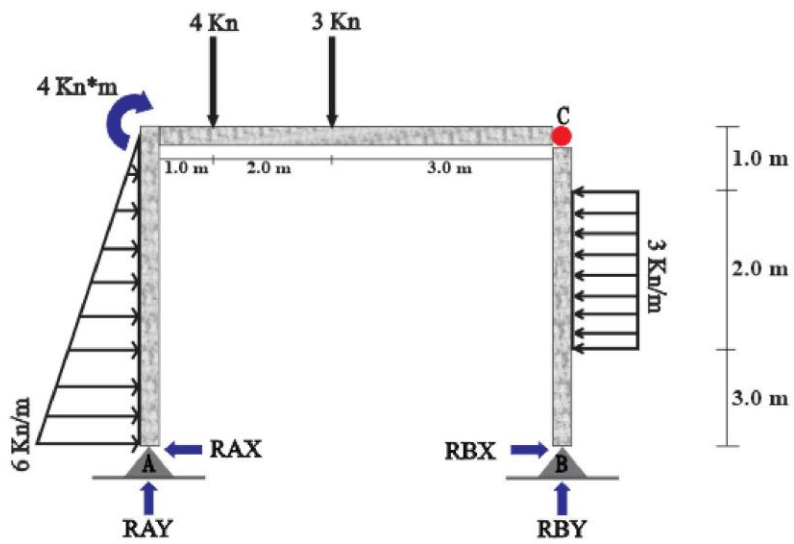


Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





7.



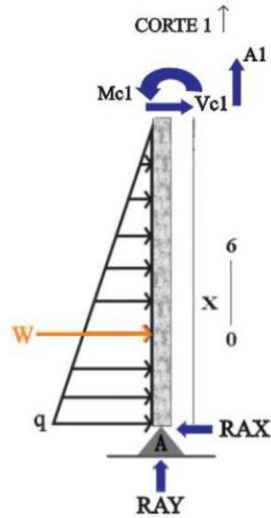
Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$RAY = 2.17 \text{ Kn}$$

$$RAX = 14.0 \text{ Kn}$$

$$RBY = 4.83 \text{ Kn}$$

$$RBX = 2.0 \text{ Kn}$$



$$q = \frac{6}{6} = q = X \quad W = X \left( \frac{X}{2} \right) = W = \frac{X^2}{2}$$

$$\sum Mc1 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-14(X) + \frac{X^2}{2} \left( \frac{2X}{3} \right) + Mc1 = 0$$

$$Mc1 = -\frac{X^3}{3} + 14X \quad (0;6)$$

$$\sum Vc1 = 0 \quad \rightarrow (+)$$

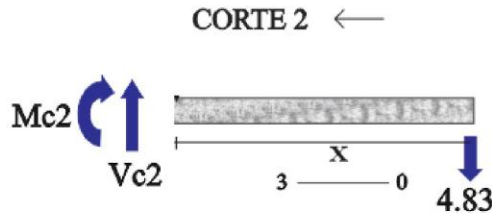
$$-14 + \frac{X^2}{2} + Vc1 = 0$$

$$Vc1 = -\frac{X^2}{2} + 14 \quad (0;6)$$

$$\sum A1 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$2.17 + A1 = 0$$

$$A1 = -2.17$$



$$\sum Mc2 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

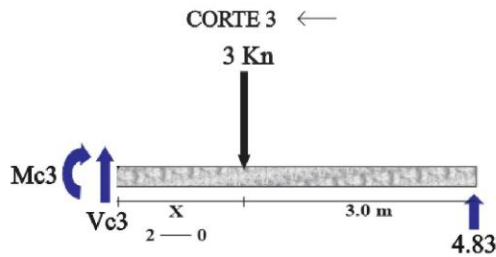
$$4.83X + Mc2 = 0$$

$$Mc2 = -4.83X \quad (3;0)$$

$$\sum Vc2 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$-4.83 + Vc2 = 0$$

$$Vc2 = 4.83 \quad (3;0)$$



$$\sum Mc3 = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

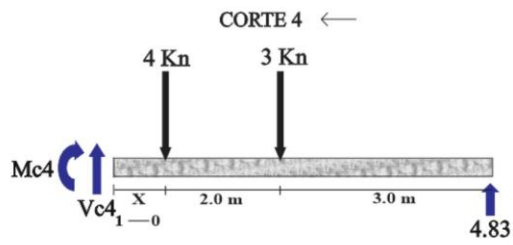
$$-4.83(3+X) + 3X + Mc3 = 0$$

$$Mc3 = 1.83X + 14.49 \quad (2;0)$$

$$\sum Vc3 = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$4.83 - 3 + Vc3 = 0$$

$$Vc3 = -1.83 \quad (3;0)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

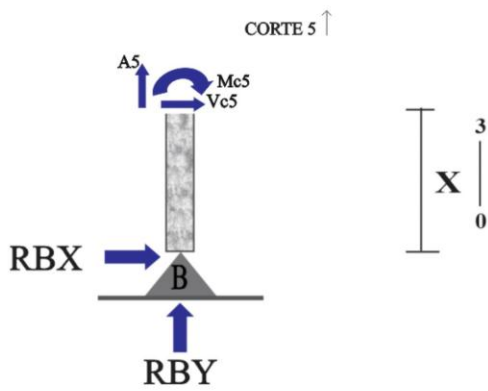
$$-4.83(5+X)+3(2+X)+4X+ Mc4=0$$

$$Mc4 = -2.17X + 18.15 \quad (1;0)$$

$$\sum Vc4=0 \quad \uparrow (+)$$

$$-4-3+4.83+Vc4=0$$

$$Vc4 = 2.17 \quad (0;5)$$



$$\sum Mc5=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-2(X)+Mc5 = 0$$

$$Mc5 = 2X \quad (0;3)$$

$$\sum Vc5=0 \quad \rightarrow (+)$$

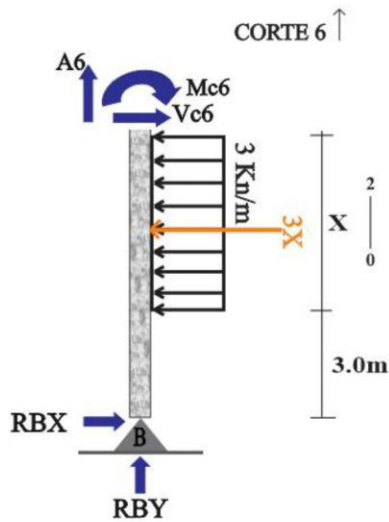
$$2+Vc5 = 0$$

$$Vc5 = -2 \quad (0;3)$$

$$\sum A5=0 \quad \uparrow (+)$$

$$4.83+A5=0$$

$$A5 = -4.83$$



$$\sum Mc6=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-2(3+X)+3X\left(\frac{X}{2}\right)+Mc6 = 0$$

$$Mc6 = -\frac{3X^2}{2} + 2X + 6 \quad (0;2)$$

$$\sum Vc6=0 \quad \rightarrow (+)$$

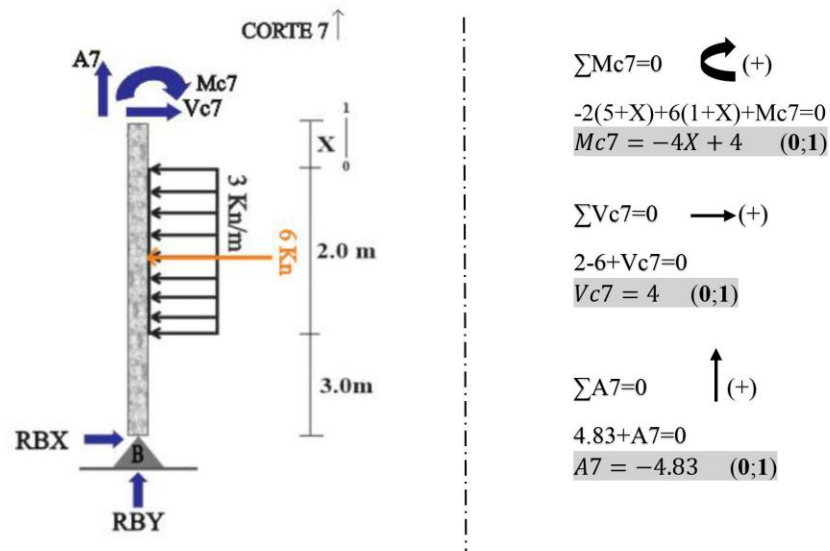
$$2-3X+Vc6 = 0$$

$$Vc6 = 3X - 2 \quad (0;2)$$

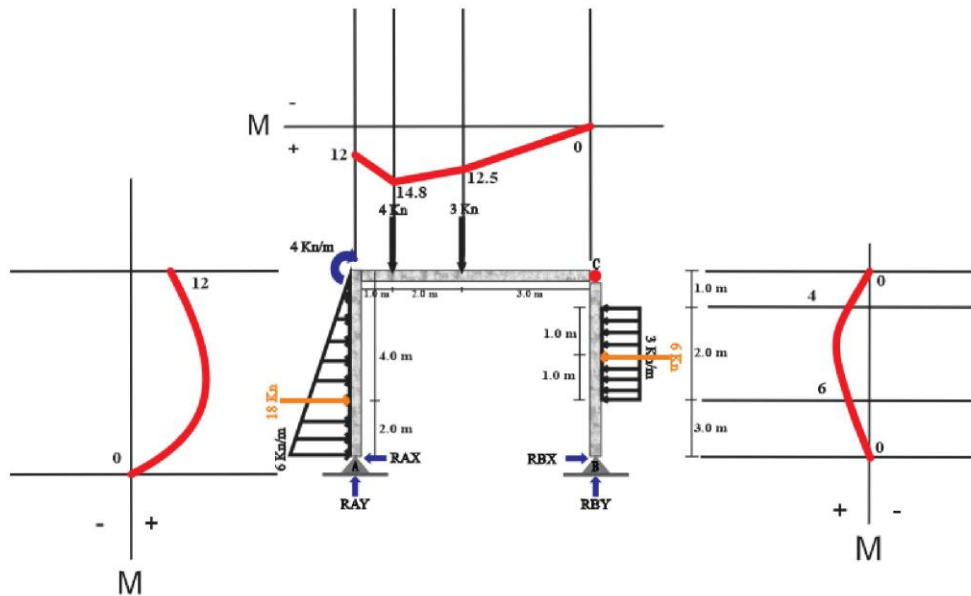
$$\sum A6=0 \quad \uparrow (+)$$

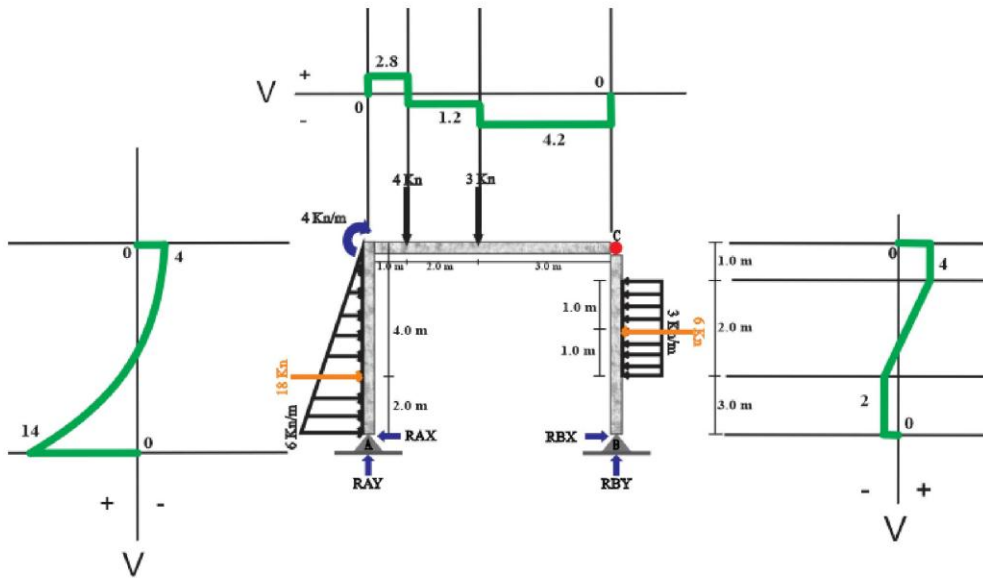
$$4.83+A6=0$$

$$A6 = -4.83$$

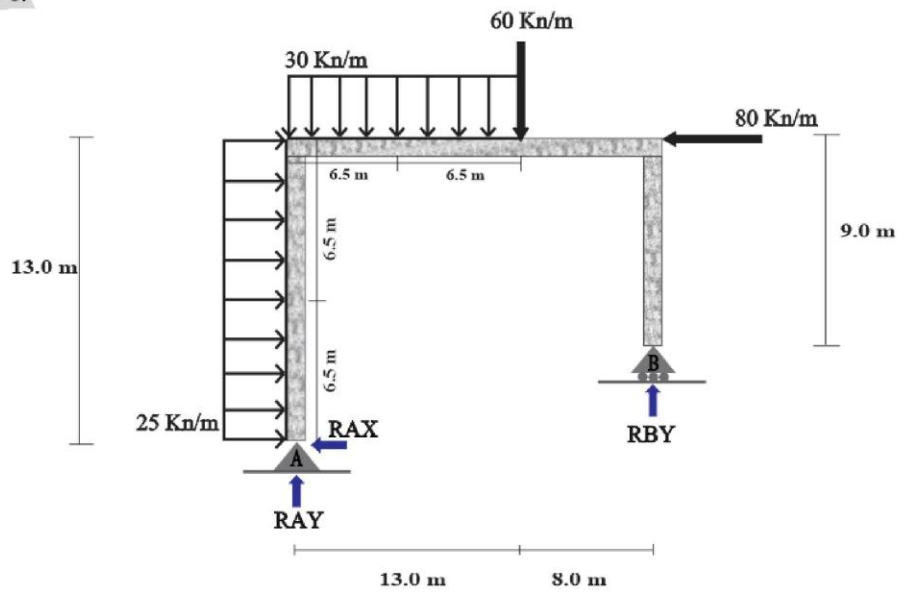


Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:





8.



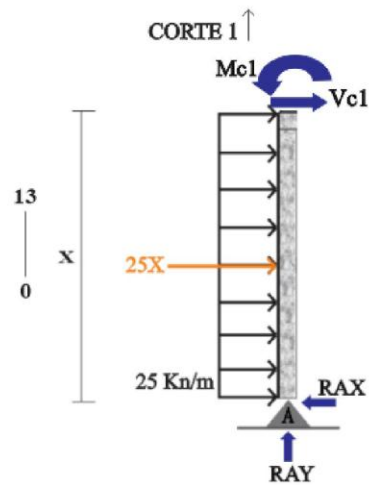


Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{AY} = 241.07 \text{ Kn}$$

$$R_{BY} = 208.93 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 245.0 \text{ Kn}$$



$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

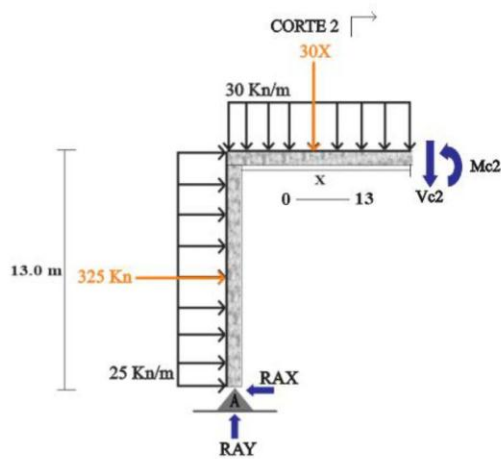
$$-245(X) + 25X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -\frac{25X^2}{2} + 245X \quad (0;13)$$

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \rightarrow (+)$$

$$-245 + 25X + V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -25X + 245 \quad (0;13)$$



$$\sum M_{c2} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$-245(13) - 241.07(X) + 325(6.5) + 30X\left(\frac{X}{2}\right) + M_{c2} = 0$$

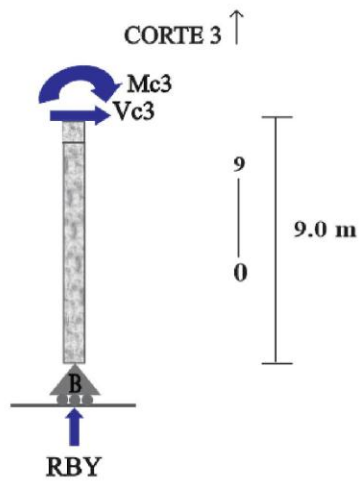
$$-135 - 10.5X + 270 + \frac{3}{4}X^2 + M_{c2} = 0$$

$$M_{c2} = -15X^2 + 241.07X + 1072.5 \quad (0;13)$$

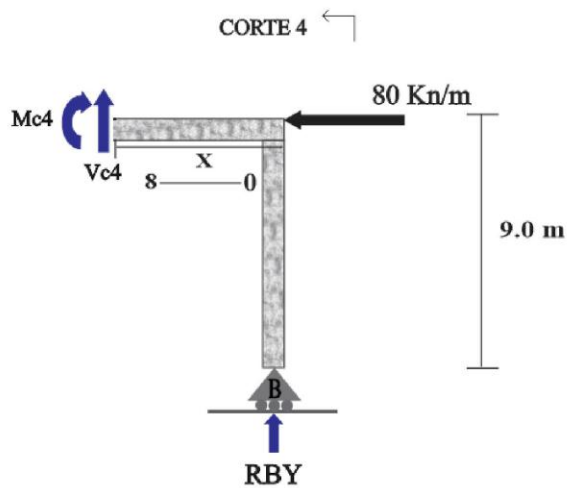
$$\sum V_{c2} = 0 \quad \uparrow (+)$$

$$241.07 - 30X - V_{c2} = 0$$

$$V_{c2} = -30X + 241.07 \quad (0;13)$$

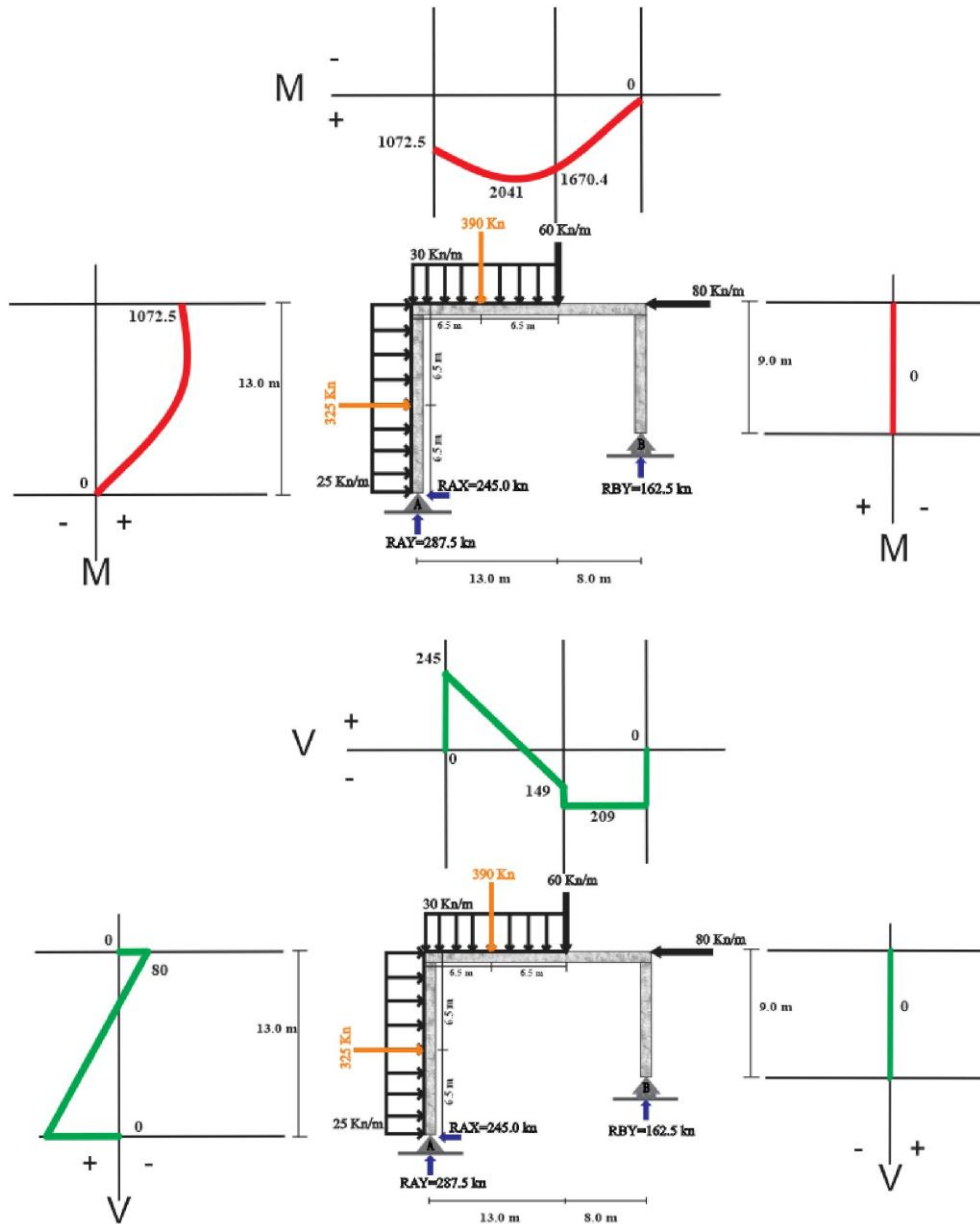


$$\begin{aligned} \sum M_{c3} &= 0 \quad \curvearrowleft (+) \\ M_{c3} &= 0 \quad (0;9) \\ \sum V_{c3} &= 0 \quad \rightarrow (+) \\ V_{c3} &= 0 \quad (0;9) \end{aligned}$$

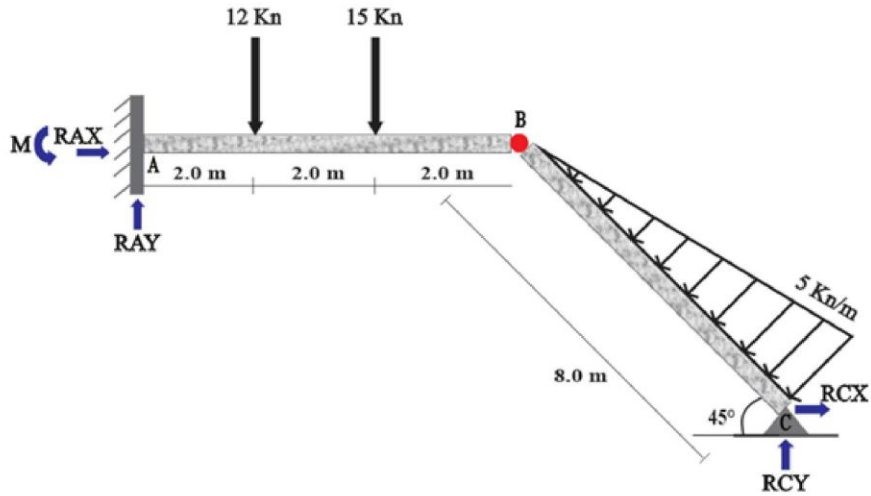


$$\begin{aligned} \sum M_{c4} &= 0 \quad \curvearrowleft (+) \\ -208.93X + M_{c4} &= 0 \\ M_{c4} &= 208.93X \quad (8;0) \\ \sum V_{c4} &= 0 \quad \uparrow (+) \\ 208.93 + V_{c4} &= 0 \\ V_{c4} &= -208.93 \quad (8;0) \end{aligned}$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



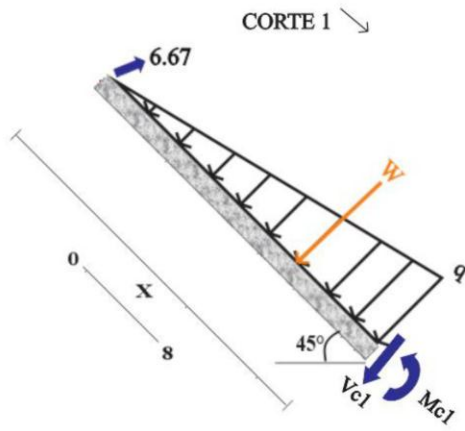
9.



Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$R_{AY} = 31.72 \text{ Kn}$        $R_{AY} = 4.72 \text{ Kn}$        $M_A = 112.32 \text{ Kn}\cdot\text{m}$

$R_{CY} = 9.38 \text{ Kn}$        $R_{CX} = 9.38 \text{ Kn}$



$$q = \frac{5}{8} = q = \frac{5X}{8} \quad W = \frac{5X}{8} \left( \frac{X}{2} \right) = W = \frac{5X^2}{16}$$

$$\sum M_{c1} = 0 \quad \curvearrowright (+)$$

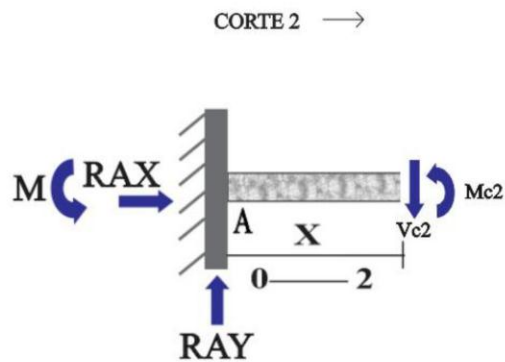
$$-6.67(X) + \frac{5X^2}{16} \left( \frac{X}{3} \right) + M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = -\frac{5X^3}{48} + 6.67X \quad (0;8)$$
  

$$\sum V_{c1} = 0 \quad \nearrow (+)$$

$$6.67 - \frac{5X^2}{16} - V_{c1} = 0$$

$$V_{c1} = -\frac{5X^2}{16} + 6.67 \quad (0;8)$$



$$\sum Mc2=0 \quad \curvearrowright (+)$$

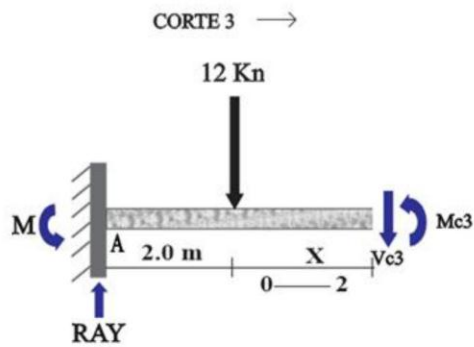
$$112.32-31.72(X)+Mc2=0$$

$$Mc2 = 31.72X - 112.32 \quad (0;2)$$

$$\sum Vc2=0 \quad \uparrow (+)$$

$$31.72-Vc2=0$$

$$Vc2 = 31.72 \quad (0;2)$$



$$\sum Mc3=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$112.32-31.72(2+X)+12(X)+Mc3=0$$

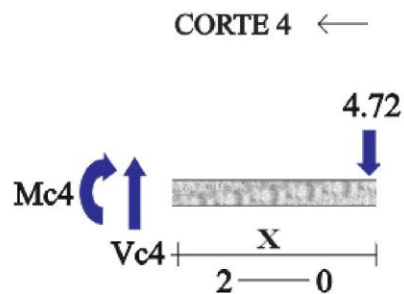
$$112.32-63.44-31.72X+12X+Mc3=0$$

$$Mc3 = 19.72X - 48.88 \quad (0;2)$$

$$\sum Vc3=0 \quad \uparrow (+)$$

$$31.72-12-Vc3=0$$

$$Vc3 = 19.72 \quad (0;2)$$



$$\sum Mc4=0 \quad \curvearrowleft (+)$$

$$4.72(X)+Mc4=0$$

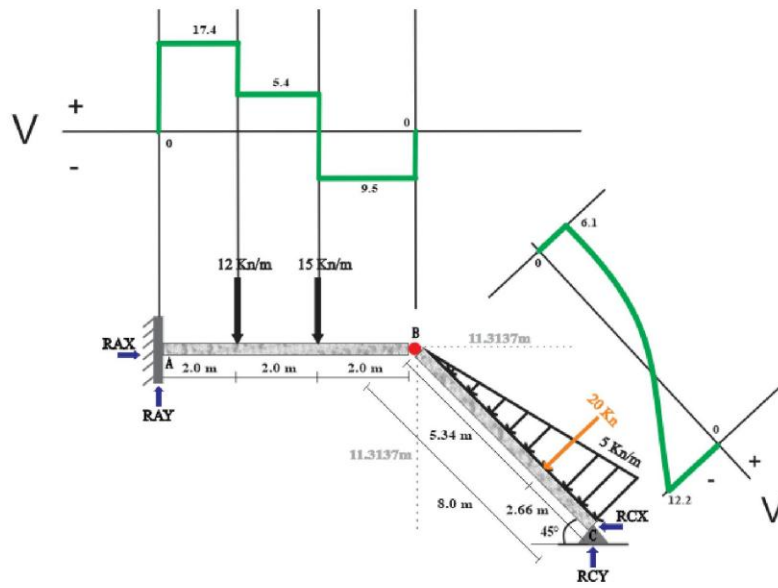
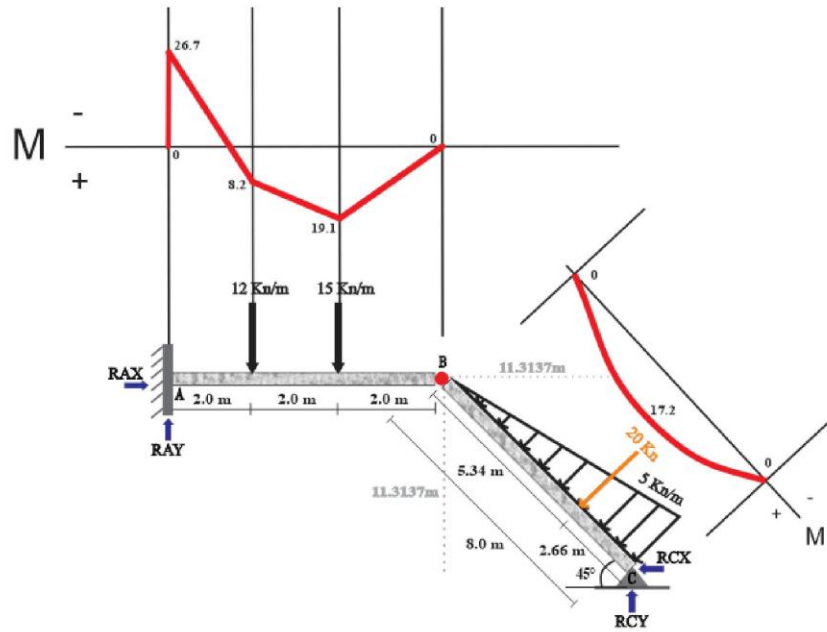
$$Mc4 = -4.72X \quad (2;0)$$

$$\sum Vc4=0 \quad \uparrow (+)$$

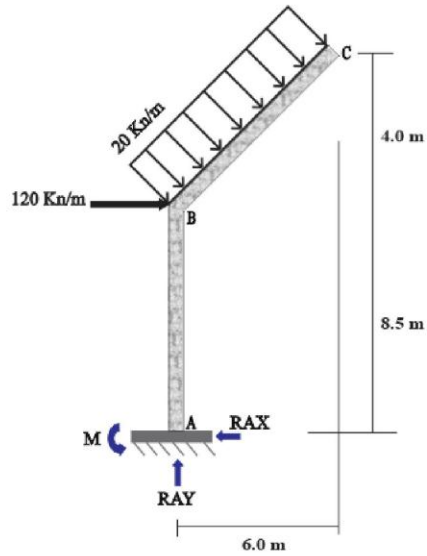
$$-4.72+Vc3=0$$

$$Vc4 = 4.72 \quad (2;0)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:



10.

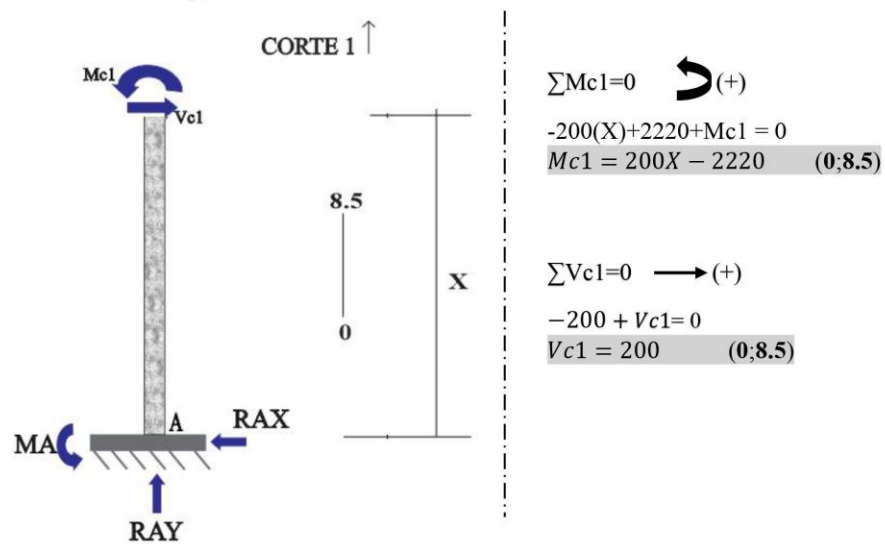


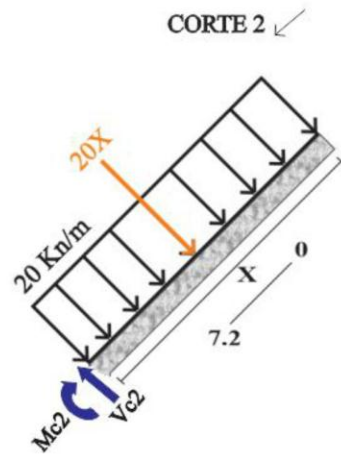
Reacciones obtenidas con el cálculo del segmento anterior:

$$R_{AY} = 120.0 \text{ Kn}$$

$$R_{AX} = 200.0 \text{ Kn}$$

$$M_A = 2220 \text{ Kn}\cdot\text{m}$$





$$\sum Mc2=0 \quad \curvearrowright (+)$$

$$20X\left(\frac{X}{2}\right)+Mc2=0$$

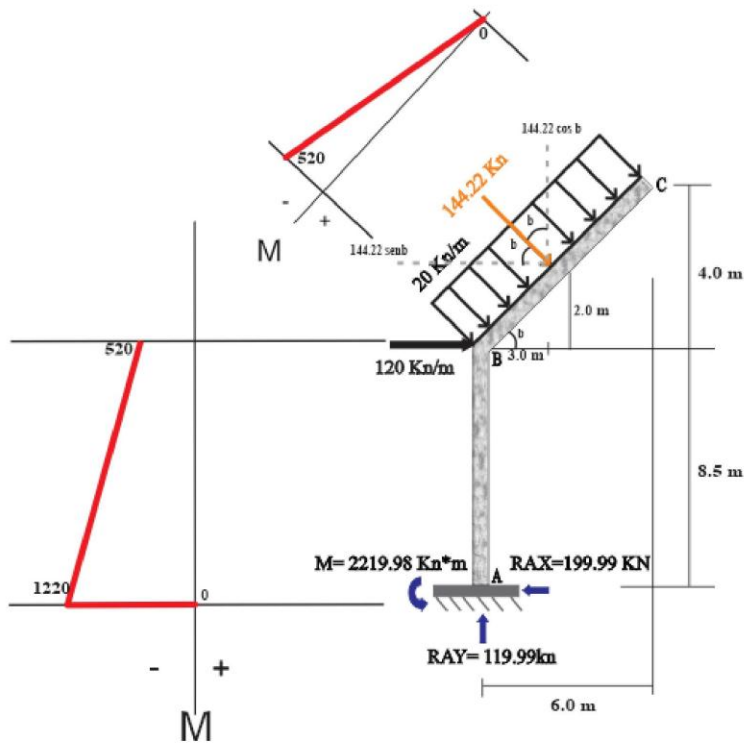
$$Mc2 = -10X^2 \quad (0;7.2)$$

$$\sum Vc2=0 \quad \uparrow (+)$$

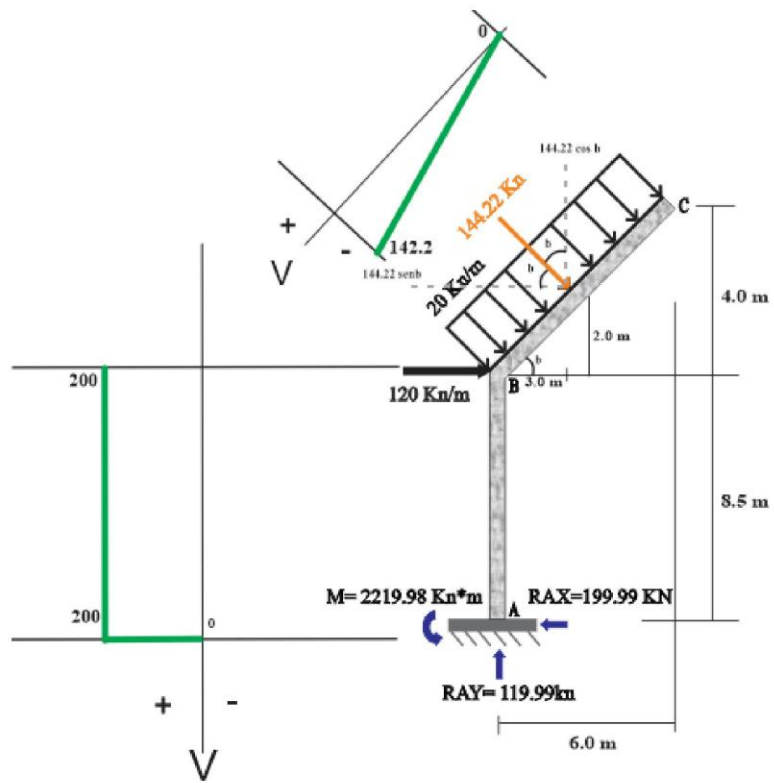
$$-20X+Vc2 = 0$$

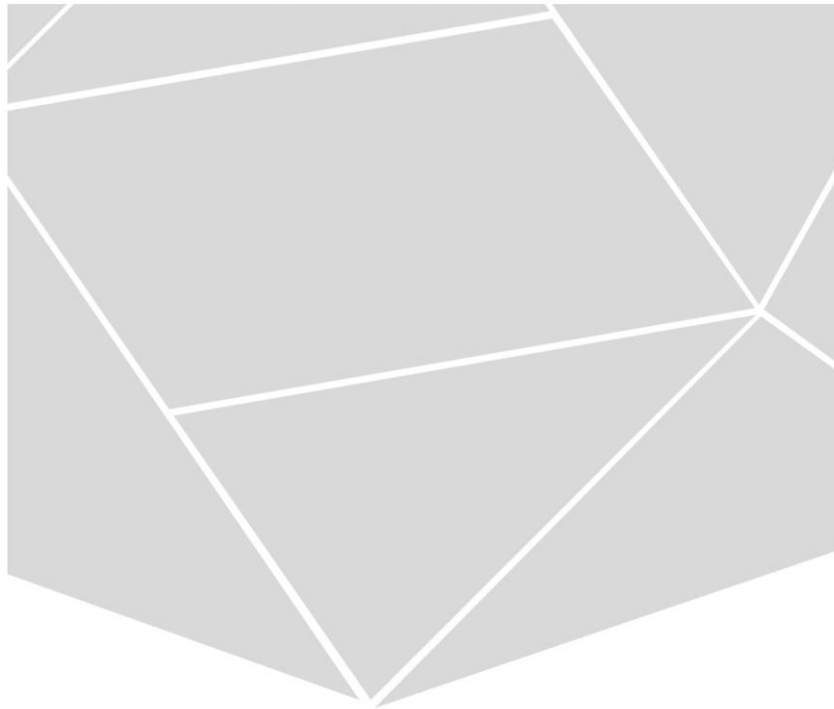
$$Vc2 = 20X \quad (0;7.2)$$

Evaluando los valores, obtenemos datos necesarios para generar el diagrama, de modo que:









# **EJERCICIOS PROPUESTOS**

**REACCIONES Y DIAGRAMAS  
VIGAS Y PÓRTICOS**

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA  
SANTANDER

# EJERCICIOS

Cálculo de reacciones, diagramas de momento flector y fuerza cortante

## Vigas y pórticos

### VIGAS PROPUESTAS

1

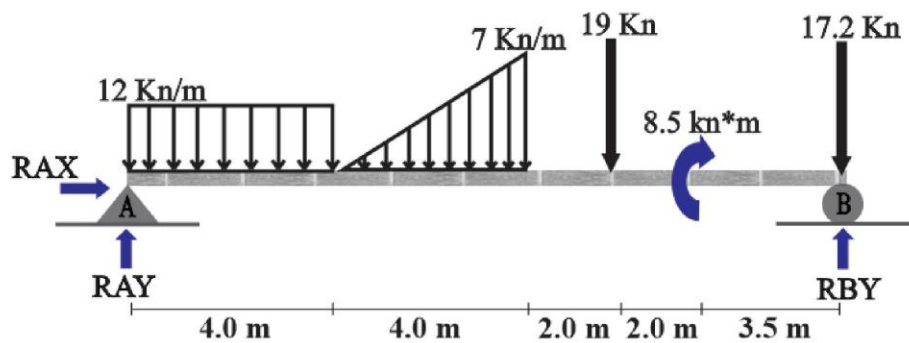


Figura 41. Ejercicio propuesto viga 1

2

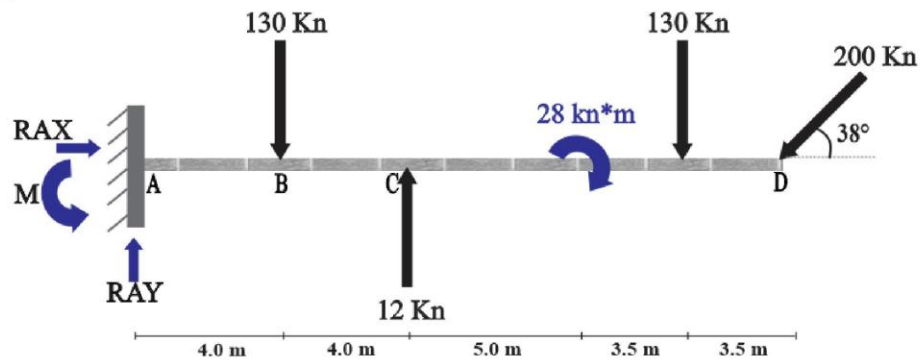


Figura 42. Ejercicio propuesto viga 2

3

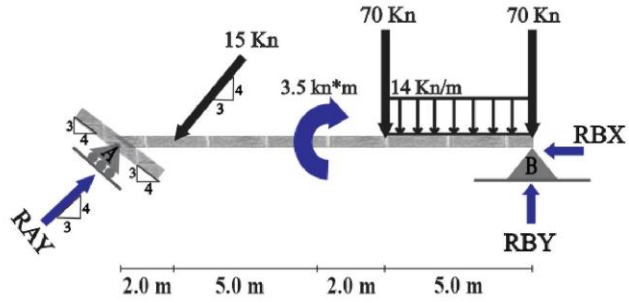


Figura 43. Ejercicio propuesto viga 3

4

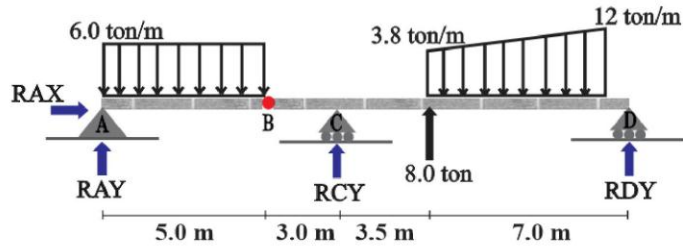


Figura 44. Ejercicio propuesto viga 4

5

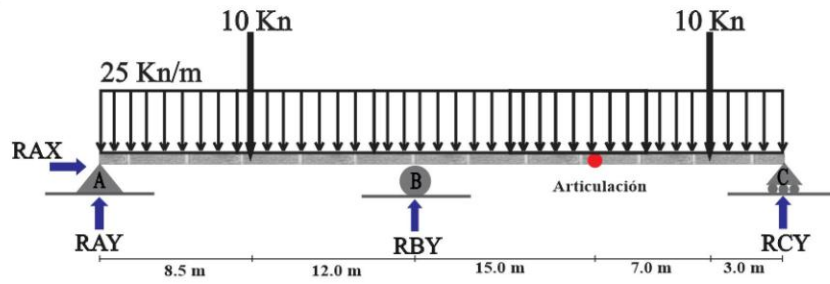


Figura 45. Ejercicio propuesto viga 5

6

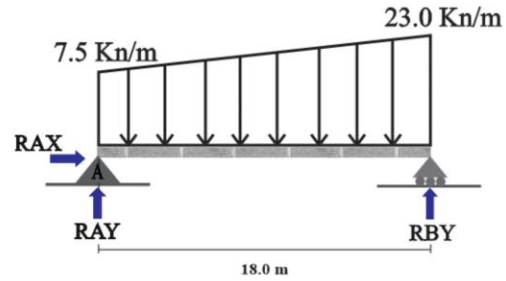


Figura 46. Ejercicio propuesto viga 6

7

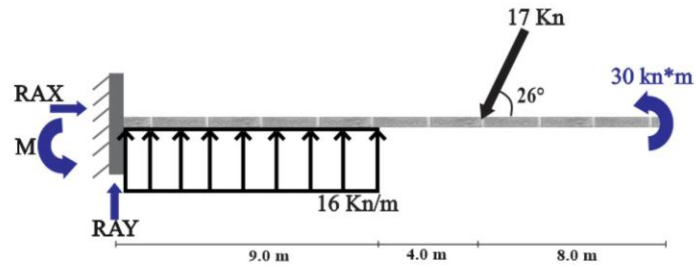


Figura 47. Ejercicio propuesto viga 7

8

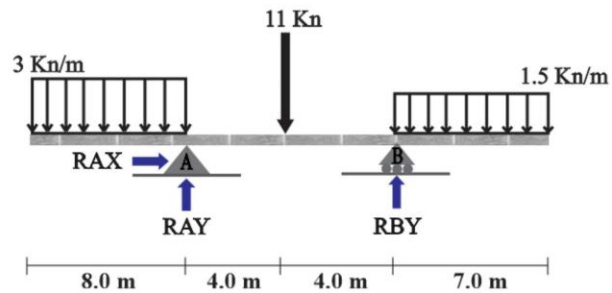


Figura 48. Ejercicio propuesto viga 8

9

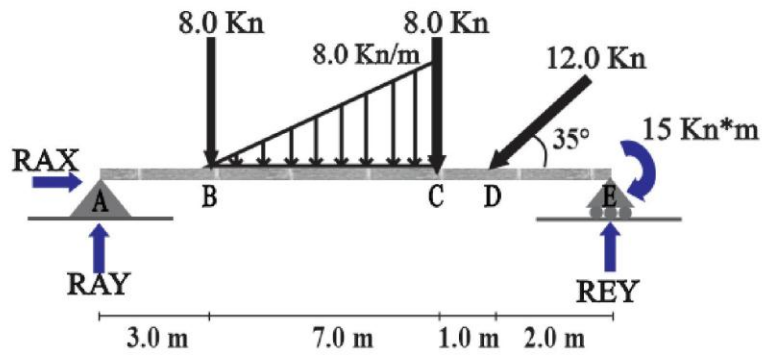


Figura 49. Ejercicio propuesto viga 9

10

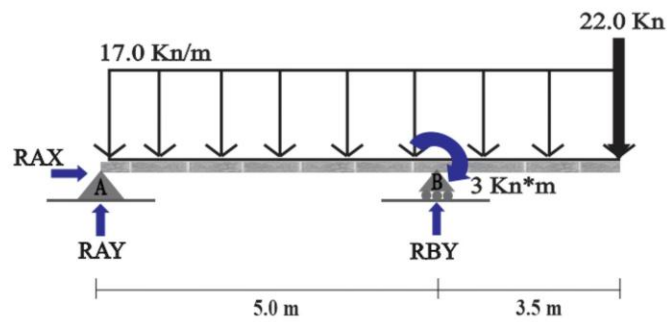


Figura 50. Ejercicio propuesto viga 10

## PÓRTICOS PROPUESTOS

1

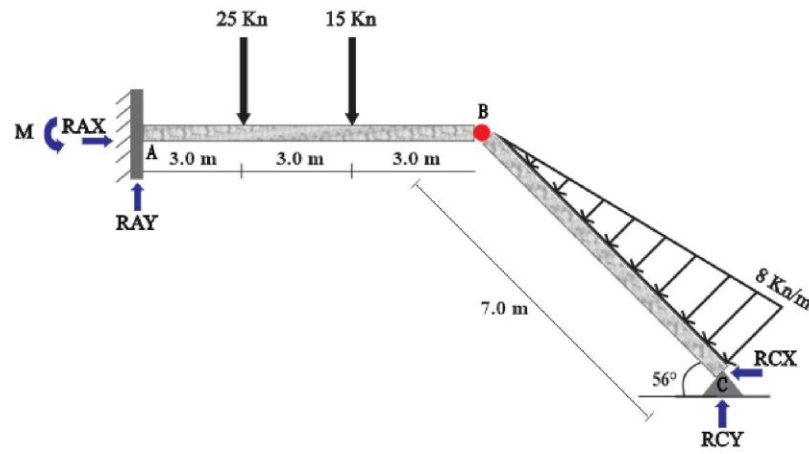


Figura 51. Ejercicio propuesto pórtico 1

2

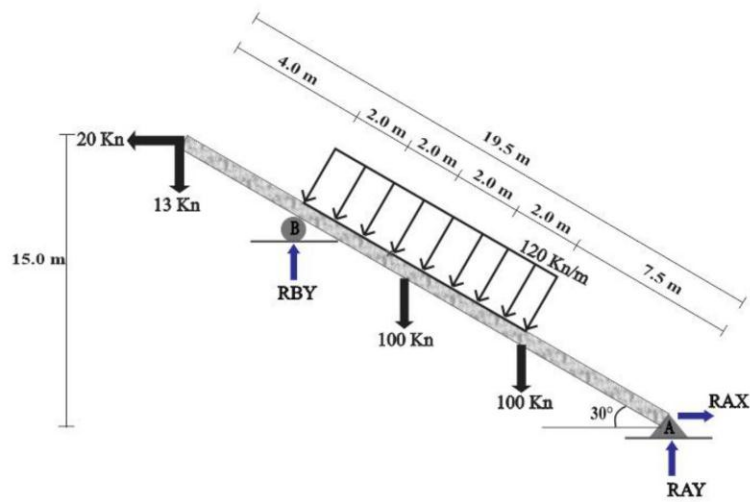


Figura 52. Ejercicio propuesto pórtico 2

3

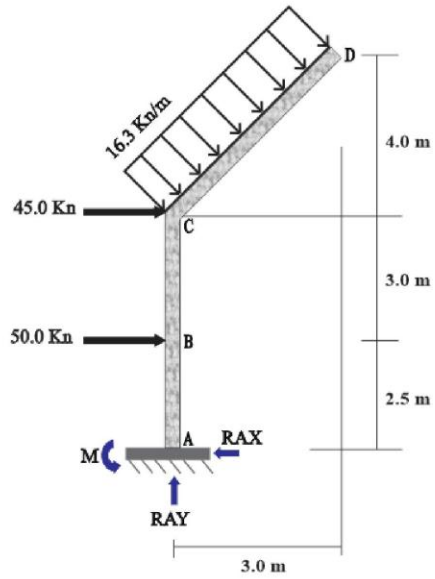


Figura 53. Ejercicio propuesto pórtico 3

4

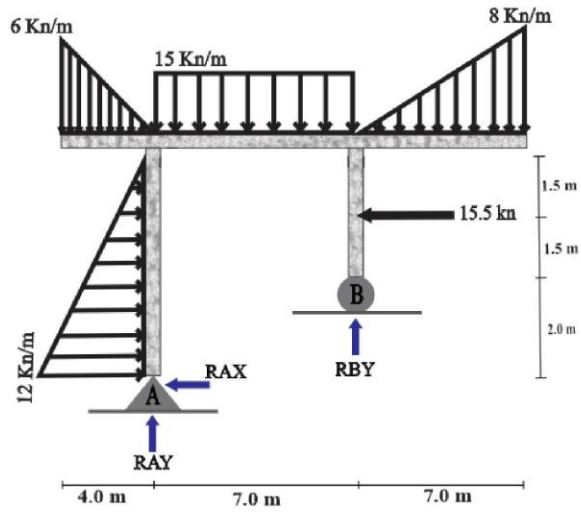


Figura 54. Ejercicio propuesto pórtico 4



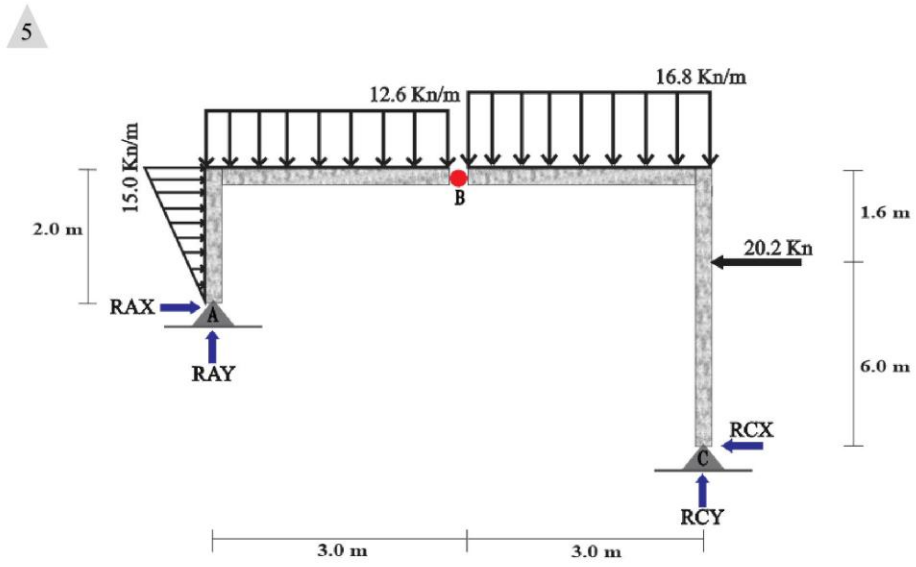
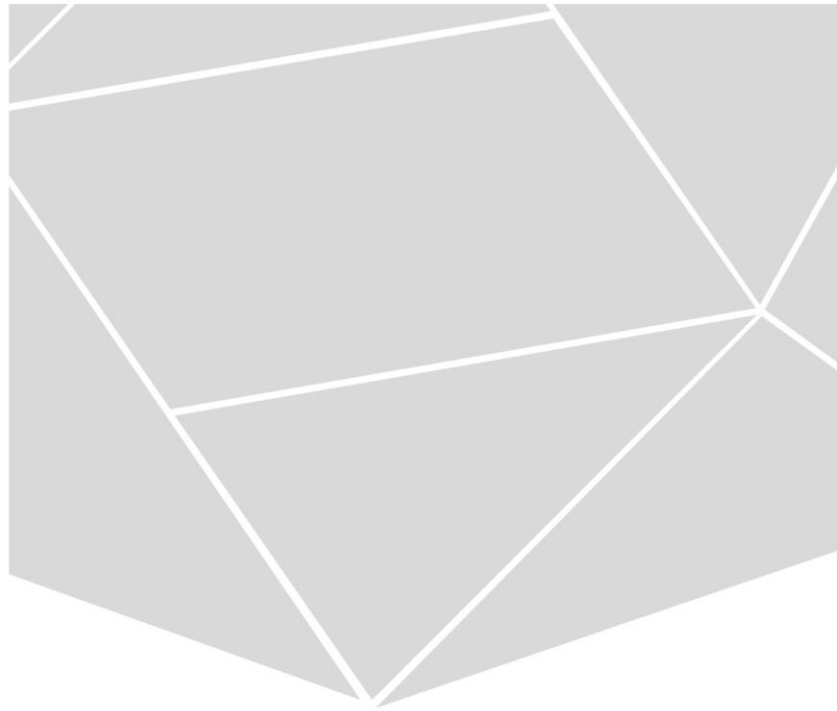


Figura 55. Ejercicio propuesto pórtico 5



# **RESPUESTAS**

## **VIGAS Y PÓRTICOS**

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA  
SANTANDER

# RESPUESTAS

## EJERCICIOS

### Vigas y pórticos

#### VIGAS PROPUESTAS

1

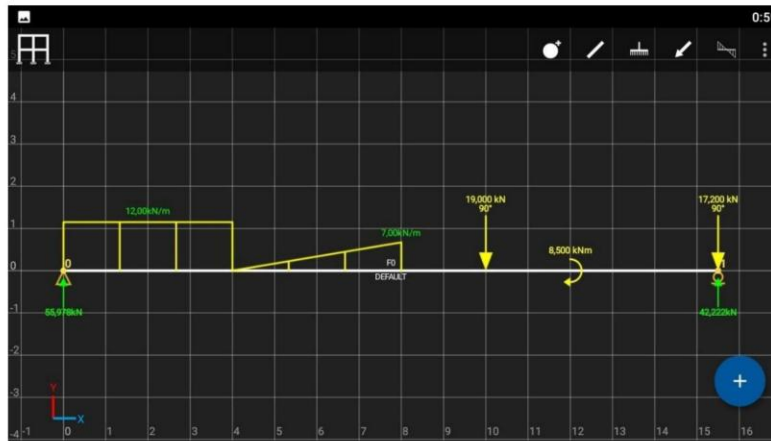


Figura 56. Reacciones viga 1

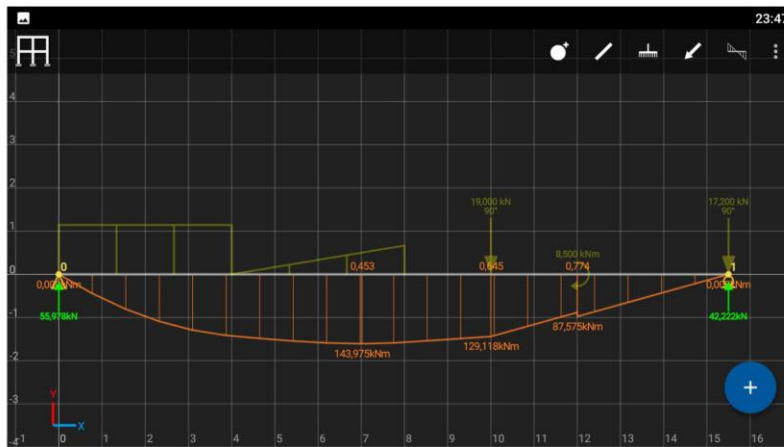


Figura 57. Diagrama De Momento Flector viga 1

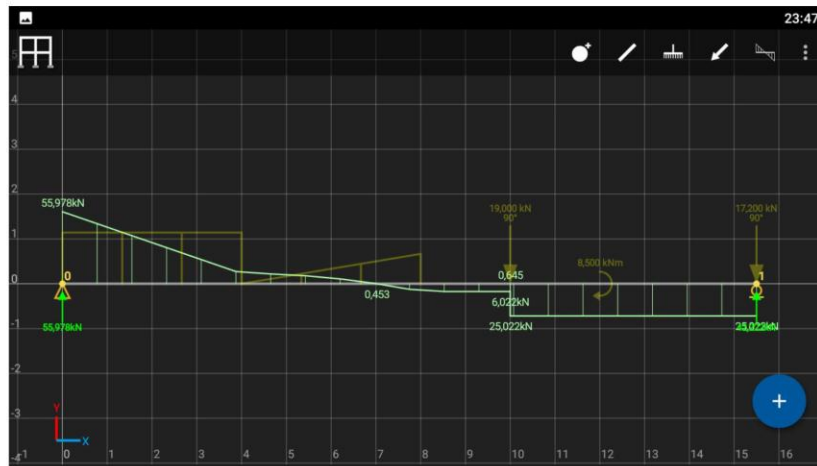


Figura 58. Diagrama de Fuerza cortante viga 1

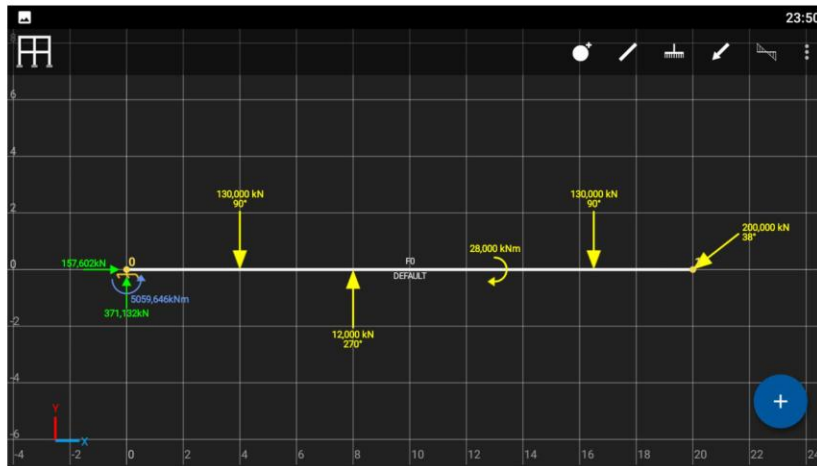


Figura 59. Reacciones viga 2

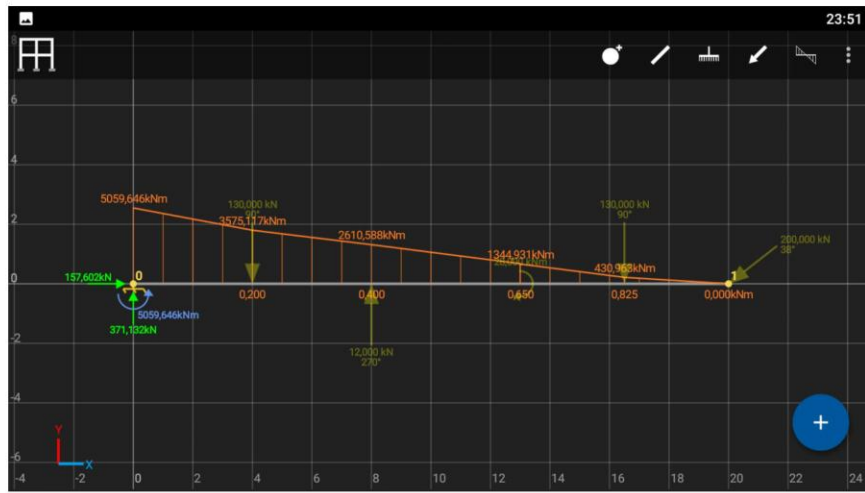


Figura 60. Diagrama De Momento Flector viga 2

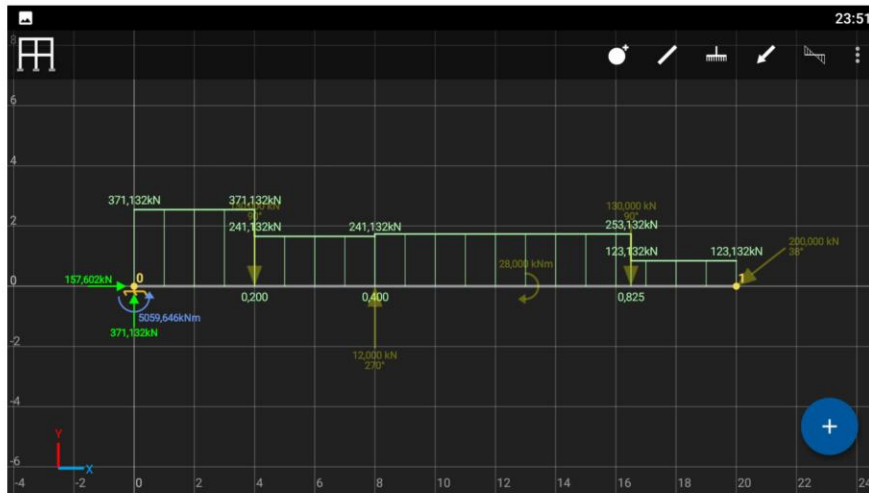


Figura 61. Diagrama de Fuerza cortante viga 2

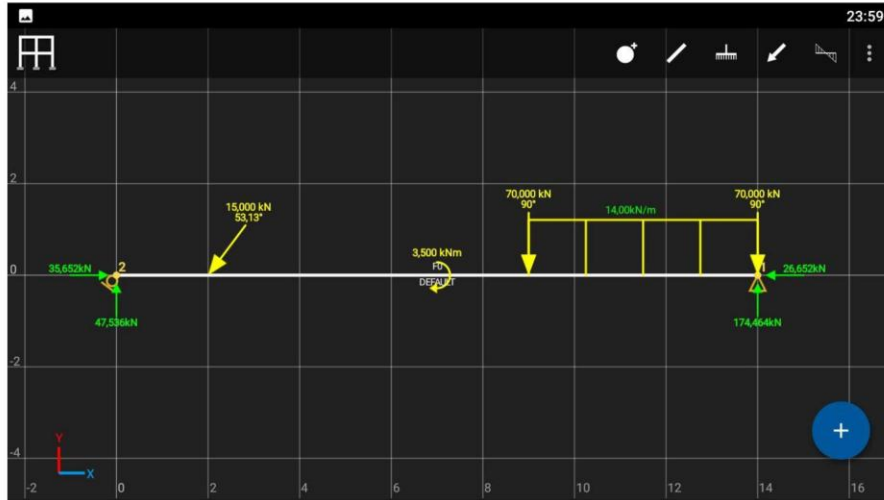


Figura 62. Reacciones viga 3

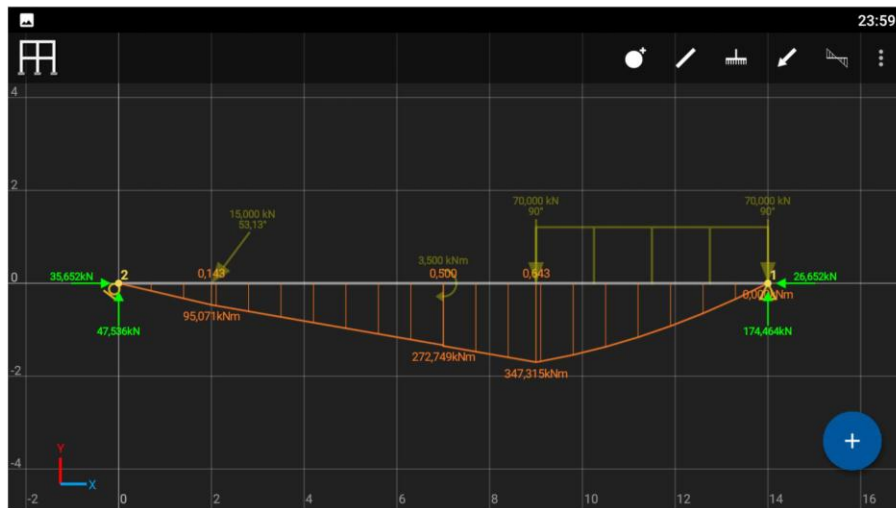


Figura 63. Diagrama De Momento Flector viga 3

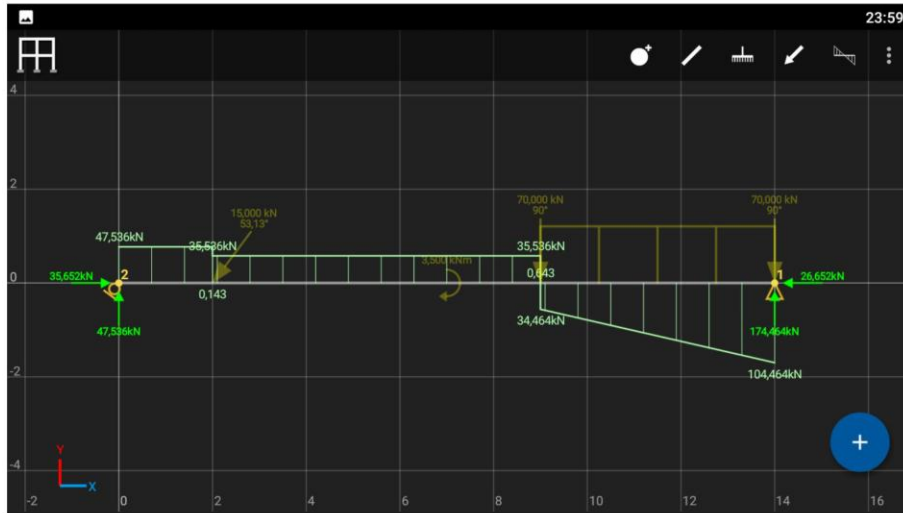


Figura 64. Diagrama de Fuerza cortante viga 3

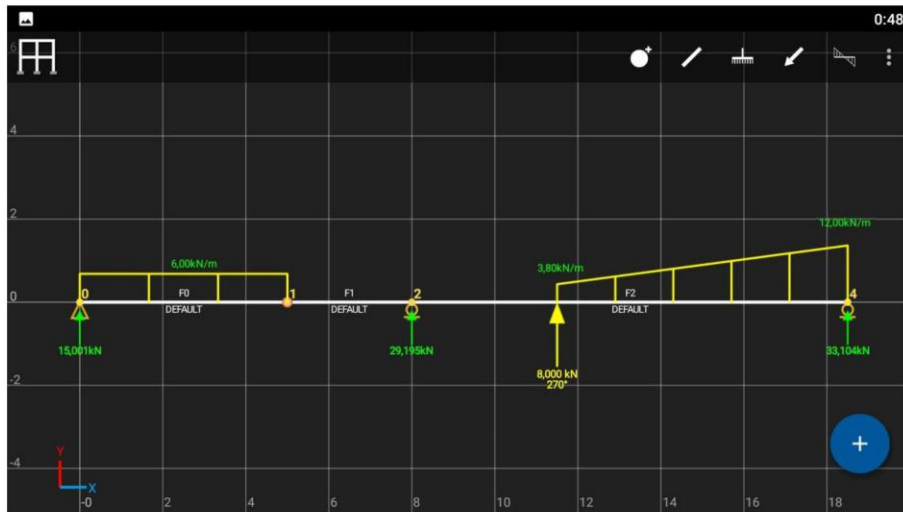


Figura 65. Reacciones Viga 4

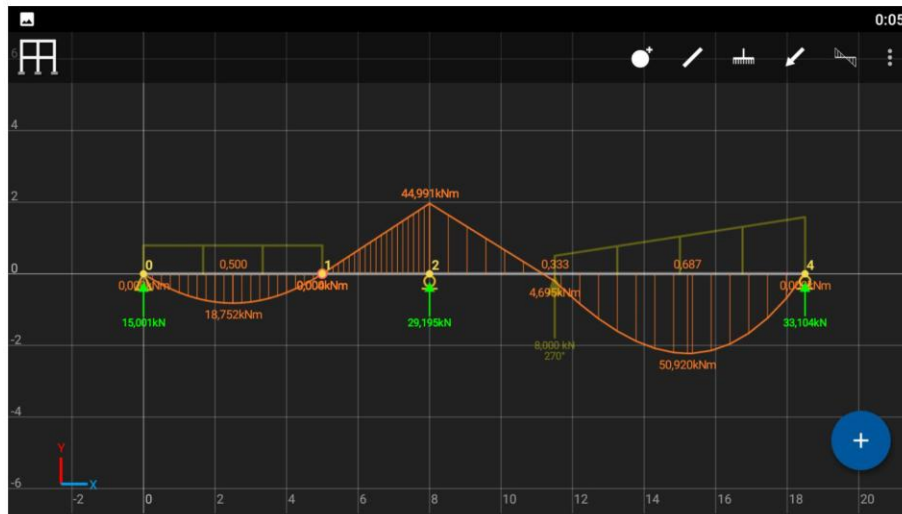


Figura 66. Diagrama De Momento Flector viga 4



Figura 67. Diagrama de Fuerza cortante viga 4



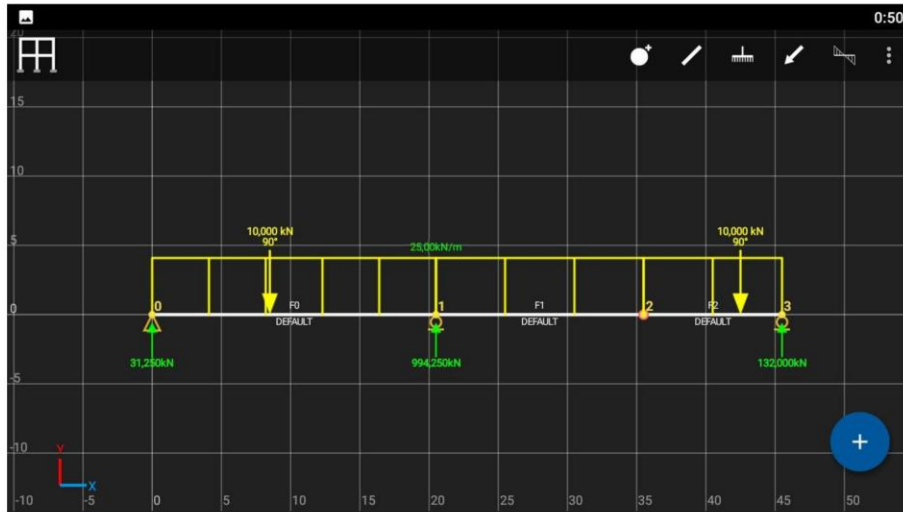


Figura 68. Reacciones Viga 5

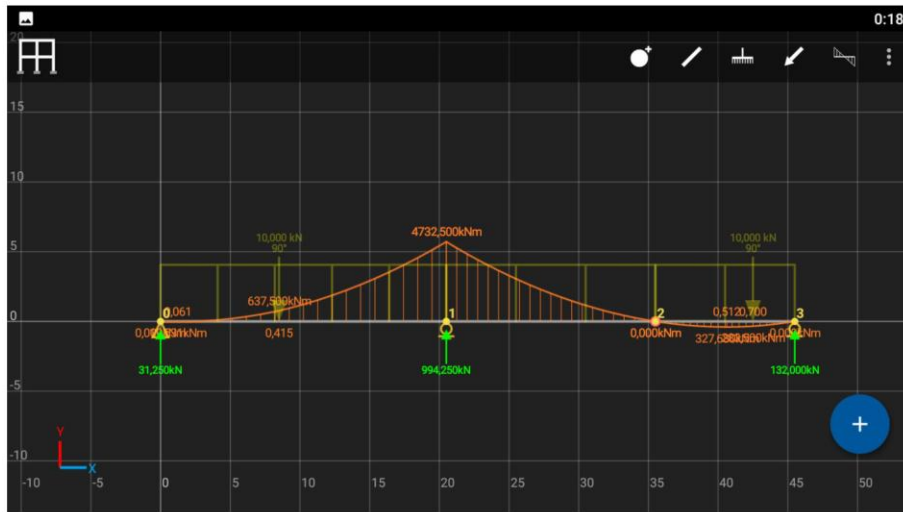


Figura 69. Diagrama De Momento Flector viga 5



Figura 70. Diagrama de Fuerza cortante viga 5

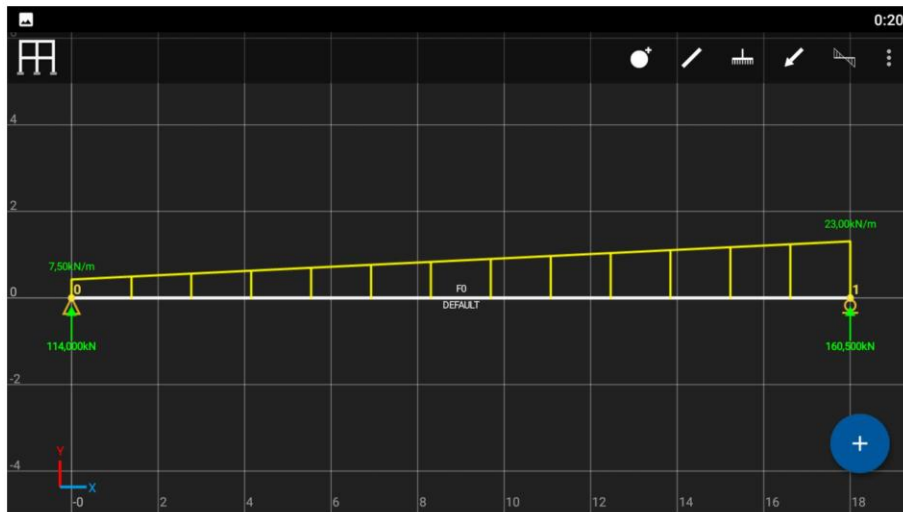


Figura 71. Reacciones viga 6

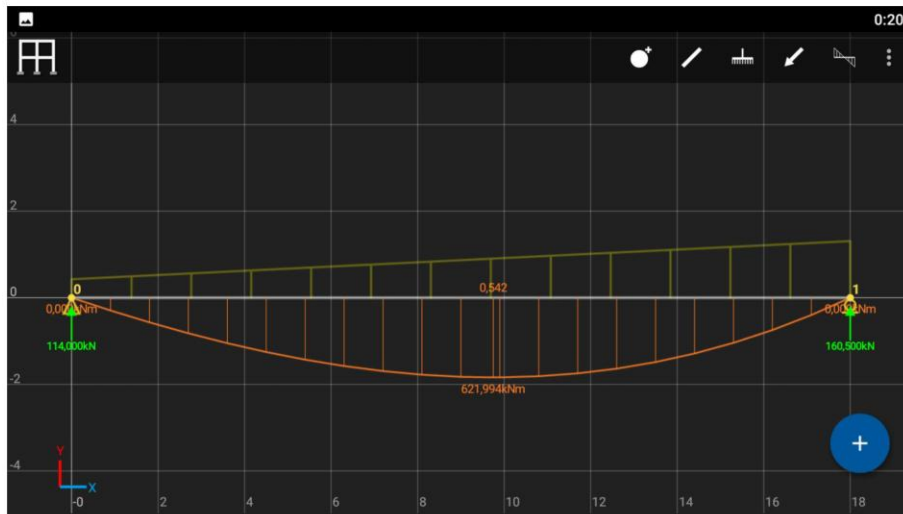


Figura 72. Diagrama De Momento Flector viga 6

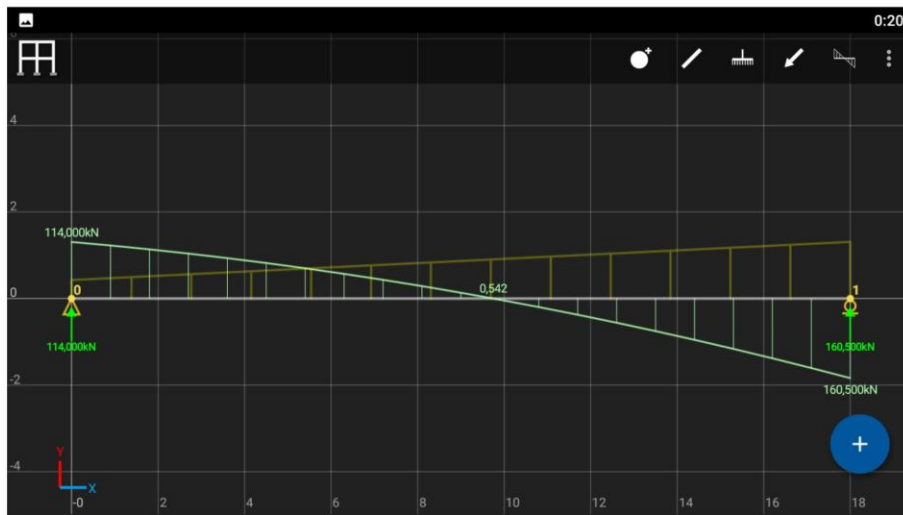


Figura 73. Diagrama de Fuerza cortante viga 6

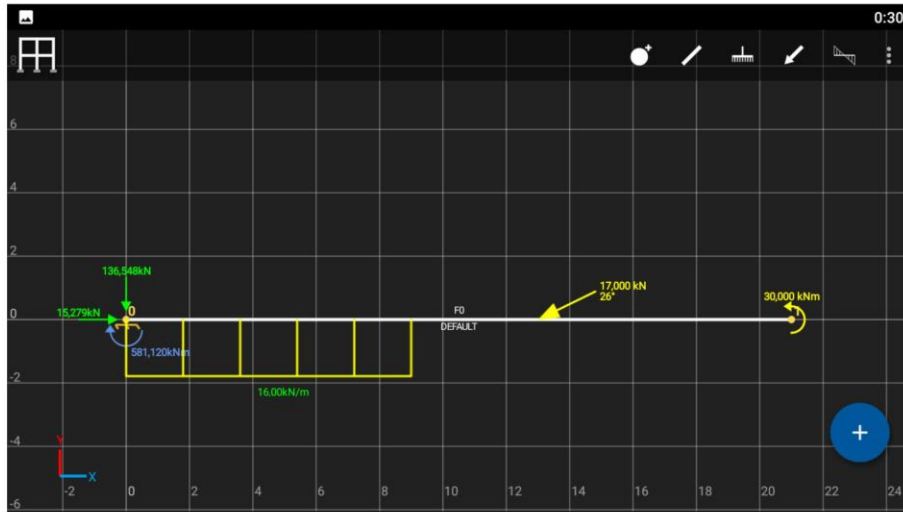


Figura 74. Reacciones viga 7

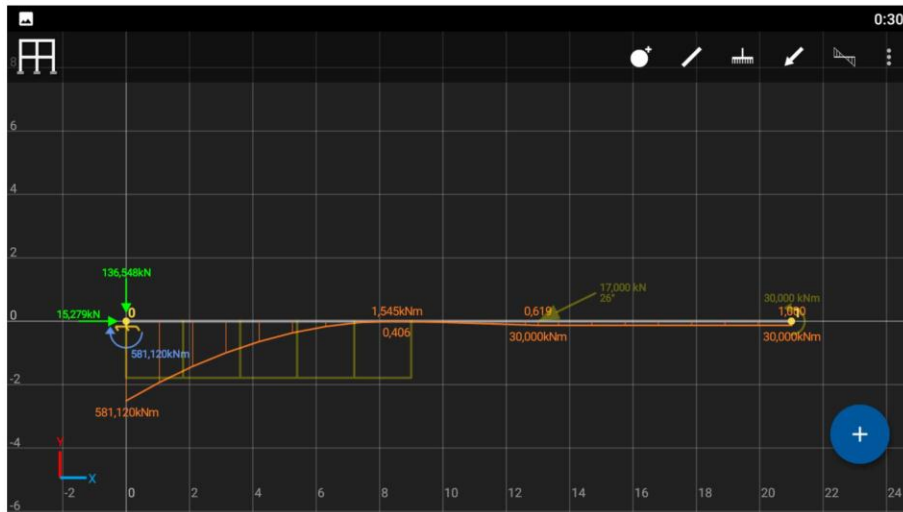


Figura 75. Diagrama De Momento Flector viga 7



Figura 76. Diagrama de Fuerza cortante viga 7

8

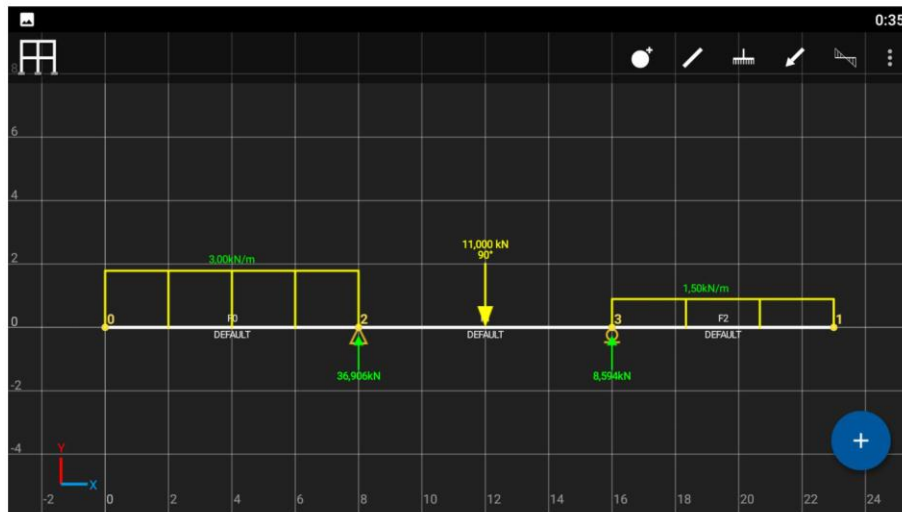


Figura 77. Reacciones viga 8

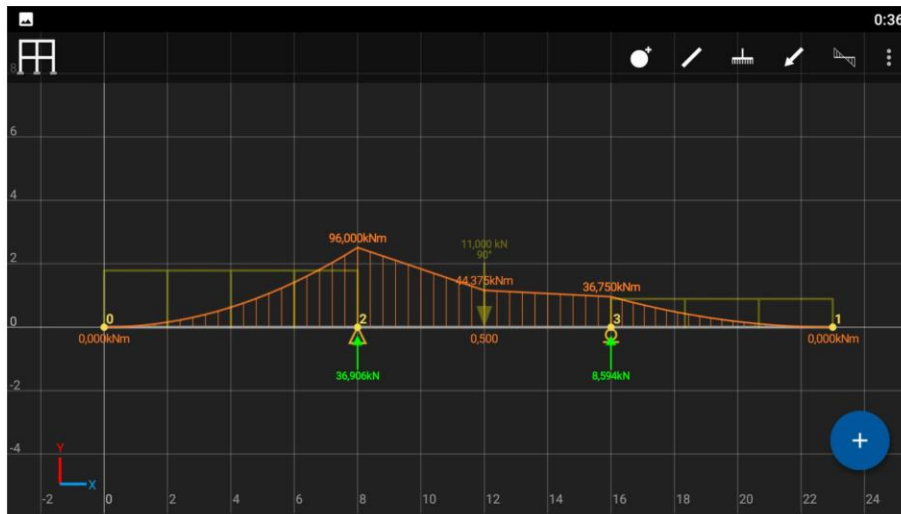


Figura 78. Diagrama De Momento Flector viga 8



Figura 79. Diagrama de Fuerza cortante viga 8

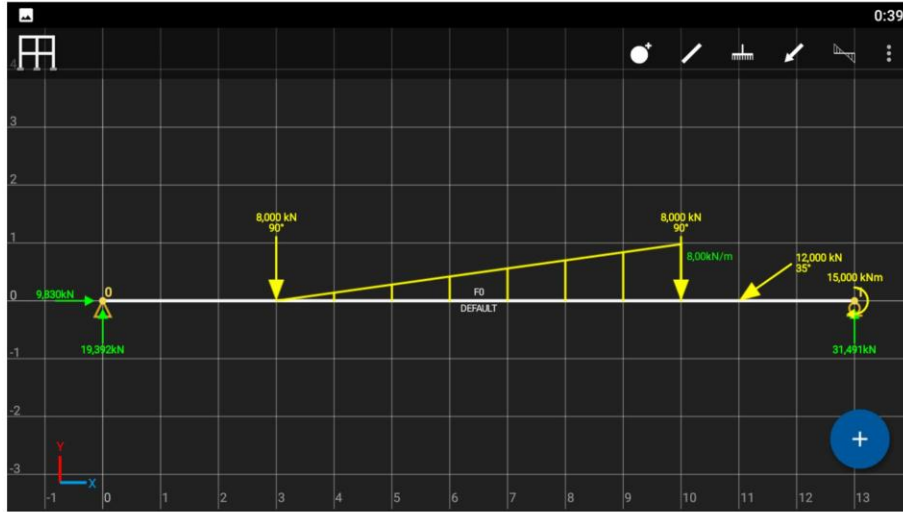


Figura 80. Reacciones viga 9

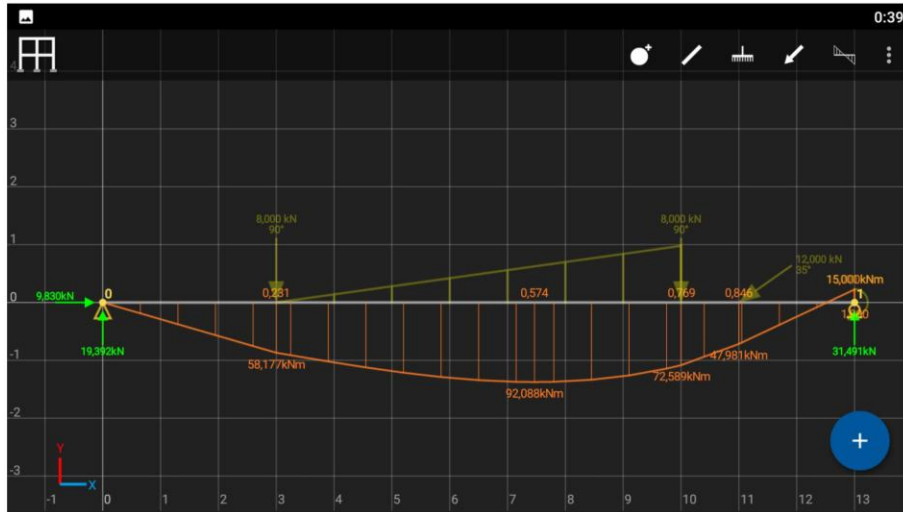


Figura 81. Diagrama De Momento Flector viga 9



Figura 82. Diagrama de Fuerza cortante viga 9

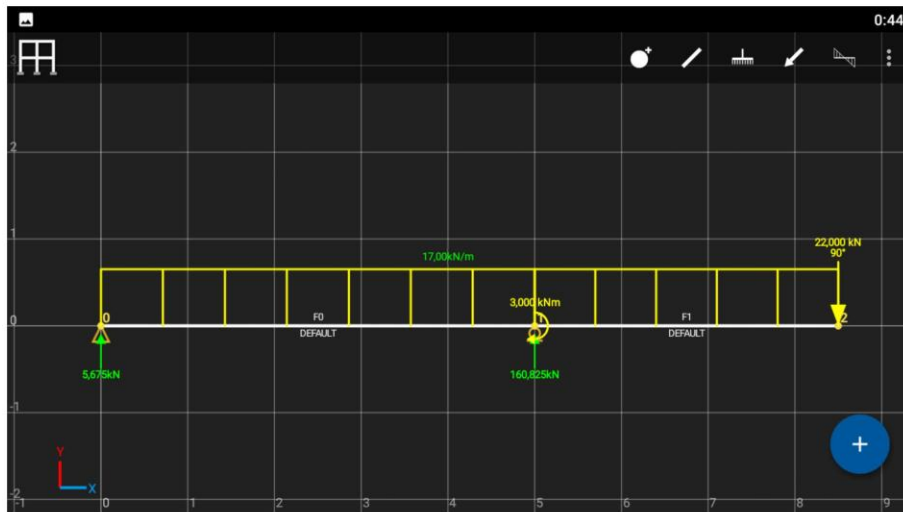


Figura 83. Reacciones viga 10





Figura 84. Diagrama De Momento Flector viga 10

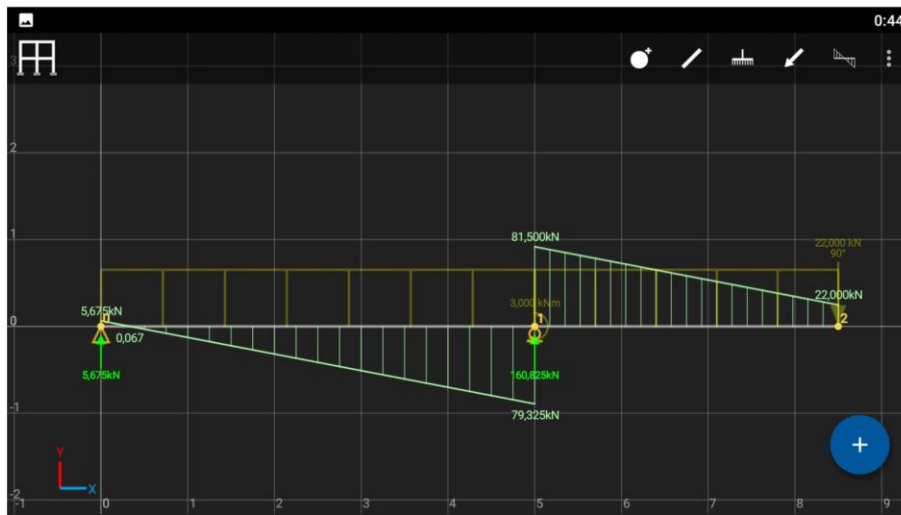


Figura 85. Diagrama de Fuerza cortante viga 10

# PÓRTICOS PROPUESTOS

1

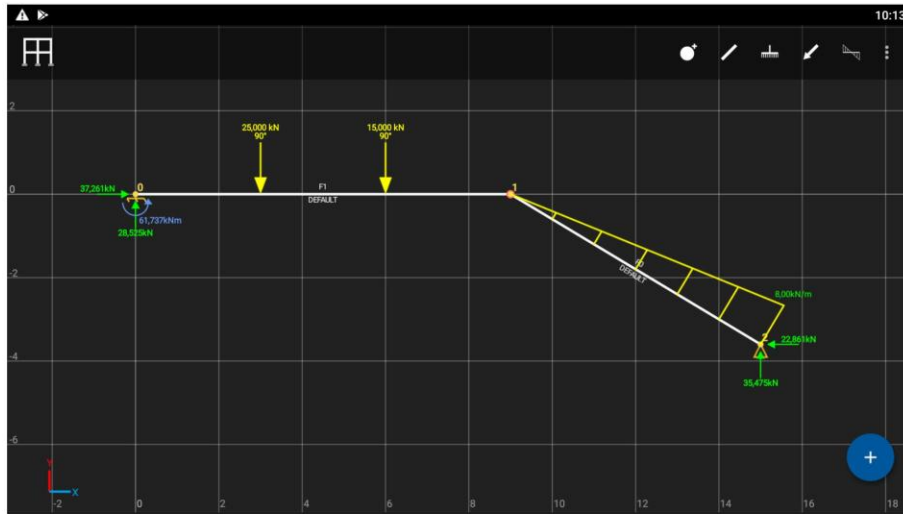


Figura 86. Reacciones pórtico 1

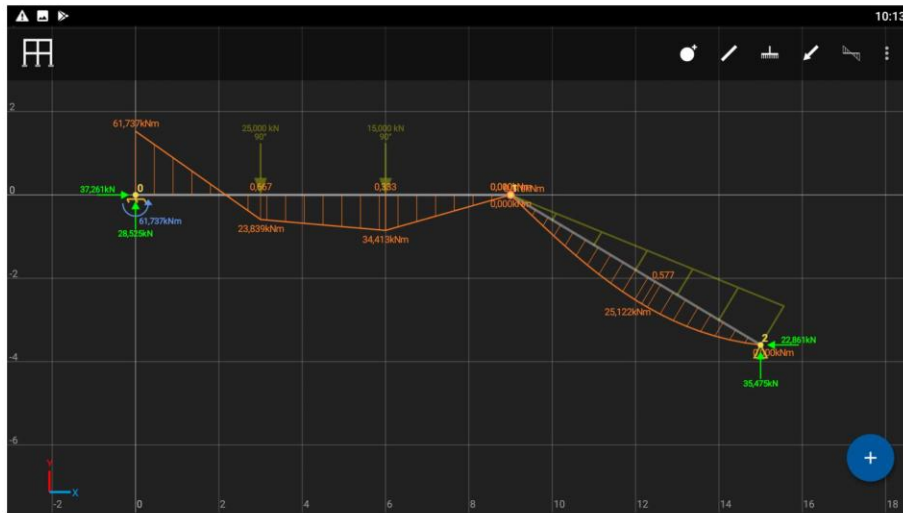


Figura 87. Diagrama De Momento Flector pórtico 1

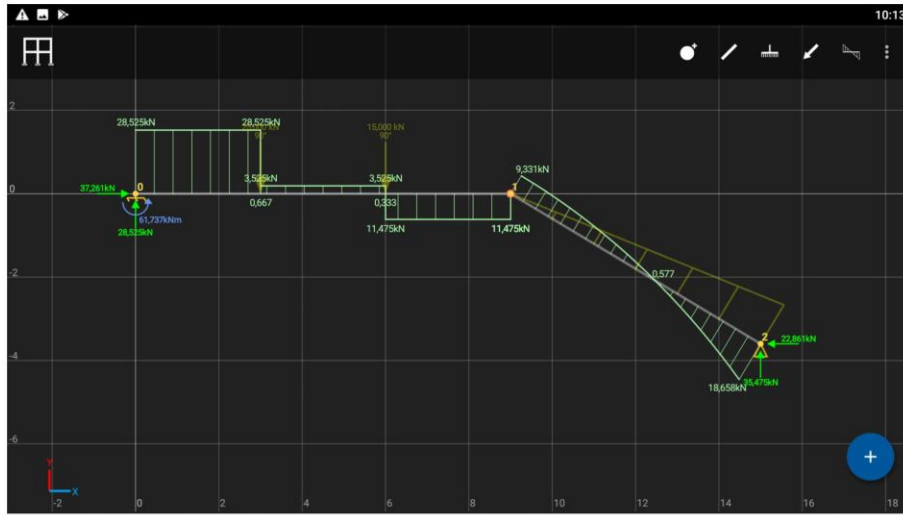


Figura 88. Diagrama de Fuerza cortante pórtico 1

2

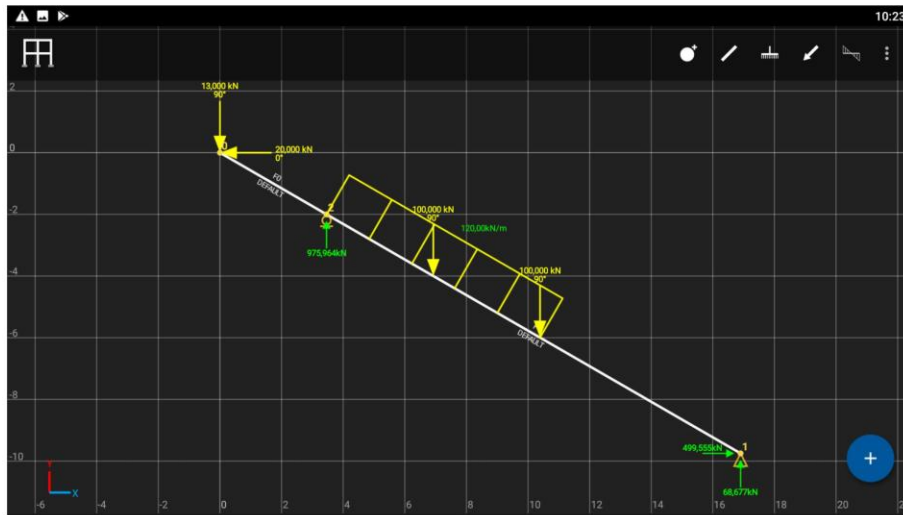


Figura 89. Reacciones pórtico 2



Figura 90. Diagrama De Momento Flector pórtico 2



Figura 91. Diagrama de Fuerza cortante pórtico 2

3

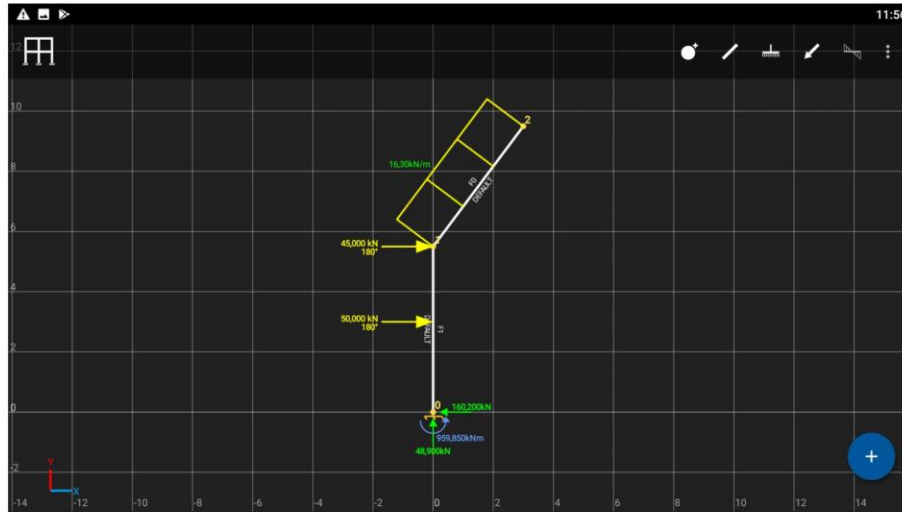


Figura 92. Reacciones pórtico 3

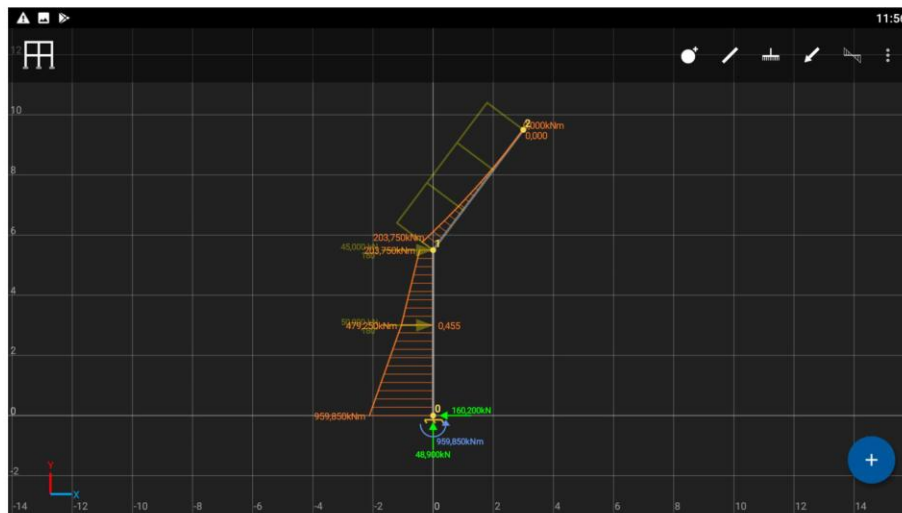


Figura 93. Diagrama De Momento Flector pórtico 3

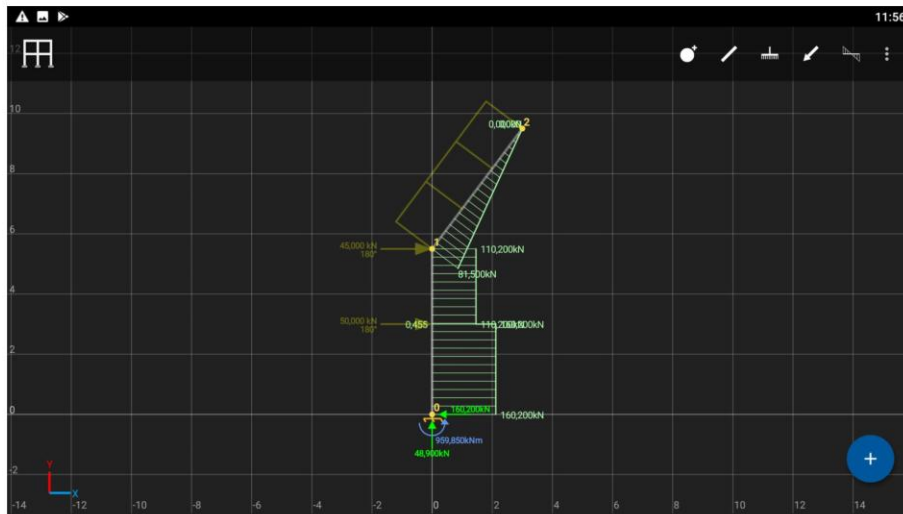


Figura 94. Diagrama de Fuerza cortante pórtico 3

4

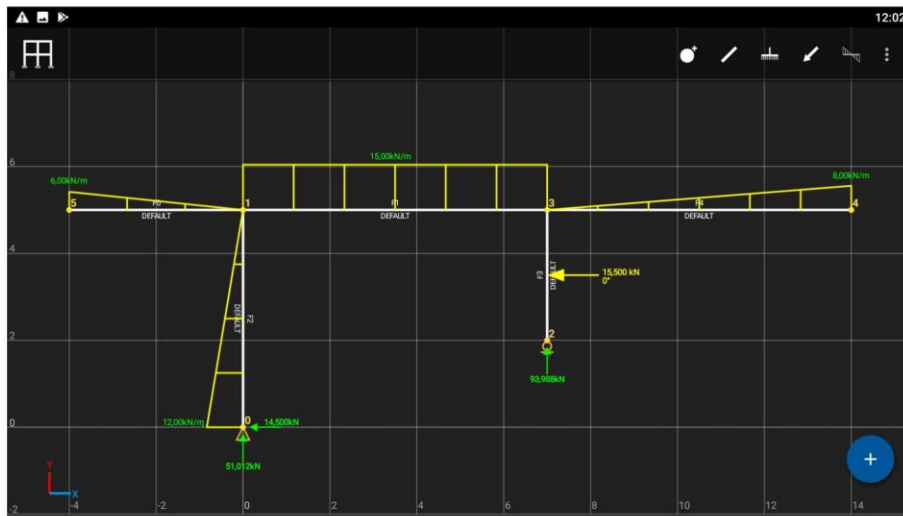


Figura 95. Reacciones pórtico 4

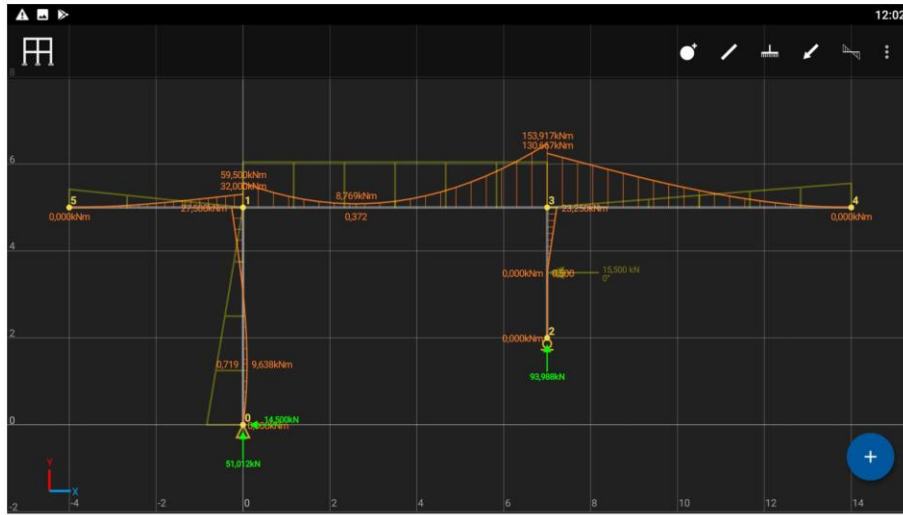


Figura 96. Diagrama De Momento Flector pórtico 4

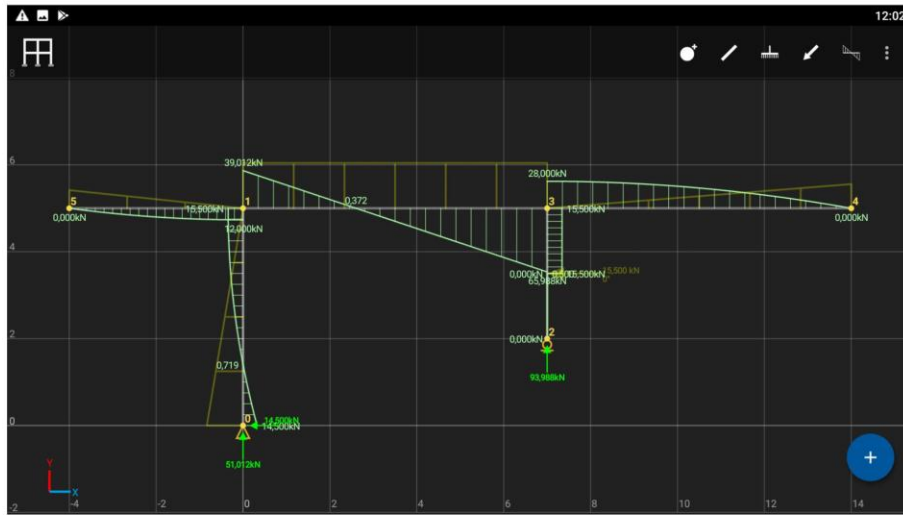


Figura 97. Diagrama de Fuerza cortante pórtico 4

5

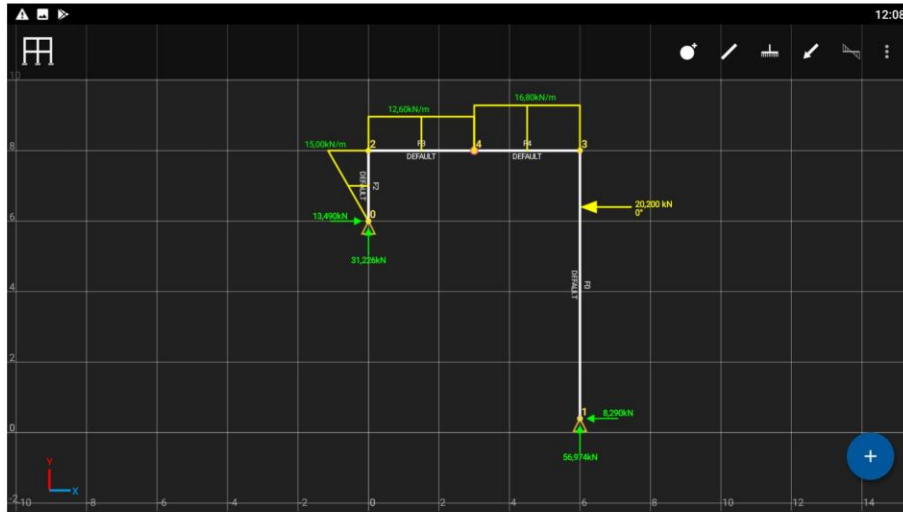


Figura 98. Reacciones pórtico 5

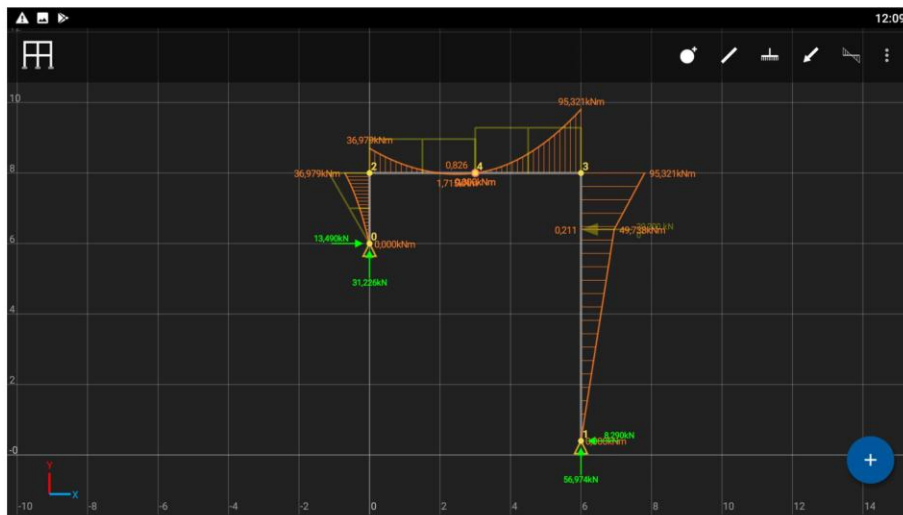


Figura 99. Diagrama De Momento Flector pórtico 5





Figura 100. Diagrama de Fuerza cortante pórtico 5

## Anexo 3. Encuesta realizada a estudiantes de ingeniería civil enfocada en la materia de estática

17/12/21 19:57

ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL ENFOCADA A LA MATERIA DE ESTÁTICA.

### ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL ENFOCADA A LA MATERIA DE ESTÁTICA.

El presente formulario será empleado como evidencia en la recolección de información para un trabajo de Grado desempeñado por parte de un estudiante del programa, el cual tiene como objetivo la REALIZACIÓN DE UN TEXTO GUÍA EDUCATIVO E INTERACTIVO EN EL ÁREA DE ESTÁTICA PARA INGENIEROS, ENFOCADO A ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL.

Dicho trabajo de grado busca complementar, suplir falencias y dudas que resulten luego de las clases, incita al auto estudio y a un mejor desempeño en la materia.

Agradecemos que por favor conteste con sinceridad y teniendo en cuenta cada parámetro comprendido en esta breve encuesta ya que su respuesta ayudará a considerar los diferentes puntos de vista y así, proporcionar el mejor texto posible.

Se ha registrado el correo del encuestado (null) al enviar este formulario.

**\*Obligatorio**

1. Correo \*

2. Nombres y Apellidos (Primeras letras en mayúsculas) \*

3. Código Estudiante \*

4. Documento de identidad \*

*Marca solo un óvalo.*

Cédula de ciudadanía

Tarjeta de identidad

Otro:

5. Numero del documento de identidad \*

17/12/21 19:57

ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL ENFOCADA A LA MATERIA DE ESTÁTICA.

6. Semestre que cursa (solamente el número) \*

---

7. Número de veces que ha matriculado la materia de estática \*

*Marca solo un óvalo.*

- 1 vez  
 2 veces  
 mas de 2 veces

Preguntas referentes a la materia de estática.

8. Calificando del 1 al 5, ¿Qué importancia cree usted que tiene la materia de estática en la ingeniería civil? \*

*Marca solo un óvalo.*

	1	2	3	4	5	
Poco Importante	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	Muy Importante

9. Considera usted que sus bases en estática para las materias consecutivas del programa de Ingeniería Civil son: \*

*Marca solo un óvalo.*

- Excelentes  
 Buenas  
 Regulares  
 Malas

17/12/21 19:57

ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL ENFOCADA A LA MATERIA DE ESTÁTICA.

10. ¿Cree usted que el tiempo establecido para la materia de Estática por parte del comité curricular es suficiente? (Por favor, responda si o no y complemente su respuesta indicando un porqué) \*

---

---

---

---

---

11. ¿Cómo estudia usted Estática? \*

*Selecciona todos los que correspondan.*

- Videos explicativos de YouTube  
 Consultando libros  
 Con la explicación del docente y el material suministrado  
 Pagando asesorías  
 Reuniones con los compañeros

Otro:  \_\_\_\_\_

12. Cuando usted estudia un libro específico para estática enfocado en la ingeniería civil, ¿Qué aspecto considera más importante para un buen entendimiento? \*

*Selecciona todos los que correspondan.*

- Ejercicios propuestos  
 Ejercicios resueltos  
 Teoría  
 No consulto libros de estática

13. ¿Qué aspectos debe tener para usted un buen docente de la materia de estática? \*

---

---

---

---

---

17/12/21 19:57

ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DE INGENIERIA CIVIL ENFOCADA A LA MATERIA DE ESTÁTICA.

14. ¿Cree usted que le serviría un texto resumido de la materia de estática, donde se presenten ejercicios propuestos, ejercicios resueltos, teoría básica desglosada y glosario para una mejor comprensión? \*

*Marca solo un óvalo.*

- Sí  
 No  
 Tal vez

15. ¿Desearía que su materia de estática estuviera acompañada de manejo de Software básico enfocado en análisis estructural? \*

*Marca solo un óvalo.*

- Sí  
 No

16. Si tuviera la posibilidad de sugerir que debería contener un buen texto de estática ¿Cuál sería su respuesta? \*

---

---

---

---

---

Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google.

Google Formularios