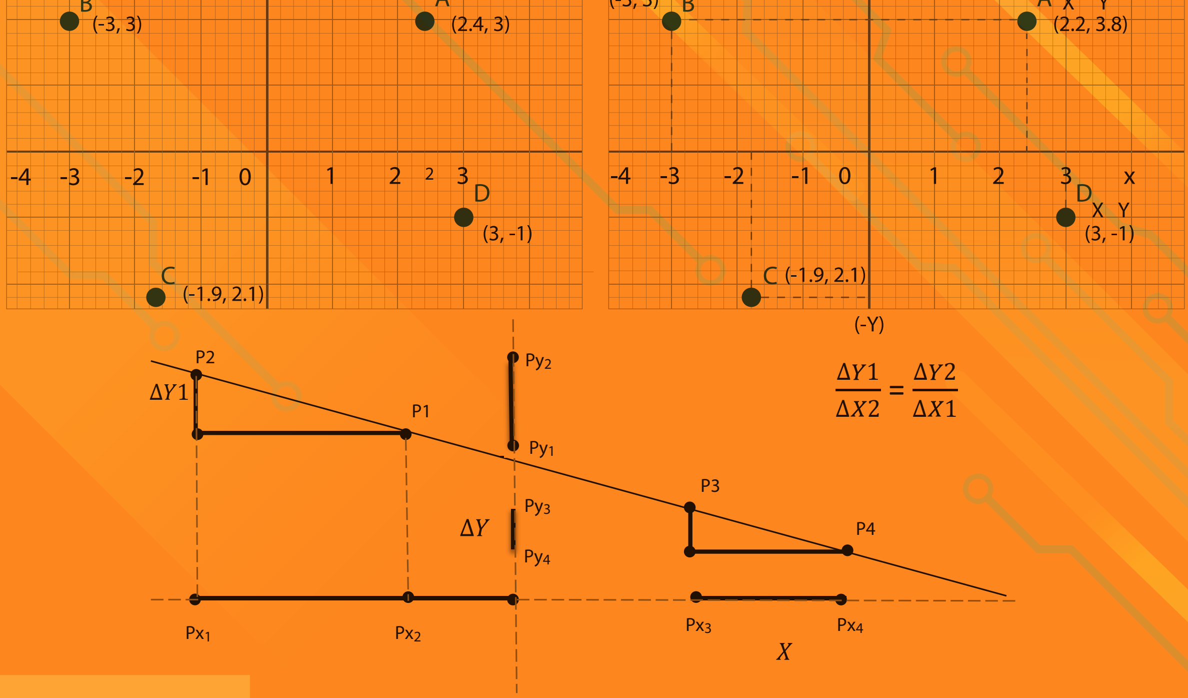


TIC Y TERMOPARES EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL

Gustavo Adolfo Acevedo Rodríguez
Mawency Vergel Ortega - Carlos Sebastián Gómez Vergel

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Universidad de los Andes

TIC Y TERMOPARES EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL

Gustavo Adolfo Acevedo Rodríguez
Mawency Vergel Ortega
Carlos Sebastián Gómez Vergel

Catalogación en la publicación - Biblioteca Nacional de Colombia

Acevedo Rodríguez, Gustavo Adolfo
TIC y termopares en la enseñanza de la función lineal / Gustavo Adolfo Acevedo Rodríguez, Mawency Vergel Ortega, Carlos Sebastián Gómez Vergel. -- 1a ed. -- Cúcuta: Universidad Francisco de Paula Santander; Bogotá: Ecoe Ediciones, 2021.
128 p. – (Ingeniería y afines. Ingeniería civil)

Contiene referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-503-159-3

1. Función lineal - Enseñanza 2. Cálculo - Enseñanza superior I. Vergel Ortega, Mawency II. Gómez Vergel, Carlos Sebastián III. Título IV. Serie

CDD: 512.150711 ed. 23 CO-BoBN– a1082870

Área: *Ingeniería y afines*
Subárea: *Ingeniería civil*

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

► Universidad Francisco de Paula Santander
Avenida Gran Colombia
No. 12E-96 Barrio Colsag
San José de Cúcuta - Colombia
Teléfono (057)(7) 5776655

► Ecoe Ediciones S.A.S.
Carrera 19 # 63C 32
Bogotá, Colombia

Primera edición: Bogotá, octubre del 2021

ISBN: 978-958-503-159-3
e-ISBN: 978-958-503-160-9

Directora editorial: Claudia Garay Castro
Corrección de estilo: Carolina Páez
Diagramación: Astrid Prieto Castillo
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz
Impresión: Carvajal Soluciones de comunicación S.A.S
Carrera 69 #15 -24

AGRADECIMIENTOS

Los autores manifiestan su gratitud a la Universidad Francisco de Paula Santander y al Fondo de Investigación (FINU) por la financiación del proyecto 023-2016 Aplicativos móviles en la didáctica del cálculo.

CONTENIDO

PRÓLOGO

En este libro, resultado de investigación, el uso de NTIC (dispositivos electrónicos) juega un papel importante como herramienta de apoyo para los estudiantes, con el fin de obtener datos experimentales de una situación real (toma de temperatura) y los procesamientos de los mismos para el ajuste de la curva, lo cual es llevado a una función lineal que permitirá a los jóvenes interpretar los procesos de control de temperatura. Lo anterior, es poner en contexto la función lineal para que ellos puedan observar su aplicación.

Los autores hacen uso de dispositivos electrónicos que ayudan a conseguir un comportamiento lineal a la salida de los termopares, también se hará uso de *software* (computador y smartphone) que serán una herramienta de apoyo en los procesos matemáticos, de modo que el estudiante evite caer en la repetición de algoritmos, pueda concentrar su atención en los conceptos y buscar en ellos una mejor comprensión.

Cuando se hace uso de dispositivos que sirven para medir algún tipo de variable, en nuestro caso la temperatura, se puede emplear el objeto matemático de función lineal, afín para modelizar de manera matemática este fenómeno. No obstante, el proceso es algo complejo para los estudiantes porque es necesario conceptualizar elementos de la función lineal, como lo son: variables dependiente e independiente, pendiente, además de dar sentido a cada uno de estos elementos con la realidad. Investigadores en el campo de la matemática educativa mencionan que los estudiantes tienen dificultad en identificar los elementos de una función lineal y su representación en el plano, por ejemplo: reconocer variables en un contexto, significado de la pendiente. Por otro lado, Cuevas y Pluvinage (2009) argumentan que:

> Otro importante factor de fracaso que observamos en los resultados obtenidos por los estudiantes en pruebas diagnósticas, tiene que ver con las deficiencias en el conocimiento del concepto general de función y los conceptos relacionados: variable independiente, variable dependiente, parámetro y ecuación. (p. 46)

Ellos proponen compensar estas deficiencias con el uso de computadores para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos basados en una enseñanza activa, evitando que los estudiantes recaigan en el aprendizaje memorístico de algoritmos en la resolución de los problemas. Además de lo anterior, la concepción de la función lineal genera en los estudiantes problemas de aprendizaje, por ello, si a este tema no se le da una solución desde los cursos tempranos se puede convertir en obstáculo al momento de tratar con situaciones reales (Agnelli *et al*., 2009). En el uso de la computadora como lo propone Kahane (citado en Cuevas y Pluvinage, 2009) no debemos desconocer que la tecnología avanza exponencialmente, además de su importancia en los diferentes sectores, incluyendo el educativo:

> El desafío en la educación matemática representado por la introducción de la tecnología es hoy algo incuestionable. Pero la sola introducción de nuevas formas de enseñanza […] no puede producir el avance deseado sin un cambio correlativo de ruta de aproximación cognitiva. Desde este punto de vista, consideramos que son esenciales dos realizaciones:
>
> - Entender que la computación en el cálculo es algo diferente de lo visto previamente en álgebra por el juego que se establece entre “local” y “global”.
> - Entender que el uso de la computación otorga un papel fundamental a la noción de orden de magnitud. (p. 48)

El proceso de una transposición tiene sus inicios en el saber sabio que es resultado de los proyectos de investigación. A partir de ahí comienza el camino de transformación hasta llegar a un saber enseñar, el cual tomará el docente y lo llevará al aula en un saber enseñado, para que el estudiante lo tome, lo comprenda y lo haga parte de sus conocimientos como un saber aprendido.

El objetivo de los autores fue introducir conceptos y aplicaciones en matemáticas que forman parte del sector industrial para modelar fenómenos de trasferencia de calor (en termocuplas), haciendo uso de la función lineal, afín para describir el comportamiento de sus variables y también predecir conductas de las mismas. Lo anterior, con la ayuda de las NTIC como mediadoras de la enseñanza y el aprendizaje.

Henry de Jesús Gallardo Pérez
Director grupo de investigación Arquimedes-UFPS.

INTRODUCCIÓN

La conceptualización de la función lineal y afín, es un tema importante por sus aplicaciones en la ingeniería y la matemática aplicada, es necesaria para el aprendizaje de conceptos de cálculo, no solo consiste en realizar una recta partiendo de dos puntos o de un punto y su pendiente, etc.; también funciona para comprender, describir y analizar los procesos variantes que se pueden presentar (Cuevas y Pluvinage, 2003; 2009). A pesar de que este concepto es visto por los estudiantes en bachillerato, cuando vuelven a confrontarlo en el primer semestre de universidad (cálculo) presentan dificultades. En ocasiones manifiestan desinterés o desconocimiento del tema, como si se tratase de algo nuevo para ellos.

La presente investigación busca promover en los estudiantes una comprensión de los significados del objeto de estudio (función lineal y afín), con el propósito de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como alcanzar niveles apropiados de motivación en los alumnos para que ellos demuestren interés y puedan alcanzar habilidades, destrezas y dominio en la resolución de problemas relacionados con los conceptos matemáticos a tratar.

Una de las características más importantes de la función lineal y afín, es que su aplicación permita comprender algunos procesos de variación, mientras que sus expresiones analíticas deben construirse como herramientas que dejan modelar situaciones reales, dentro de las cuales están los contextos productivos en que se desempeñan los técnicos relacionados con procesos cerámicos y control de temperatura (manejo de termocuplas).

La formación educativa de diferentes programas académicos es establecida por módulos con temas que incluyen implícitamente conceptos matemáticos, estos deben ser comprendidos por los estudiantes para analizar e interactuar con los procesos industriales. Lo anterior, permite desempeñarse en el campo educativo con eficiencia, competencia, agilidad y destreza, posteriormente, en el sector productivo como objetivo primordial de la población.

El objetivo de esta investigación es crear estrategias didácticas, motivadoras, basadas en contextos reales de los estudiantes de primer semestre de la universidad, en el área de cálculo. Para ello se busca diseñar una serie de actividades respecto al tema de función lineal y afín, enmarcadas dentro de una didáctica. En esta propuesta el uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC)[1] juegan un papel importante como mediadores en la experimentación de una situación real (control de temperatura en termocuplas), al igual que la obtención y el procesamiento de datos experimentales de un fenómeno para apoyar su modelización matemática. Es decir, que los estudiantes interpreten un proceso industrial bajo representaciones matemáticas visualizadas mediante dispositivos móviles como los smartphone, en este caso.

Debido a la importancia y el impacto de las tecnologías, sus avances, cobertura, facilidades de adquisición y de manejo por parte de la población casi en general, con ellas se busca generar el interés en los alumnos y alcanzar un aprendizaje significativo en los conceptos matemáticos. Lo anterior, mediante una didáctica definida y estructurada, donde el estudiante se haga participe de la construcción de su conocimiento con la orientación y la supervisión del maestro.

Un aspecto muy importante está relacionado con la enseñanza tradicional donde el docente se limita a impartir charlas, llenar tableros, mientras los alumnos copian casi al pie de la letra los escritos del profesor. Con este método se fuerza a que el estudiante haga uso de la memoria para crear sus conocimientos, muchas veces sin alcanzar aprendizajes significativos, esto puede conllevar a que se olvide en poco tiempo. Por esta razón, en contraste a lo anterior, se realizará una enseñanza activa donde el estudiante sea el eje central de los procesos educativos, constructor de sus conocimientos, que él mismo indague, reflexione y saque sus conclusiones acompañado del profesor. Para alcanzar lo mencionado se hará uso del modelo Cuvima como propuesta metodológica, el cual surge por la necesidad de orientar actividades que conlleven a mejorar el aprendizaje y todos sus procesos educativos, por ejemplo, los conceptos de las matemáticas y la física.

1 NTIC: las Nuevas Tecnologías en Información y Comunicación, se refieren a herramientas tecnológicas digitales: arduino, módulo de Ethernet, termocuplas, teléfonos inteligentes (smartphone) y PC.

Según los autores del modelo, las matemáticas y la física deben unirse de manera integral, este modelo se ajusta al trabajo a realizar, en especial porque hace uso de las tecnologías como mediadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En la electrónica y el sector industrial se presentan diversos fenómenos físicos, los cuales se pueden modelar haciendo uso de las matemáticas. Para este caso nos encontramos con el proceso de transformación de la energía, fenómeno presentado en los termopares, transductores que transforman la energía calorífica en energía eléctrica para su sucesivo manejo, interpretación, control, visualización, análisis. Cabe destacar que en este proceso se encuentra presente el objeto matemático de la línea recta.

Además del termopar se utilizarán otros dispositivos electrónicos acompañados de la computadora y los smartphone que ayudarán a la modelización del fenómeno, haciendo uso de registros semióticos que facilitan la construcción del modelo matemático. Por otro lado, dentro de la didáctica se realizará un pretest con el fin de determinar las competencias que el estudiante tiene para enfrentar el objeto matemático. Al terminar se procederá a la implementación de la didáctica, finalizando con el postest y los análisis de resultados para determinar la conceptualización alcanzada por los estudiantes.

1. PROBLEMÁTICAS

1.1. Descripción del problema

Paul Ernest argumenta en su libro "Filosofía de la educación matemática" la importancia de la filosofía en matemáticas, sus principios, aplicaciones en la tecnología y cómo se encuentra presente en la vida social de los hombres (MEN, 2014); sin embargo, eso conlleva a que el estudiante incorpore las matemáticas como parte de su vida diaria. Lo anterior, nos lleva a plantear el diseño de una transposición didáctica de los objetos matemáticos, es decir, trasformar el saber sabio matemático en un saber enseñado (Chevallard, 1991), mediante la contextualización del objeto matemático dentro de aplicaciones reales y concretas (función lineal y afín, en el caso de los termopares). Llevar un objeto matemático a un entorno real es un factor que puede motivar a los estudiantes, con relación a cómo y para qué usar las matemáticas; al respecto, el MEN (2014) menciona que:

> Los alumnos aprenden a usar las matemáticas en la sociedad y a descubrir qué matemáticas son relevantes para su educación y profesión posteriores. Puesto que es importante que todos los alumnos aprendan matemáticas como parte de su educación básica, también es importante que sepan por qué las aprenden. A través del contexto desarrollarán una actitud crítica y flexible ante el uso de las matemáticas en problemas que deberán afrontar en la vida real (p. 25).

Sin embargo, un inconveniente que se presenta a menudo en las instituciones educativas es el hecho que, por falta de tiempo, los estudiantes solo aprenden matemáticas en su parte operativa (desarrollo de ejercicios) y su aplicabilidad se deja para el final del programa, siendo esto omitido muchas veces (2014). Por tal razón, este proyecto se enfocará en la aplicación concreta que tiene la función lineal y afín (instrumentación y control industrial) como punto de partida en las actividades.

La función lineal emerge como una herramienta de conocimiento para establecer relación entre patrones variables y poder controlar sus cambios, los estudiantes tienen que empezar a desarrollar ese pensamiento variacional (constante, variable, función, razón, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra y modelos funcionales) y aplicarlos en contextos de la vida cotidiana (2014). Uno de estos procesos se puede evidenciar con la visualización y el control de temperatura, los cuales hacen parte de procesos industriales.

Con la intención de encaminarnos en la problemática de este proyecto de investigación se comenzará mencionando algunos apartados del Ministerio de Educación (MEN) (2014)[2], relacionados con lineamientos curriculares que deben ser tenidos en cuenta por los docentes como pautas de las metodologías, criterios y programas recomendados en los procesos de enseñanza. Según el MEN (2014):

> Los lineamientos constituyen puntos de apoyo y de orientación general frente al postulado de la Ley que nos invita a entender el currículo como "[...] un conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local (Artículo 76) (p. 2).

En lo que concierne a los lineamientos curriculares (matemáticas) el MEN (2014) argumenta:

> No debe asumirse como un texto acabado que agota todos los posibles referentes para elaborar o desarrollar un currículo, sino más bien como una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación que ha de suscitar análisis, discusiones y proyecciones en torno al mejoramiento de la calidad de la educación matemática (p. 4).

Partiendo del argumento anterior y basados en experiencias docentes, en el programa Técnico Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales de la Universidad de Pamplona, se ha podido observar que los estudiantes tienen muchas dificultades con los conceptos matemáticos, en especial con la función lineal y afín. Este problema se manifiesta dentro de la formación profesional al momento en el que los alumnos deben adquirir conocimientos y habilidades en el uso de ciertos dispositivos propios del sector industrial, entre ellos tenemos un elemento importante y necesario para el control de temperatura, que es el termopar.

2 MEN: Ministerio de Educación en Colombia.

Debido a su naturaleza o composición, los termopares tienen un comportamiento no lineal, esto es un problema al momento de usarlos, por este motivo se evidencia la necesidad de aplicar los procesos de linealización con el uso de dispositivos que nos ayudarán a obtener una representación lineal a su salida, la cual será más sencilla para su comprensión, tratamiento y control.

2. MARCO REFERENCIAL

2.1. Antecedentes

2.1.1. El pensamiento variacional y predictivo

Las matemáticas a menudo se presentan de una forma estática, muchas veces dadas las circunstancias de la situación planteada, como suele suceder cuando se hace uso solo de elementos propios del algebra para solucionar problemas, descuidando el papel crucial del uso de diversos registros semióticos de representación. Una forma de dinamizar los objetos es traer a la mesa de trabajo fenómenos del mundo real y construir modelos matemáticos, según Janvier (1996) para lograrlo se debe partir de una fase de formulación donde se establecen vínculos o conjeturas entre sus variables, seguido de la realización de transformaciones matemáticas para llegar a un modelo matemático. En la fase de validación se confrontará la legitimidad del modelo con la situación que lo originó.

Cuando se traen casos reales a las matemáticas se debe crear un modelo que permita comprender, observar y encontrar las relaciones entre sus variables para llevarlo a una función que permita predecir y vislumbrar sus comportamientos. Sierpinska (1992) parte del concepto de función que asume las variables dependiente, x, e independiente, y, respectivamente. Esto como partes del mundo de los cambios (objetos cambiantes), así como f a las relaciones existentes entre los objetos cambiantes o los procesos de transformación de un objeto en otros.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función, se recomienda hacer un equivalente en el aula de cómo fueron sus inicios, empezando como modelo de relaciones, seguida de un modelo que sirva de instrumento para la descripción y la predicción (Sánchez, 2016); es decir, saber de dónde venimos, en dónde estamos y para dónde vamos. Una de las conclusiones del trabajo de Sierpinska (1992) reporta que se debe promover en los estudiantes el interés en explicar los cambios, al igual que determinar coherencias entre sus variables, establecer criterios de comprensión de lo que cambia, cómo lo hace y llegar a una herramienta que le dé la posibilidad de alcanzar y modelar situaciones reales.

Para hacer significativo el aprendizaje (función lineal y afín) en los estudiantes, deben empezar a desarrollar un pensamiento variacional, analizar los cambios que presentan las diferentes variables involucradas y cómo cambian; la función se presenta como un instrumento indiscutible con la cual se pueden afrontar los fenómenos cambiantes y sus variaciones. Centrarse solo en soluciones algebraicas, dejando a un lado el rol que representa el análisis de la covariación entre diversas magnitudes iguales o de diferente naturaleza, que obedecen a características similares mediante algún registro semiótico, no permitirá comprenderlo como modelo matemático explicativo de situaciones de variación.

La función con los modelos de representación permite modelar situaciones de variación, para Posada y Villa (2006), al igual que para esta investigación, la construcción del concepto de función lineal y afín, sugiere: la presencia de situaciones donde se encuentren regularidades, razonamientos proporcionales que resultan ser estratégicos para un desarrollo del pensamiento variacional, situaciones analíticas, uso de registros de representaciones y situaciones de dependencia que permitan la modelización.

Desde una perspectiva variacional, Posada y Villa (2006) recomiendan empezar por medio de un modelo matemático (sentido dinámico) que sirva como intermedio para entenderlo como un concepto matemático analítico (sentido estático), para realizar la construcción de conceptos propios del algebra. Lo anterior fue desarrollado con la ayuda de diferentes registros de representación asociados al concepto de función: "El registro de representación en lengua natural (castellano), el sistema de representación gráfica cartesiano ortogonal, el registro de representación tabular y el registro de representación simbólico" (p. 131).

Por lo general, una situación se presenta en un lenguaje natural y mediante el modelado matemático se llega a la construcción de un registro simbólico, además, como intermedio para alcanzarlo se utilizaron registros auxiliares como tabulares y gráficos (Duval, 2004). Los registros auxiliares dan información adicional que en ocasiones resulta difícil esclarecer con el registro principal, además permite desarrollar secuencias procedimentales de forma organizada e incluso, pueden remplazar el registro principal en algunos casos.

2.1.2. La línea recta como lugar geométrico

Las funciones lineales son representadas en el registro gráfico cartesiano mediante línea recta, sus conceptos son de gran utilidad para dar solución a procesos cambiantes, por esta razón su enseñanza debe empezar a temprana edad en los estudiantes a quienes se les intenta impartir dichos conocimientos y realizarlos de forma abstracta. Según Dubinsky (1997) la abstracción y el formalismo resultan ser el alma en las matemáticas, en consecuencia se deben buscar formas, estrategias y experiencias que puedan agradar a los estudiantes en sus inicios en esta maravillosa ciencia.

Carbajal (2013) realiza una retrospectiva de la línea recta donde se cree que los estudios del lugar geométrico tienen sus inicios en las matemáticas griegas. Apolonio es considerado como "El gran geómetra" por los trabajos desarrollados con las cónicas, sus estudios fueron continuados por Pappus.

Además, realizó la investigación en estudiantes de bachillerato y de primer semestre de cálculo en la universidad, su objetivo principal fue la comprensión de la línea recta como lugar geométrico apoyado en una didáctica (Cuevas y Pluvinage, 2003). La cual tiene como idea principal la enseñanza activa donde el estudiante es el protagonista principal y el encargado de construir sus propios conocimientos de manera activa. Se acudió al uso de ayudas tecnológicas como la computadora con el *software* lirec ii para la conceptualización de la línea recta, así como a un Escenario Didáctico Virtual Interactivo (EDVI) para que el estudiante interactuara variando los parámetros de una escalera (altura, ancho e inclinación de la misma). Con esto se buscó generar interés y motivación, lo que es una de las recomendaciones de la didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003).

Según Lehman (2008) pasar de una ecuación a una gráfica y viceversa, son los dos objetivos fundamentales de la geometría analítica, por ello, en Carbajal (2013) se organizaron una serie de actividades y ejercicios dosificados, por ejemplo: partiendo de una serie de puntos construir su respectiva gráfica. Lo anterior, esperando que el estudiante refuerce sus habilidades en la ubicación de puntos en el plano cartesiano y el trazado de rectas, para proceder a su operación contraria. Duval (1998a) dice que se alcanzará una comprensión cuando se realicen al menos conversiones efectivas entre dos representaciones semióticas.

A pesar de que los estudiantes en cursos anteriores han tenido experiencias en el uso de diversos registros de representación y articularon entre ellos, no alcanzaron un aprendizaje significativo, según Ausubel (1983) "Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra)" (p. 2). Debido a que los procesos cognitivos no resultaron adecuados en él, sus conocimientos desaparecieron. Para Iafrancesco (2017) la mente humana fue diseñada con el fin de nunca olvidar, esto se puede evidenciar, por ejemplo, en las personas que aprendieron a leer, dado que así dejen de hacerlo por mucho tiempo jamás lo olvidaran. Uno de los problemas que más se hace evidente en los estudiantes según Carbajal (2013), no solo de bachillerato sino también en los universitarios, es cuando intentan realizar una representación o se les presenta algún tipo de concepto matemático, puesto que muestran un desconocimiento, es decir, como si fuera la primera vez que lo trataran.

Otro aspecto para resaltar en Carbajal (2013) es la importancia y el uso que se deben dar de la tecnología en las matemáticas, ya que ella permite explorar e indagar los conceptos matemáticos desde un punto de vista diferente. Además de cómo su buen uso puede acercarnos más en cumplimiento de los objetivos de aula y el aprovechamiento del tiempo, ya que en la enseñanza tradicional los alumnos son limitados a repetir, lo cual se convierte en hábito. A su vez, la utilización de algoritmos determinados, que a veces resultan muy tediosos, ocupan largos espacios de tiempo, el cual se puede usar en actividades diferentes. Con el uso de las tecnologías es posible evidenciar y visualizar en tiempo real el comportamiento de los procesos, con esto se busca mejorar la comprensión de los objetos de estudio.

2.1.3. Función constante, lineal y afín

Dentro de las investigaciones realizadas, se tomó como referencia el trabajo elaborado por Barajas *et al.*, (2016), su contextualización y objetivos se ajustan en gran medida a este trabajo. En el estudio de la función lineal existen diversas dificultades (Roldán, 2013), las cuales se evidencian en el uso de las diferentes representaciones. Se menciona que algunos docentes centran sus enseñanzas en lo algebraico, descuidando el resto de las representaciones, por ello, muchas veces los estudiantes limitan la resolución de ejercicios solo a la utilización de algoritmos algebraicos de manera rutinaria. Otro problema es la falta de interpretación de los fenómenos que presentan variación, dado que se descuidan o no se les da la importancia que merecen los procesos de modelización. Por otro lado, al plantear actividades en clase que no se inscriben en un contexto cercano al estudiante, estas no permiten que se fortalezca el análisis, la interpretación y la argumentación.

Barajas *et al.* (2016), concentraron su trabajo en la interpretación y el análisis de la función constante, lineal y afín en situaciones de contexto, para ello hicieron uso del GeoGebra, con el fin de desarrollar habilidades matemáticas como las exigidas en las pruebas PISA[3] (2012). Respecto a estas pruebas, la investigación resulto bastante pertinente, dado que las habilidades que demandan hacen parte de las capacidades y las destrezas que los estudiantes deben alcanzar e interiorizar en busca de la comprensión de los diversos objetos de estudio. Otro punto para tener en cuenta es que no se realizó una comparación de resultados de dichas pruebas, sino que

3 PISA: programa para la evaluación internacional de alumnos.

se trataron de buscar soluciones que potenciaran a los estudiantes en alcanzar los requisitos y estar a la altura de los demás países. Comparados con Shanghái que obtuvo un puntaje de 613, en las pruebas de 2012 Colombia alcanzó un promedio de 376, el cual estuvo por debajo del promedio de la OCDE[4].

"Matemáticas: capacidad para formular, emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos; incluye el razonamiento y el uso de conceptos matemáticos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos" (ICFES[5], 2013, p. 10). Barajas *et al.* (2016) se basaron en estas competencias para realizar su trabajo de investigación, ellos hicieron una conceptualización de la función constante, lineal y afín, sus diferentes formas de representación y cómo se puede pasar de una a otra. Por ejemplo: partiendo de la representación simbólica y remplazando la variable dependiente por un número real, se obtiene la variable independiente, como con el par de coordenadas (x, y) se pueden agrupar en una tabla o ubicar dentro del plano cartesiano y obtener la gráfica de la función.

> Las traducciones de la representación gráfica a las representaciones numérica, tabular y diagrama sagital, implican el proceso de lectura de la gráfica. Es decir, para obtener información de la gráfica debemos identificar las variables representadas en los ejes, la unidad y la escala de los ejes, de esta forma identificar los puntos de la gráfica y hacer la traducción correspondiente. Por ejemplo, una vez identificadas las coordenadas del punto en la representación gráfica se ubica la coordenada en x en la primera columna y la coordenada en y en la segunda columna de la tabla (Barajas *et al.*, 2016, p. 9).

Dentro de la didáctica Barajas *et al.* (2016) utilizaron la representación simbólica partiendo del contexto de la investigación, la cual genera tres funciones dependiendo de los valores de m y n: constante, lineal y afín, esto se mencionará con más detalle en el marco teórico. Además de lo anterior se dan una serie de ejemplos y actividades, con el fin de que el estudiante aprenda a distinguir, argumentar y proponer diferentes formas de representación de la línea recta, partiendo de sus condiciones iniciales.

Además, realizaron un análisis cognitivo teniendo presente las capacidades (que el estudiante debe poseer al momento de enfrentar el objeto matemático), las dificultades (presentadas al momento de operar con los conceptos mencionados) y los errores (los cuales realizan al resolver los problemas de línea recta). Todos estos aspectos fueron codificados en tablas partiendo de las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo que fueron caracterizadas en tres niveles: procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales (nivel superior), objetivos (nivel medio)

---

4 OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.

5 ICFES: Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior.

y capacidades (nivel inferior). A partir de estas expectativas se centraron en los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales (nivel superior) de las cuales se plantearon tres objetivos:

> Objetivo 1. Formular modelos que describan situaciones de variación de costos y relaciones entre magnitudes físicas, utilizando funciones constante, lineal y afín.
>
> Objetivo 2. Emplear diferentes sistemas de representación de la función lineal y afín para dar respuesta a un problema.
>
> Objetivo 3. Interpretar los posibles resultados de un problema de función constante, lineal o afín (2016, p. 12).

Para cada objetivo se diseñó un grafo donde se marca la ruta a seguir y los criterios de logro que se deben ir alcanzando para cumplir las metas planteadas. Otro aspecto importante que se manejó concierne a la motivación de los estudiantes en las matemáticas, para lo cual se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos: expectativas sobre sí mismo, factores personales intrínsecos, extrínsecos y los que entrelazan la motivación y el aprendizaje. Con base a estos tres factores se ubicaron dentro de expectativas motivacionales relacionadas con la función constante, lineal y afín; a su vez, mantener a los estudiantes motivados y atentos no es tarea fácil, es una tarea ardua por parte de los educadores, sobre esto Gómez (2014) manifiesta:

> Si el docente logra tener una relación auténtica y transparente, de cálida aceptación, de valoración como persona diferente, donde vea al alumno tal cual es, probablemente esto ayude al alumno a experimentar y comprender aspectos de sí mismo, emprender y enfrentar mejor los problemas. La tarea educativa es un trabajo arduo y no siempre se perciben los resultados, donde el alumno se interesa y se motiva si el docente hace lo posible para ponerlo frente a la realidad teniendo en cuenta que una experiencia tiene sentido si se la compara y confronta con la vida que vive el alumno (p. 32).

Es importante generar pasión por lo que se enseña, mantener el interés en los alumnos, Iafrancesco (2012) dice: "La actitud endógena por el aprendizaje de parte de quien aprende: la necesidad, la expectativa, el interés, la motivación y la pasión por el aprendizaje es el punto de partida de todo aprendizaje significativo" (p. 158).

2.1.4. La transposición didáctica

Dentro de los conceptos más relevantes de la transposición didáctica tenemos: saber sabio, saber a enseñar, saber enseñado y saber aprendido (estudiantes), estos se tratarán con más detalle en los siguientes capítulos, por el momento nos centraremos en la importancia de realizar una transposición didáctica. En la transformación que un saber tiene que sufrir para llegar a un aula y como la noosfera representa un papel crucial en la escogencia o el rechazo de algunos conceptos que, por razones políticas, sociales, económicas, etc., no encajarán o ya no encajan en los sistemas didácticos.

La transposición didáctica tiene su punto fuerte de acción en las matemáticas, nos encontramos con el investigador y matemático Chevallard, como uno de los más fuertes representantes de este proceso que en los últimos años ha empezado a ser acogido por diferentes disciplinas. Por ejemplo, partiendo de las investigaciones realizadas por Mendeléiev sobre la tabla periódica y cómo se han realizado las diferentes interpretaciones en los libros de química más utilizados en la secundaria, Zúñiga (2014) también hace referencia a las principales investigaciones en este saber.

Existen diversos autores que muestran posturas en pro, mientras que otros están en contra de la transposición: Joshua, Dupin, Astolfi, Develay, Petitjean, Caillot y Tozzi (Gómez, 2005). Para los cuatro primeros investigadores es esencial la inclusión de nuevos conceptos en los sistemas didácticos, la importancia y el proceso de transformación de sus saberes; en cambio, los tres últimos realizan un par de críticas a la transposición. Es posible evidenciar una reducción de los saberes institucionales en campos diferentes a las matemáticas, una definición bastante limitada del mismo acto de transposición y la poca restricción que se le da a la noosfera.

> […] la definición de los nuevos currículos es siempre el resultado de apuestas sociales donde muchos actores tienen su palabra por decir y donde científicos o universitarios no son, finalmente, sino uno de los elementos del debate. Lo relevador de estas luchas de influencia es la aparición de nuevos programas donde surgen nuevos objetos de enseñanza que no son el resultado de una transposición didáctica del saber sabio (p. 94).

Los autores críticos de la transposición reconocen el potencial de la transposición didáctica en la matemática y en disciplinas cercanas como la física, ya que tienen como objetivo la producción de conocimientos científicos, aunque para ellos no sucede tal hecho con otras disciplinas. La transposición didáctica resulta inherente a este trabajo investigativo, se realizará un análisis conceptual de sus características, campos de acción, estrategias, entre otros. Para esto se analizarán diversos documentos, dentro de los cuales nos encontramos con el autor De Faria (2006), quien realiza una descripción de las principales características de la misma, sus procesos de transformación del saber, los conceptos que se encuentran alrededor de la transposición, las relaciones que existen entre docente, alumno y saber, además de la función que representa la noosfera en los sistemas didácticos.

No se pretende tratar a fondo todo el proceso de la transposición didáctica en la función lineal y afín, además de cómo llego a ser parte de los procesos educativos; en cambio sí se realizará un trabajo que busca introducir conceptos y aplicaciones reales que hacen parte de un contexto industrial para estudiantes de primer semestre de la universidad (cálculo diferencial). En especial de carreras afines a electrónica, mecánica, mecatrónica, entre otras, con el fin de que los alumnos logren la concepción del objeto matemático mencionado en un menor tiempo, de forma que genere interés y expectativa.

De las anteriores apreciaciones, Michel Verret, quien para algunos investigadores es el progenitor de la transposición, propone que todo objeto debe de ser transformado para ser enseñado: "Toda práctica de enseñanza de un objeto presupone, en efecto, la transformación previa de su objeto en objeto de enseñanza" (Gómez, 2005, p. 84). Siguiendo con Verret (citado en Gómez, 2005) este argumenta que todos los saberes no son escolarizables:

> Una transmisión escolar burocrática supone en cuanto al saber: (1) la división de la práctica teórica en campos de saberes delimitados dando lugar a las prácticas de enseñanza especializadas –es decir, la desincretización del saber–; (2) en cada una de estas prácticas se presenta la separación del saber y la persona –es decir, la despersonalización del saber–; (3) la programación de los aprendizajes y los controles siguen las secuencias razonadas que permiten una adquisición progresiva de los peritajes –es decir, la programación de la adquisición del saber– (p. 85).

2.2. Marco teórico

Se busca que los estudiantes de la técnica profesional en instrumentación y control de procesos industriales se familiaricen con el concepto de función lineal y afín desde una aplicación concreta, y que esto sirva de agente motivador para los procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto para el docente como para el alumnado. Por otro lado, con el fin de dar inicio al marco teórico y siendo el propósito de la investigación, se presentarán los programas de "articulación de la universidad", sus metodologías, enfoques, competencias y demás.

2.2.1. Los programas de articulación de la universidad

Los programas técnicos y tecnológicos de la universidad buscan articular con calidad, responsabilidad, pertinencia y coherencia la educación media con la educación superior, favoreciendo la cobertura y proporcionando una formación basada en competencias que permita al estudiante prepararse hacia el ciclo universitario y la inserción al sector laboral desde su formación media.

Los estudiantes deben poseer ciertas competencias para acceder a una vida laboral como parte de su formación personal, lo cual les permita su autosostenimiento y la contribución a los sectores productivos de la región. La universidad está muy comprometida con el auge del departamento, del país y la realización de sus estudiantes como profesionales integrales y competitivos. Para alcanzar estos objetivos los docentes de los programas de articulación inician orientando los microcurrículos de las instituciones de educación, dado que estos programas tienen sus inicios en los grados 10 y 11 de bachillerato. Además, se inculca un sentido de pertenencia a través de un acompañamiento de gestión pedagógica que garantice la continuación del alumno en los siguientes semestres.

La universidad está muy implicada en el apoyo y la contribución a los programas académicos de instituciones de educación básica y media, incentivando, acompañando y fortaleciendo a los docentes en la formación por competencias para que adquieran los conocimientos específicos necesarios con el fin de orientar una formación pertinente, coherente, que permita una articulación de la media técnica con el ciclo de formación técnico profesional o profesional ofrecido.

Los programas técnicos crean condiciones que favorecen el tránsito de estudiantes entre la educación media (grado 10 y 11 de secundaria), al igual que la educación superior. Con esto se buscan aumentar los índices de cobertura de pregrado y el fortalecimiento en los saberes disciplinares básicos de la educación media; los ciclos propedéuticos permiten que los estudiantes puedan desarrollarse según sus interés y capacidades, basados en un enfoque constructivista (aprender haciendo) y unas posturas que lleven a un aprendizaje coherente con la noción de desarrollo de competencias, tanto en el campo ocupacional como en el del ser social e individual; las competencias que desplazan la enseñanza tradicional con el objetivo de llegar a una formación más completa.

El modelo constructivista es el enfoque de la técnica mencionada con algunos aspectos del conductismo, ya que se abordan temas referentes a las competencias laborales (funcionales). Como se expone en el documento maestro (Universidad de Pamplona, 2016): "En efecto, el propósito es el acceso de los individuos a niveles superiores de desarrollo intelectual según las condiciones biosociales de cada uno; en la relación maestro-alumno, aquel se desplaza, se horizontaliza o adquiere nuevos ropajes y lenguajes" (p. 43). Para esto, los contenidos de cada módulo son orientados en miras del sector productivo, es aquí donde se pone en juego el saber con el hacer, sin separarnos del ser: "[…] se facilitan además el acceso de los individuos a estructuras superiores de desarrollo por medio de la indagación, la exploración de conocimiento nuevo y la apropiación activa de las estructuras fundamentales de las diferentes disciplinas" (p. 43). El desarrollo es secuencial, progresivo y acumulativo (Iafrancesco, 2017).

No obstante, este modelo constructivista surge de las condiciones y las posibilidades del contexto, tanto del entorno social, económico, político y cultural, como de las características de las instituciones educativas que lo asumirán. La implementación de los modelos pedagógicos y de formación por competencias constituyen un cambio radical de las prácticas curriculares, por lo cual la selección de estrategias de implementación instaura un elemento integrador e imprescindible del modelo en el contexto de cada institución.

En los programas de la universidad se fundamenta un modelo de formación por competencias (competencias de eficiencia para interpretar el mundo, la investigación y la innovación) desde una óptica constructivista, sin excluir un aprendizaje integral en miras del mejoramiento. Este enfoque ha sido acogido en muchos países con muy buenos resultados y nuestro país no es ajeno a esto, los investigadores Rosas y Balmaceda (2008), en su síntesis sobre Piaget y Vygotsky, ven este modelo como:

> El constructivismo como concepto tiende a transformarse en un concepto demasiado amplio y polisémico a partir de las miles de propuestas que han surgido en los últimos años bajo este gran alero conceptual. Ya no basta declararse constructivista. Ahora es necesario, además, poner un apellido a la descripción teórica, incluso dentro del restringido ámbito de la educación y la psicología, fuera de las acepciones que este concepto puede tener en filosofía, sociología y semiótica (p. 106).

Esto implica un compromiso serio por parte de los educadores y las instituciones educativas, así como tener criterios claros, bien estructurados y organizados de los aprendizajes que se esperan alcanzar por parte de los educandos. Dependiendo de los conocimientos y su propia forma de ser, pensar e interpretar las nuevas informaciones, el estudiante avanzará en su aprendizaje.

Von Glasersfeld (1981) propone que el constructivismo no está limitando a la forma de conocer, sino que da otras alternativas, para esto se debe tener un conocimiento activo, crítico y evolutivo, no uno convencional que asuma las teorías como verdades absolutas. Por medio del constructivismo los alumnos construyen su propio saber a partir de métodos de apoyo organizados; no como una simple forma de impartir conocimientos, sino aprendiendo a construir sus propias estructuras cognitivas.

En su dimensión pedagógica el constructivismo concibe el aprendizaje como resultado de un proceso de construcción personal-colectiva de los nuevos conocimientos, actitudes y vida, a partir de los existentes y en cooperación con los compañeros y el facilitador. Es importante mostrar estrategias de solución, a la vez que el estudiante construye sus conocimientos mediante la solución de problemas. Para Rosas y Balmaceda (2008):

> El niño solo puede imitar lo que se halla en la zona de sus posibilidades intelectuales propias. Por ejemplo, si no sé jugar ajedrez, aunque el mejor ajedrecista me muestre cómo hay que ganar una partida no seré capaz de conseguirlo. Si sé aritmética pero tropiezo con dificultades para resolver un problema complicado, el hecho de mostrarme la solución del mi4smo me conducirá de inmediato a mi propia resolución, pero si no conozco las matemáticas superiores, el mostrarme la solución de una ecuación diferencial no hará que mi pensamiento avance un solo paso en este sentido (p. 46).

Para Iafrancesco (2017) la mayoría de los estudiantes escuchan pero no entienden, debido a que solo se enseña lo que se sabe, es decir, enseñando los resultados, desconociendo los procesos que tienen para aprender. Los docentes deben tener un dominio disciplinar de los contenidos de su área, poseer habilidades curriculares y didácticas para hacerse entender, tener métodos, técnicas, procesos, procedimientos, estrategias. A su vez, demostrar, comprobar, verificar lo que dice y saber trabajar por procesos construyendo proyectos, resolviendo problemas, preparar a los individuos para que, por sí mismos, con voluntad, carácter, entendimiento, conocimiento y comprensión, puedan resolver las diversas dificultades presentadas en sus contextos laborales, personales y sociales.

Iafrancesco (2012) hace referencia a los aportes de Piaget y desde su perspectiva da unas propuestas didácticas constructivistas: los niños y las niñas comienzan la adquisición de datos por medio de sus sentidos, son activos con lo que perciben y son capaces de interpretar y complementar partiendo de sus esquemas construidos con anterioridad. Se alcanzará un aprendizaje cuando la memoria es ejercitada, dado que esta configura mientras el pensamiento interpreta, explica y aplica. Esto se debe realizar de manera activa mediante sistemas de operaciones lógicas, físicas, espacio–temporales y numéricas.

Por esta razón, es de suma importancia orientar a los niños desde sus comienzos hacia la adquisición y la asimilación de los nuevos conocimientos. Iafrancesco (2012) sugiere que la educación infantil: "[…] establezca una secuencia permitiendo que los niños y las niñas alcancen progresivamente hasta la adquisición de la información. De lo simple a lo complejo, de forma secuencial, progresiva y acumulativa" (p. 135).

Viendo al sujeto que construye el conocimiento desde una mirada Vigoskiana, este lo hace por medio de abstracción semiótica. Lo primero que el niño edifica es el proceso de mediación, dado que siempre se encuentra en un estado de comprensión debido a la semiotización en sus conductas sociales. En un principio, el sujeto construye las especificaciones debido a su alteridad, al ser internalizadas estas, comienza su construcción interior (Rosas y Balmaceda, 2008).

El constructivismo como modelo pedagógico tiene que ser orientado y dirigido de manera responsable y permanente, dado que se puede convertir en un fracaso en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje en caso de ausentarse. Por lo anterior, solo queda como una propuesta educativa sin llegar a los objetivos que el modelo busca alcanzar en los sujetos.

En los procesos de aprendizaje, en especial en la adquisición de nuevos conocimientos, el sujeto tiene o posee algunas bases que le permiten afrontar las alteraciones de su estado cognitivo, para Piaget existe un estado inicial de desequilibrio cuando el niño se enfrenta a un proceso de adaptación. Él parte imponiendo algún esquema con el objetivo de restablecer el equilibrio, el cual se alcanzará cuando el esquema resulte apropiado, de lo contrario se continuará en estado de desequilibrio; pero el sujeto seguirá en la búsqueda mediante alternativas que le posibiliten llegar a un equilibrio. Cuando se enfrenta a una nueva situación de aprendizaje surge un esquema que permitió el equilibrio a pesar de la resistencia del contexto, así como otro que abarca a ambos como táctica para efectuar la resolución de situaciones parecidas (Rosas y Balmaceda, 2008).

Como se ha mencionado, los programas técnicos y tecnológicos de la universidad en sus procesos de enseñanza y aprendizaje, están basados en un modelo constructivista donde se ve a sus docentes como entes integrales, activos y comprometidos con la formación de estudiantes. Sobre el perfil que debe tener un educador desde los inicios de la formación en infantes, Piaget (citado en Rosas y Balmaceda, 2008) dice que:

> […] la tarea básica del educador consistirá en idear, construir y ofrecer al niño tareas de aprendizaje que estén de acuerdo con la etapa de desarrollo en la cual se encuentra. Se trata de plantear contenidos y actividades que puedan ser manejadas por la estructura cognitiva del alumno y que, al mismo tiempo, le permitan avanzar y afianzar los distintos niveles de complejidad y abstracción que se dan al interior de cada estadio del desarrollo (p. 98).

De lo anterior se puede argumentar que no solo basta con tener dominio como educadores de los conocimientos disciplinares e impartirlos en forma de discurso, dado que este hecho estará generando en los educandos el uso eminente de la memoria; por ello, es necesario apartarnos un poco de la educación tradicional, hacerlo de manera activa, tener objetivos claros. En su discurso, Iafrancesco (2017) dice que para lograr los objetivos que se buscan alcanzar en las aulas debemos tener en cuenta la didáctica y la pedagogía de las profesiones. Además, que para conseguir estas metas es necesario organizar el contexto de la clase, lo cual no es una tarea sencilla, debe ser un contexto que sirva de agente motivador partiendo de la idea que un estudiante de pregrado pueda tener con sus objetivos definidos. Sin embargo, no son raros los casos especiales de aquellos que aún no han definido sus metas, pero resulta una tarea más sencilla organizar el contexto que en otros ciclos de la formación. Otros elementos para alcanzar dichas metas son: crear situaciones que estimulen para generar expectativa, interés, motivación y pasión al aprendizaje; hacer uso de diversas representaciones y ejemplos; usar ayudas tecnológicas; producir retroalimentación para enseñar lo que sabemos de acuerdo con la pertinencia de quien aprende.

Sería absurdo afirmar que existe un material preelaborado que cumple a cabalidad los fines que se buscan alcanzar en los ciclos de formación académica. Acerca de esto, Piaget propone la existencia de un desarrollo cognitivo universal e infinito del desarrollo, por lo tanto es imposible negar su existencia. Es tarea de los investigadores avanzar partiendo de contextos, crear nuevas didácticas de manera creativa que faciliten las adaptaciones a nuevos conocimientos de una forma más eficaz y efectiva en los alumnos, además de producir desequilibrios en el sistema cognitivo (Rosas y Balmaceda, 2008).

En cierta fase del desarrollo personal, en la etapa de madurez, somos responsables de nuestras conductas, crecimiento personal, profesional e intelectual, de aceptar o no las cosas. Sobre esto Von Glasersfeld (1981) argumenta que:

> No se necesita penetrar muy profundamente en el pensamiento constructivista para comprender con claridad que esa posición conduce inevitablemente a hacer del hombre pensante el único responsable de su pensamiento, de su conocimiento y hasta de su conducta (p. 20).
>
> El constructivismo es, pues, radical porque rompe con las convenciones y desarrolla una teoría del conocimiento en la cual este ya no se refiere a una realidad ontológica, "objetiva", sino que se refiere exclusivamente al ordenamiento y organización de un mundo constituido de nuestras experiencias (p. 25).

Con el constructivismo se busca apartarnos de esa realidad objetiva y formarnos en un mundo constituido por nuestras experiencias. Dentro de la misión de la universidad se encuentra hacer de sus estudiantes profesionales idóneos, competitivos, responsables, comprometidos y capaces de contribuir con el desarrollo de la región, dando respuestas satisfactorias a las situaciones problemas que el sector industrial demande, sin ser excluyentes en lo social, individual y medio ambiente. Todo esto orientado en una pedagogía con enfoque constructivista (aprendiendo a aprender) y una formación por competencias, dentro de sus prácticas pedagógicas se busca que se afiancen sus conocimientos de manera comparativa, de lo teórico con lo práctico, generando expectativa e interés en sus estudiantes y, de esta forma, alcanzar un crecimiento intelectual en un contexto de investigación continua. Las competencias que el programa "Técnico Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales" busca alcanzar en los 3 años de formación de sus estudiantes son:

- Instalar, operar y mantener sistemas de control para procesos.
- Instalar, operar y mantener sistemas de medición para procesos.
- Instalar, operar y mantener sistemas de comunicación para procesos.

Estas competencias se van alcanzando en la medida que los estudiantes vean los respectivos módulos del programa, dado que la orientación se da a partir de dichos módulos (no asignaturas), los cuales no son contenidos disciplinares propiamente dichos si no se basan en componentes básicos del conocimiento, dentro de los cuales podemos encontrar los conceptos matemáticos, los conocimientos, las destrezas técnicas, las competencias actitudinales y comportamentales.

El presente libro apoya su justificación en la selección de las unidades de competencias y realizaciones que se derivan del mapa funcional del sector cerámico, las cuales fueron analizadas por los equipos de diseño curricular, validadas por el sector productivo y complementadas con la consulta de los referentes de formación en programas equivalentes en el ámbito internacional (principalmente en España e Italia). Esta consulta permite garantizar la pertinencia del módulo, no solo en cuanto al estado del arte en el momento actual, sino respecto a las tendencias y la probable evolución futura del sector y los procesos específicos.

Los microcurrículos describen el desarrollo de procesos, fases o etapas que aseguran el desarrollo de la competencia laboral mediante los mapas de saberes que involucran los elementos del saber, el saber hacer y el ser. No obstante, para el mejor cumplimiento de los aprendizajes en el último campo es necesario disponer, a lo largo del desarrollo didáctico del módulo, de espacios para asegurar la reflexión sistemática que involucren los aspectos de orden social y humanístico, como la discusión de los efectos socioeconómicos y socioculturales de las tecnologías y los procesos productivos, los efectos ambientales, la consideración de los marcos axiológicos y éticos. Estos momentos deben planificarse como fases inherentes al desarrollo de la competencia laboral, a su vez, tienen que contar con una selección de temas, estrategias didácticas y utilización de recursos en el mismo nivel que se espera para la apropiación de los conocimientos técnicos, las destrezas técnicas y los saberes de las ciencias básicas y las matemáticas.

El desarrollo se fundamenta en los enfoques constructivistas en los cuales el protagonista, centro del proceso formativo, es el propio estudiante. La labor del profesor cambia de forma significativa hacia la planeación de ambientes de aprendizaje, la selección y la elaboración de estrategias didácticas consecuentes con las concepciones de aprendizaje; así como el acompañamiento y la orientación del estudiante en las actividades previstas en el aula, el taller o el centro de trabajo. Hasta el grado 9 de bachillerato, los estudiantes vienen con otros modelos pedagógicos, cuando comienzan el grado 10 inician su preparación en la técnica, por ello es necesario cambiar algunas ideas previas de los alumnos y sus tendencias metodológicas usuales. Las estrategias se centran en los esfuerzos en la conceptualización y la familiarización con la metodología científica, a su vez, se procura evitar el empirismo y la operatividad de los procesos, característicos de la imagen usual de las ciencias (enseñanza tradicional), para producir un cambio conceptual y metodológico.

Las competencias no solo se verifican en el reconocimiento y la interpretación de los fenómenos, sino en la descripción, la argumentación y la explicación de los mismos, hasta alcanzar los niveles más elevados de crítica, proposición, conjetura e innovación. Todo ello requiere procesos comunicativos y apropiación efectiva del lenguaje en todas sus formas: oral, escrita, simbólica; así como en sus dimensiones gramatical, sociolingüística, discursiva y estratégica.

El programa técnico tiene fundamentos en las ciencias naturales y las matemáticas, esto demanda que los estudiantes desarrollen ciertas estrategias y técnicas que les permitan resolver problemas. Para alcanzar estos objetivos se requiere la elaboración de materiales didácticos tanto para las clases teóricas como prácticas, con el fin de alcanzar un aprendizaje significativo en ambientes flexibles enmarcados por el respeto y el dialogo.

Vale destacar que, como docentes, debemos potenciar en los estudiantes sus talentos y hacer de ellos unos agentes competentes, que sean lo que han querido, sintiéndose realizados como personas, a nivel intelectual, profesional, con principios y valores. Es necesario cambiar nuestra forma de enseñar para que ellos cambien su forma de aprendizaje y enseñanza, es decir, pasar a una enseñanza-aprendizaje y un aprendizaje significativo.

Por tal razón, en este trabajo se ha querido realizar un material didáctico teórico-práctico, donde los estudiantes comprendan, conceptualicen y pongan en práctica los conocimientos adquiridos enfocados en un objeto matemático. Para nuestro caso será la función lineal y afín de manera aplicada, basada en conceptos técnicos como los termopares y su importancia en sectores industriales. En especial, en aquellos que se encuentran en los procesos de control de temperatura, siendo esta una variable importante en los sectores productivos, cumpliendo una de las misiones de la universidad: formar profesionales idóneos y competitivos que aporten sus conocimientos al desarrollo del sector industrial.

2.2.2. La pertinencia de la transposición didáctica en las matemáticas

Nos encontramos con su máximo exponente, el matemático e investigador Yves Chevallard, quien se desempeña como profesor en Francia en la Universidad de Aix-Marseille, como uno de sus más grandes aportes tenemos el concepto de "transposición didáctica". Chevallard (1991) argumenta: "[…] un saber designado como sabio y que ha sido escogido como saber a enseñar, debe pasar por una serie de transformaciones para que haga parte de los objetos de enseñanza, a este trabajo de transformación se le llama transposición didáctica" (p. 85).

De Faria (2006) llama estas transformaciones "metamorfosis", las cuales consisten en adaptaciones que sufre el saber (sabio) para convertirse en una adaptación didáctica del mismo (saber a enseñar), encontrándonos en este punto con una versión necesariamente distinta del saber inicial, el cual fue acoplado y podrá ocupar un espacio en lo que se pretende enseñar o llegar a ser incluido en la sociedad.

Cuando este saber inicial quiere llegar al aula es necesario que el docente no solo se preocupe por impartir una cátedra, sino de hacerlo de forma tal que pueda ser entendida. Él debe colocar sus mejores jugadas en la mesa de juego sin abstenerse de estrategias que mejoren los procesos de aprendizaje. Por otro lado, se ha hablado acerca de los procesos de transformación necesarios para llegar a un saber enseñable, al respecto De Faria (2006) argumenta que el saber cumple diferentes funciones:

- El saber sabio, o especializado, tiene su lenguaje e historia, se refiere al generado por los matemáticos, es desarrollado en los centros de investigación mediante investigaciones, además, debe ser adaptado para que otros puedan leerlo.
- El saber científico debe ser transformado (saber a enseñar) para que no sea un obstáculo en los procesos de aprendizaje, este saber se encuentra en textos técnicos; mientras que el saber a enseñar está en libros didácticos casi siempre o en otros materiales, los cuales tienen la finalidad de servir para el trabajo del docente.
- El saber enseñar, por la mediación de las instituciones y las personas pasa a ser un saber enseñado que el docente lleva a su aula. Este saber se encuentra ubicado en los sistemas didácticos (trabajo del docente) también tratados en el trabajo de Gómez (2005).

A estos sistemas Chevallard los define como "sistemas de enseñanza", estos corresponden a la relación ternaria profesor-estudiante-saber, la cual se encuentra ubicada en el currículo. Para que el saber enseñado pueda llegar a las aulas es necesario que este pase por la aprobación de la comunidad científica, las diferentes autoridades educativas, profesores, padres de familia y demás autoridades gubernamentales, los sectores productivos y la misma sociedad. Este grupo de fuentes de influencia es encargado de la selección de los contenidos que harán parte de los programas en los procesos educativos. Además de los objetivos y los métodos que hacen parte del funcionamiento de estos procesos, a los cuales Chevallard denomina "noosfera", sobre esto hacen referencia en sus trabajos De Faria (2006), Zúñiga (2014), entre otros.

El entorno social puede ser un ente fuerte de influencia, dado que puede incidir en la introducción de temas que estén siendo usados en un contexto social, sobre esto De Faria (2006) nos da el siguiente ejemplo: "[…] si evoluciona la producción y la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación, entonces algunos sectores de la sociedad consideran que se debe aprender tecnología" (p. 6).

Como se ha reiterado en diversas ocasiones en este documento, los estudiantes de la técnica profesional en instrumentación tienen que adquirir ciertas destrezas y habilidades en comprensión, manejo, interpretación y dominio de varios conceptos propios del sector industrial, además de diferentes dispositivos y tecnologías. Con esto, se busca desempeñarse de manera eficiente en este sector, dado que él lo demanda, este motivo es el eje central del trabajo de investigación donde se espera que los estudiantes se apropien del objeto matemático de la función lineal y afín, en un contexto real que hace parte de un entorno industrial que incorpora el uso de dispositivos tecnológicos bajo una didáctica clara, progresiva y bien estructurada.

La noosfera en los sistemas didácticos resulta ser pertinente debido a que evita el envejecimiento o el desgaste del saber enseñado (Gómez, 2005), muchas veces en los contratos didácticos (docentes y alumnos) se encuentran saberes que no se sabe por qué son enseñados, en consecuencia deben ser reemplazados. Allí entra la noosfera en juego, puesto que se encarga de designar los saberes que deben hacer parte de estos sistemas. Por ejemplo, cuando llegan nuevos equipos a los sectores industriales, se hace necesario que operarios, administrativos, ingenieros y demás, adquieran destrezas con estas nuevas tecnologías, por tal motivo deben ser incluidas en los procesos de formación académica. Se espera que con estas nuevas introducciones se reduzca la brecha que existe entre el saber sabio y el saber enseñado; la transposición para cumplir con su objetivo tiene que poseer ciertas características que, para Gómez (2005), son:

- Desincretización del saber: según De Faria (2006) el lenguaje original con el que fue creado este saber no es apto para ser enseñado, por lo tanto su autor debe modificarlo para que pueda ser publicable y adecuado. Lo anterior, consiste en una delimitación de "saberes parciales", los cuales son expresados de forma independiente. A esto Chevallard lo llama "descontextualización del saber", lo cual es separado de sus orígenes históricos y apartado de la red de problemáticas (eliminación de sus procedimientos fallidos) para terminar siendo un objeto enseñado.
- Despersonalización del saber: para realizar la publicidad de un saber en el interior de un sistema didáctico, este tiene que ser despersonalizado, ya que originalmente se encuentra encarnado con el autor. De esto podemos encontrar infinidad de ejemplos que, en principio, fueron conocimientos personales o hipótesis de sus investigadores y que luego se convirtieron en objetos científicos con la transposición del mismo; según Chevallard sus protagonistas son expulsados de sus producciones.
- Programabilidad de la adquisición del saber: la textualización de un saber presume la programación de reglas que permitan avanzar en el conocimiento, como un buen texto este tendrá un inicio, un intermedio y un gran final.
- Publicidad y control social de los aprendizajes: en este punto el saber se da a conocer y pasa a ser público, permitiendo el control social con cierto grado de conocimiento de lo que es el saber.

Además de los saberes mencionados, en los cuales no ha intervenido el maestro, nos encontramos con el "saber escolar o institucionalizado". Como lo menciona Zúñiga (2014) en esta etapa el docente se encarga de administrar estos conocimientos en tiempo, espacios, contenidos, etc., además de hacerlo un saber enseñado a sus alumnos, a su vez, son ellos los encargados de convertirlo suyo, este sería el "saber del alumno". En este momento se puede dar por terminada la transposición en la enseñanza.

Para Chevallard (1991), al ser textualizado el saber toma forma en un documento publicable que puede facilitar el control social de los aprendizajes, el saber deja de ser privado y pasa a ser público y accesible (es transformado en programas), donde existe un contacto entre el profesor, el alumno y el saber. Por otro lado, en el trabajo del docente como encargado de seleccionar los saberes publicados, este debe ser precavido al escoger los contenidos (preparación de clases) y no perder el objetivo de la enseñanza que será el saber enseñado o el que el alumno asumirá como suyo.

2.2.3. Desmotivación hacia las matemáticas

Son muchas las causas que generan una desmotivación en los estudiantes, no solo en las matemáticas, por ello es función de los profesores analizar estas situaciones. Para Valentini (citado en Gómez, 2014) es de vital importancia que los docentes reflexionen sobre qué les sirve, además de qué ya no sirve, pero sigue realizando por comodidad provocando apatía en los educandos. En pocas palabras, los profesores deben centrarse en la actualidad, el contexto y apartarse un poco de lo tradicional. Otro factor que suele influir es la poca valoración que se da al estudiante como persona, entre más valorado se sienta más avanzará en su aprendizaje.

Logrando tener una buena relación con el estudiante, basada en el respeto, la rectitud y los valores, de seguro generará en el alumno una confianza mayor en sí mismo, la cual le ayudará a afrontar mejor los diversos problemas. Además, existen otros factores causantes de los fracasos escolares que se relacionan con proyectos pedagógicos mal elaborados, entre otros problemas institucionales. Cabe destacar que tal como lo señala Gómez (2014):

> De esta manera, aprendizajes poco significativos; vacíos; aburrimiento; bajo rendimiento; desactualización curricular; gestión didáctica burocratizada y rutinaria, son formas en las cuales se expresa el fracaso escolar, entendido este como divergencias del desempeño escolar respecto a jerarquías de excelencia que actúan como normas y que pueden expresarse en desigualdades reales de capital cultural (p. 15).

Para hacer uso de una propuesta didáctica que mejore los niveles de aprendizaje y la comprensión del objeto matemático (función lineal y afín), que además sirvan como agentes motivadores en los estudiantes, el fundamento primordial debe generar expectativa e interés por parte de los docentes. Ellos verán en los alumnos a personas activas, únicas, con diferentes proyecciones y metas, las cuales no aprenderán del mismo modo, a la misma velocidad o en los mismos contextos; aunque se usen los mismos materiales (Gómez, 2014). Además de sus diversos programas, la unicef[6] trabaja para superar el fracaso escolar existente en diversas circunstancias

6 unicef: Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia.

que dificultan un aprendizaje. No obstante, esto no debe ser un motivo de exilio, ya que puede ser un agente desmotivador y de resistencia, se tienen que proponer condiciones para que el alumno descubra sus posibilidades, hacerlo participe al crear sus conocimientos, destrezas, a la vez que él mismo reconoce sus debilidades y aprende de ellas.

La apatía y el aburrimiento son temas para tener en cuenta, Valentini (citado en Gómez, 2014) indica que son como una situación de contagio, un virus que se contagia de un alumno a otro, de los alumnos a sus profesores y viceversa, incluso a la misma institución y entes que hacen parte de ella.

2.2.3. La función lineal y afín: contextos reales

Para la comprensión de algún concepto resulta pertinente empezar por sus orígenes, en consecuencia se analizarán los inicios del concepto de "función". Según Youschkevitch (1976), inicialmente data de los babilónicos, cerca de 2000 años a.C, ellos incluyeron fracciones, problemas algebraicos, relaciones entre números, sus cuadrados, sus cubos, sus raíces cuadradas, etc., esto fue hallado en una serie de tablillas.

Zúñiga (2009), quien será la base para analizar el surgimiento del concepto de función, hace referencia a Bell en 1945 con el siguiente enunciado "[…] puede ser demasiado generoso dar crédito a los antiguos babilonios de tener el instinto de función, ya que una función ha sido definida sucesivamente como una tabla o como una correspondencia" (p. 28); este concepto los babilónicos no lo tenían claro.

Avanzando en el análisis histórico está Ptolomeo (griego), quien computó cuerdas de un círculo (computó funciones trigonométricas), al analizar esta situación él trataba con el concepto de función, pero era poco probable que lo comprendiera. Sobre esto, Peterson escribió: "[…] si concebimos una función no como una fórmula sino como una relación más general que asocia elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto, es obvio que las funciones en ese sentido abundan en el almagesto" (p. 28).

En 1638 nos encontramos con Galileo y su problema de los dos círculos concéntricos, uno más pequeño que el otro, de aquí realizó una función que mapeaba cada punto del círculo más grande sobre un punto del más pequeño. Por su parte, Descartes afirmó que: "[…] una curva puede dibujarse al permitir que una línea tome un número infinito de valores distintos" (p. 29). Prosiguiendo con Zúñiga (2009) en 1673 nos encontramos con Leibniz, quien escribió: "[…] otros tipos de líneas que, dada una figura, llevan a cabo alguna función", de igual forma para Bernolulli (1694) una función es: "[…] una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes" (p. 29).

Un concepto más claro es dado en 1748 por Euler: "[…] una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de numero o de cantidades" (p. 29). En 1755 el mismo Euler da un concepto más general y moderno de función: "[…] si algunas cantidades dependen de otras de tal modo que si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas" (p. 30).

Hasta el momento, Zúñiga (2009) ha realizado una retrospectiva del concepto de función, en ella estos conceptos tienen una falta de comprensión de la diferencia entre "función" y su representación, Hitt (2003) cita: "y es una función de una variable x, definida en el intervalo $a<x<b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo está correspondido un valor definido de la variable y" (p. 30).

Para culminar, respecto al concepto de Goursat en 1923 se puede encontrar en muchos libros: "[…] se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$" (p. 30). De este análisis histórico basado en el trabajo de Zúñiga (2009), se puede evidenciar cómo fue el surgimiento del concepto de función hasta encontrar solides y validez.

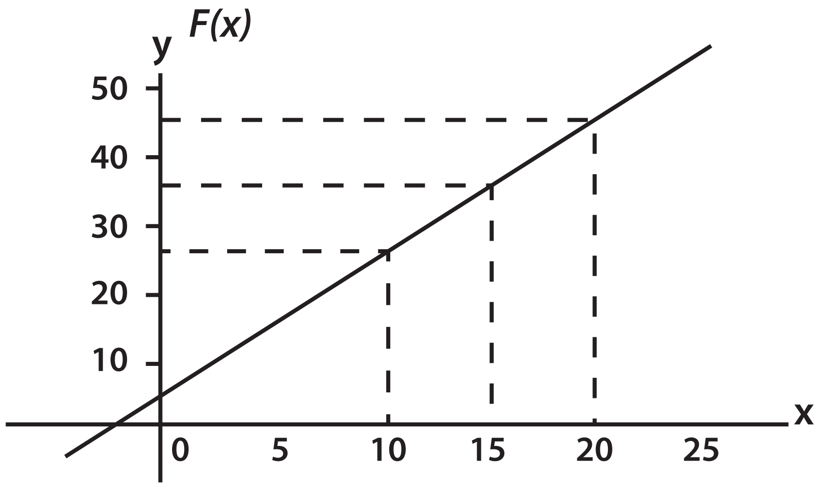
Después de realizar un repaso por la historia se analizarán algunas dificultades que se suelen presentar en los estudiantes cuando inician cálculo, además de cómo deben afrontar estos problemas con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos, en especial, la función lineal y afín. Hitt (2003) atribuye que una de las grandes dificultades en la comprensión, tanto en docentes como estudiantes, es que solo se enfocan en un análisis algebraico, descuidando con ello las diferentes formas y análisis de las diversas representaciones que el objeto demanda. Para evidenciar estas dificultades se tratará una situación dada por un docente, donde él plantea el siguiente problema y, además, realiza la solución del mismo como se muestra a continuación:

Encontrar la solución de: "La edad del padre de Juan es el doble de la edad de este dentro de cinco años"; solución dada por el docente:

El modelo algebraico: $y = 2x + 5$, donde y es la variable dependiente (edad del padre) y x la variable independiente. El docente le asigna una serie de edades a Juan, por ejemplo: cuando Juan no ha nacido, ¿cuál es la edad de su padre?

$y = f(x) = 2x + 5$, remplazando el valor de 0 años, tenemos: $f(0) = 2(0) + 5 = 5$ años, además también calcula la edad del padre cuando Juan tiene 10, 15 y 20 años, se realizó el cálculo respectivamente: $f(10) = 2(10) + 5 = 20 + 5 = 25$ años, $f(15) = 2(15) + 5 = 35$ años y $f(20) = 2(20) + 5 = 45$ años, los anteriores datos se llevaron a una representación gráfica en el plano cartesiano con las coordenadas $(x, f(x)) = \{(0, 5)\ (10, 25)\ (15, 35)\ (20, 45)\}$.

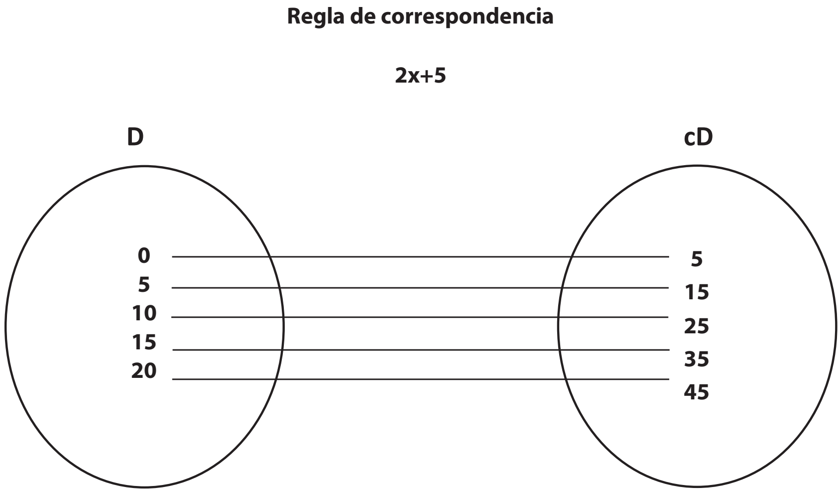
Figura 1. Representación gráfica del ejemplo del profesor



Fuente: Hitt (2003, p. 4).

Adicionalmente se realizó la representación en un diagrama sagital:

Figura 2. Representación sagital del ejemplo



Fuente: Hitt (2003, p. 4).

Del anterior diagrama se concluyó que corresponde a una gráfica de línea recta, a la cual se le llama función lineal. Además, que es una función inyectiva debido que para cada x corresponde al menos un f (x), para ∀ x ∃ f (x).

El docente afirma que los valores de D (Dominio) van de uno menor a uno mayor, de tal forma que decimos que la función es creciente. Sobre esta propuesta del docente, Hitt (2003) resalta los errores cometidos en la solución: el enunciado no es lo suficientemente claro, se puede interpretar como: y = 2 (x + 5). El profesor está planteando una ecuación, no una función (convierte la ecuación en función) ¿tendrá claro el docente la diferencia entre ecuación y función?

Además, toma valores enteros y la función planteada por él es continua, no tiene en cuenta edades diferentes a las enteras, esto puede generar un obstáculo en los estudiantes, ya que asimilaran que solo en ese tipo de funciones se pueden evaluar este tipo de datos (enteros). Para Hitt (2003), el concepto que el docente tiene de función es: "[…] al conceptualizar la función como una noción de función-continuidad como un solo ente matemático" (p. 6).

La intención del profesor es presentar un caso real que pretende modelar con la función lineal, pero en este caso la situación es irreal, debido a que no puede ser posible que cuando Juan tenga un año de edad, su padre tenga 6, por ello resulta incoherente. Del ejemplo presentado, al realizar la representación gráfica (plano cartesiano), se pasa de datos discretos a continuos (toma datos discretos de una función continua) sin ningún tipo de argumentación. Lo mismo sucede cuando se hace la representación sagital, puesto que regresa de datos continuos a discretos.

En la función presentada no se realiza un análisis de los datos negativos (edades negativas), existe una contradicción en el concepto de función: el profesor argumenta que para cada dato del domino existe uno y solo un dato del codominio.

Hitt también "[…] menciona que una función es creciente porque los valores de D (Dominio) van de uno menor a uno mayor. O sea que para él, la función creciente está determinada por los valores del dominio sin tomar en cuenta sus imágenes" (p. 4). No es una tarea sencilla tratar de llevar casos de la vida real que se puedan modelar de forma adecuada, esta situación debe manejarse con mucha precaución, ya que puede conllevar a una concepción limitada y equívoca por parte del alumno. Es necesario usar ejemplos que no tengan incoherencias y se ajusten tanto al contexto como al objeto matemático, puesto que pueden producir en el alumno un obstáculo epistemológico. Resulta interesante relacionar las matemáticas con casos reales que sirvan para introducir el concepto de función lineal. No obstante, esto se debe manejar con sutileza, que no suceda que por tratar de llevar al estudiante a profundizar se genere en ellos errores de comprensión y contradicción, los cuales ocasionen dificultades en la resolución de problemas.

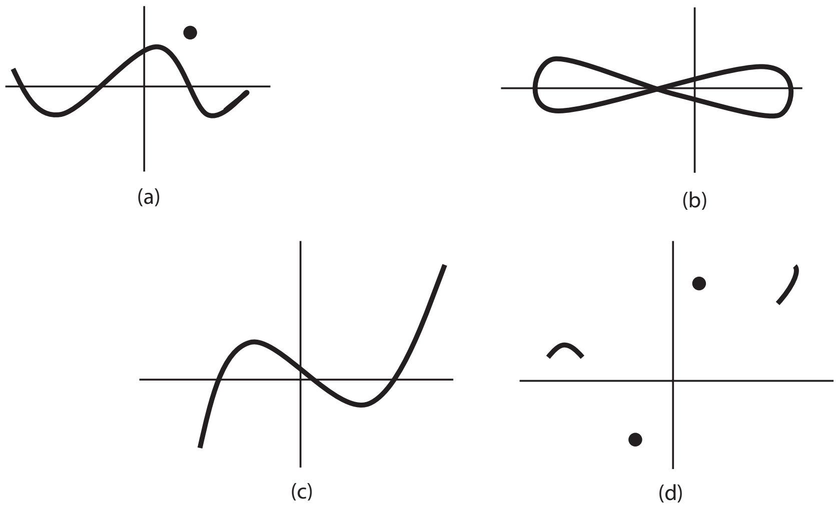
Lo siguiente se argumentó en anteriores apartados, pero resulta oportuno volverlo a mencionar: un alumno posee dominio de un concepto matemático cuando puede hacer uso de diversas representaciones con una correcta articulación entre ellos respecto al mismo concepto, a la vez que recurre a estos de forma intuitiva en la solución de problemas. Al respecto, Hitt (1998) señala que un estudiante que posee habilidades en la comprensión del concepto de "función" debe: tener la capacidad de clasificar qué es función y qué no lo es; el concepto debe ser apto de ser aprendido; memorizado; deductivo; poseer la capacidad de dar explicaciones de lo acontecido; contar con métodos para la solución de problemas; capacidad en el aprendizaje de nuevos sucesos relacionados, de frases, expresiones y figuras; articular entre las representaciones y la construcción de las mismas para su uso personal; entre otros.

Después de abordar algunos obstáculos e inconvenientes que se encuentran presentes en estudiantes y algunos docentes, se realizará una conceptualización de forma general de la función. Según Spivak (2014):

> Si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los a para los que existe algún b tal que (a,b) está en f. Si a pertenece al domino de f, se deduce a partir de la definición de función que existe, en efecto, un único número b tal que (a,b) pertenece a f. Este único b se designa por f (a) (p. 48).

Una función no debe contener en un conjunto de pares ordenados (coordenadas), más de un par con un mismo primer elemento, de ahí que una figura como el circulo o la elipse, por tomar un referente, no son consideradas funciones. De manera más sencilla, para comprender esta situación, es posible realizar un pequeño ejercicio que consiste en trazar una línea vertical que atraviese la figura. Esa línea no debe contener más de un par ordenado (x,y) con la misma x en común para la figura como para la recta (puntos de intersección).

Figura 3. Imágenes de funciones y no funciones



Fuente: Spivak (2014, p. 60).

De la anterior figura es posible apreciar que no se pueden considerar funciones las imágenes a y b, mientras que c y d sí lo son. Si surge alguna duda con esto puede realizar el ejercicio de pasar rectas paralelas al eje y, si se encuentran dos puntos cuya primera coordenada es la misma, esto conllevará a que no se asuma como función. Para el caso específico de la figura a, si se pasa una recta que pase por el punto marcado y por la imagen que tiene forma de función seno, la primera coordenada x del punto será la misma para la x de la función seno.

Resulta bastante familiar usar la letra f cuando nos queremos referir a una función como f (x), pero esto no es una condición que se deba de cumplir, se pueden usar otras según los gustos. De igual manera sucede cuando nos referimos a los números, según Spivak (2014) "[…] el símbolo f (x) tiene sentido solo si x pertenece al dominio de f, para cualquier otro x el símbolo f (x) no está definido" (p. 40).

Tomaremos algunos conceptos de Zúñiga (2009), el concepto de función siempre ha estado y estará presente en los alumnos de manera natural e intuitiva, de esto existen cantidad de ejemplos. Respecto a lo anterior, se quieren traer algunos de los conceptos que los estudiantes de la técnica en instrumentación a menudo tratan en su formación profesional: primero, los procesos de variación de la temperatura, que depende de la intensidad del calor al que se someta el dispositivo que se está usando para medirla; segundo, el control que se le debe realizar al dispositivo cuando depende de una variable, la cual al tomar algún dato específico hace que un controlador inicie su actividad.

Los estudiantes de la técnica comprenden estos procesos, pero muchos de ellos desconocen que se pueden modelizar haciendo uso del concepto de función, es posible apreciar que manejan el concepto de manera intuitiva. Ellos comprenden que para cada incremento o decremento de la variable física (calor, humedad, tensión, etc.) el dispositivo entregará un dato específico, solo uno, si la temperatura empieza a subir se entenderá que es una situación creciente y viceversa. Tomando un ejemplo de Zúñiga (2009), este nos encaminará en la comprensión de los conceptos de: variable dependiente, variable independiente, dominio, codominio, representación sagital, etc.

Dados los siguientes dos conjuntos: M= (-3,-2,-1,0,1,2,3) y Z= (-6,-4,-2,0,2,4,6), donde Z es la imagen de M, respectivamente, estos son ordenados en una tabla (representación tabular) de la siguiente manera:

Tabla 1. Tabla de datos

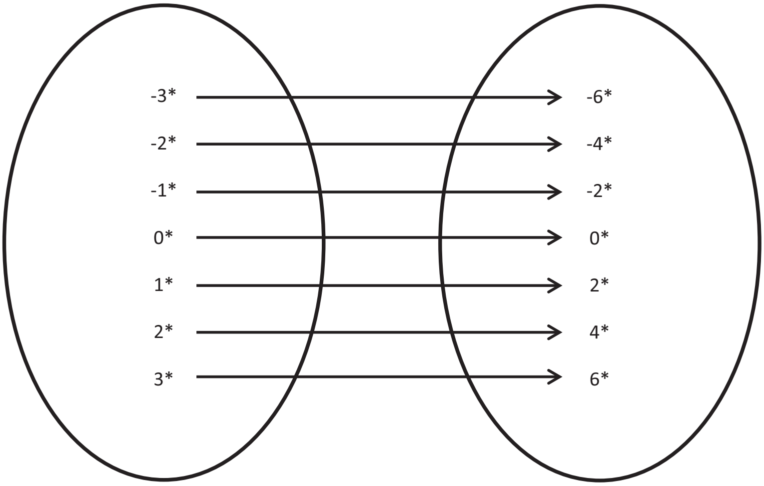
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
2x	-6	-4	-2	0	2	4	6

Fuente: Zúñiga (2009, p. 32).

Estos datos (coordenadas) se pueden ubicar dentro del plano cartesiano, unir sus puntos y formar la respectiva gráfica (representación gráfica). Del análisis de la anterior tabla se llega a una función de la forma f(x)=2x (representación simbólica).

Al dominio se le asigna la letra D y es el conjunto donde se define la función f (datos de la columna de las x), la x es la variable independiente y pertenece al dominio, la cual cambia de un valor a otro sin depender (asume valores), a la y asociada con f es llamada variable dependiente (depende de x), que corresponde a la columna de 2x para este caso (codominio), que también cambia pero sus cambios dependen de la otra variable. De la siguiente representación sagital se puede apreciar que para cada valor de x existe solo un valor de y o f(x).

Figura 4. Representación sagital f(x)=2x



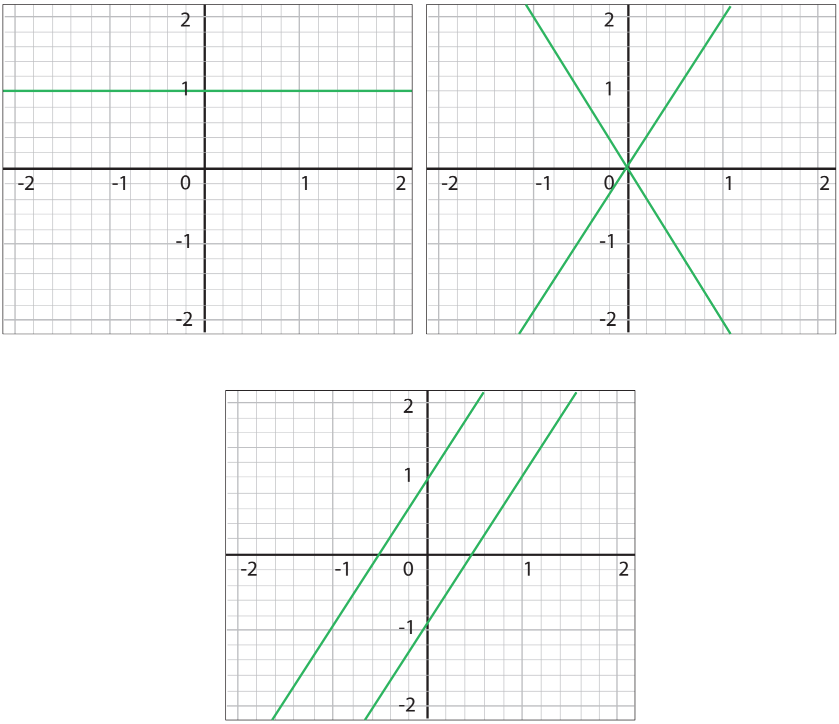
Fuente: Zúñiga (2009, p. 32).

Hasta este punto de conceptualización se han mostrado diversas formas de representaciones semióticas, como lo son: representación tabular, simbólica, sagital; conceptos de dominio, codominio, variable dependiente e independiente, su relación con el dominio y el codominio, respectivamente. Otro factor que resulta muy oportuno tratar es la variación de la variable dependiente, que puede ser: creciente, si al aumentar la variable independiente hace que aumenten sus valores; o decreciente, si el decrecimiento de los valores de la variable independiente hace que sus valores disminuyan.

La construcción de los conceptos de función lineal comienza desde el momento que el estudiante empieza a formar estructuras multiplicativas partiendo de razonamientos proporcionales. Para Posada y Villa (2006) el razonamiento proporcional es clave en el desarrollo de un pensamiento variacional. La función lineal a menudo es asociada a polinomios de primer grado, de la forma g(x) = ax+b, con a y b pertenecientes a los números de los reales.

La función de la forma g(x) = ax, es considerada función lineal y pasa por el punto (0,0), cuando se le suma la b (punto de corte con el eje y), g(x) = ax+b se considera función afín que no pasará por el origen. Otra situación a tener en cuenta es cuando la x toma un valor de 0, la función pasa a ser una constante y paralela al eje x, la función constante junto con su gráfica representativa son muy sencillas (Figura 5).

Figura 5. Función constante, lineal y afín

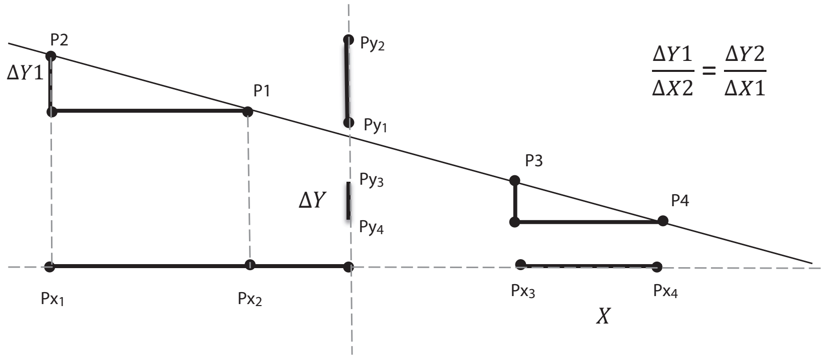


Fuente: elaboración propia. en GeoGebra.

De lo anterior, afirman que cuando la función no está acompañada de la b es una transformación lineal. La línea recta se usa para representar de forma gráfica las funciones lineales, un cambio en la variable independiente será proporcional a la dependiente, lo que quiere decir que el cociente entre estas variables es una constante (pendiente).

Esta constante se visualiza en ese registro (línea recta), según los investigadores Posada y Villa (2006), se puede considerar una línea cuando: “a) existe congruencia entre los ángulos formados por la representación del registro dado y cualquier recta paralela al eje x; b) por la semejanza presentada entre todos los triángulos rectángulos determinados por los segmentos diferencia correspondientes obtenidos” (p. 139). Este concepto se ilustra en la siguiente imagen (Figura 6).

Figura 6. Identificación de la función lineal a partir de una representación gráfica



Fuente: Posada y Villa (2006, p. 139).

De esta forma se puede determinar si una función es lineal partiendo de una representación gráfica. La identificación de estas funciones a partir de una tabla es posible tomando parejas de valores y calculando su diferencia, si dicha diferencia es una constante es posible asumirse como una función lineal.

Además de las representaciones gráficas y tabulares, es importante realizar el análisis a partir de la representación simbólica, para esto es necesario interpretar la razón de cambio de una variable y los cambios que genera sobre la otra. Muchos libros toman dichos cambios como Δx, que es la diferencia que existe entre dos datos de una misma variable, Δx=x2–x1 (para todo x1, x2 pertenecen a los R), donde esta razón debe ser una constante para todos los Δx y Δf(x)= f(x2)–f(x1), el cociente entre ellas es la razón de cambio o la llamada pendiente, que simbolizan con la letra m:

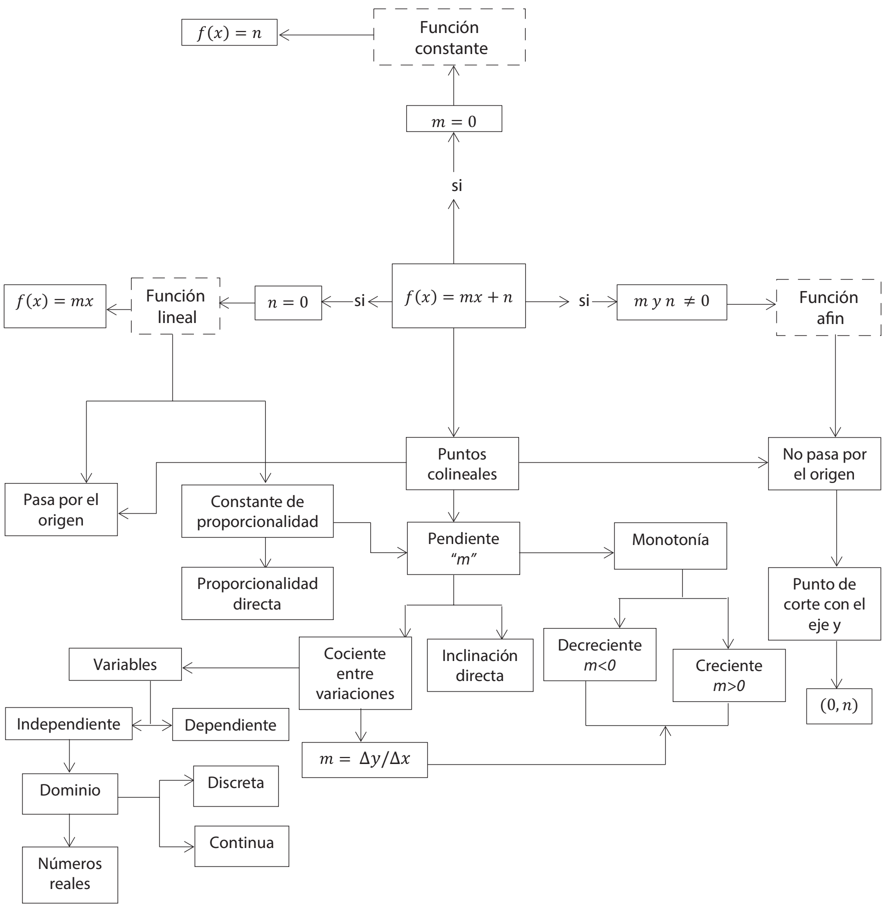
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x2)\text{-}f(x1)}{(x2)\text{-}(x1)} = m$$

No es tarea sencilla reconocer una situación que se encuentra en el lenguaje natural, a la vez que se pretende llevar a un modelo matemático, por ende es necesario caracterizar dicha situación. Al respecto, Posada y Villa (2006) argumentan que es importante determinar si la razón de cambio en el enunciado se encuentra de forma directa o indirecta y si en los dos casos esta razón es constante. Se puede asociar a una función lineal, además de analizar si las magnitudes que intervienen son discretas o continuas, y si en las continuas se encuentra presente el tiempo.

Al incluir solo con magnitudes discretas, según Posada y Villa (2006): "[…] se corre el riesgo de omitir la interpretación de la constante como una razón de cambio y limitarse solo a un análisis adimensional, que aunque facilita el tratamiento aritmético de la situación, oculta su naturaleza variacional" (p. 141).

La Figura 7 representa una estructura conceptual de la función constante, lineal y afín, dada por Barajas *et al*., quienes parten de la notación funcional f(x)= mx+n (m es la pendiente y n el intercepto con el eje y). Se presentan las siguientes tres situaciones: función constante cuando m=0, función lineal (con intercepto con el punto (0,0)), función afín cuando n=0 y si m y n ≠ (no pasa por el origen). La pendiente representa la cantidad en que aumenta (m positivo) o disminuye (m negativo) x, cuando la y aumenta una unidad. El signo de la pendiente determina la monotonía de la función al definir si es creciente, decreciente o constante.

Figura 7. Estructura conceptual de la función constante, lineal y afín

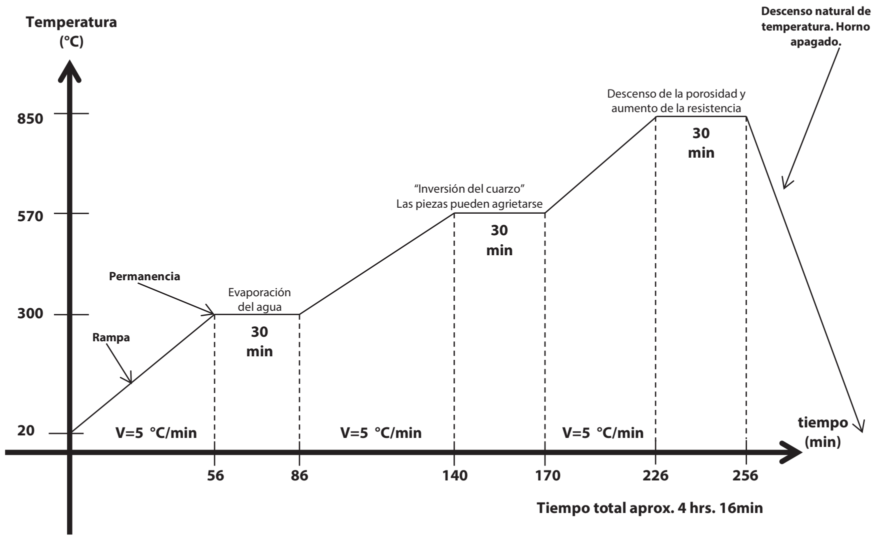


Fuente: Barajas *et al*. (2016, p. 6).

En el caso concreto del manejo de la temperatura, cuando es medida en ambientes donde la temperatura es mayor o igual a cero grados centígrados y su incremento es una razón de cambio constante, esta situación se puede llevar a un modelo matemático de una función lineal de la forma f(x)= mx. Referente al termopar

K, como se puede observar en la Figura 8, estas graficas pasan por el punto de coordenadas (0,0), más adelante se abordará con detalle el tema del uso del termopar.

Figura 8. Ciclo térmico o curva de cocción de piezas cerámicas



Fuente: Hernández (2009, p. 5).

La anterior gráfica fue ajustada para una mejor interpretación, ya que en los procesos industriales la curva de temperatura para el control del proceso térmico se toma como rectas por su facilidad en el tratamiento de datos. Se puede apreciar que existen 3 rampas crecientes a una razón de cambio (pendiente), constante (v=5°C/min), la primera inicia en el punto (0,20) hasta (56,300), es afín; la segunda en (86,300) hasta (140,570); la tercera en (170, 570) hasta (226,850). Además se aprecian 3 rectas (función constante), donde la primera se encuentra a partir de los 56 a los 86 minutos a una temperatura de 300°C, allí se produce la evaporación del agua; la segunda, a partir de los 140 a 170 minutos a 570°C, se produce la inversión del cuarzo; en la tercera, en el punto de 226 a 256 minutos a 850°C, donde se produce el descenso de la porosidad. En el punto (256,850) está la última rampa que es decreciente, esta puede ser a una razón de cambio superior a la anterior, debido a que intervienen ciertos elementos de enfriamiento para acelerar este proceso.

2.2.4. La didáctica de las matemáticas y la enseñanza activa

Sin importar el grado de estudio, la edad de los educandos, los contextos y las demás situaciones que involucren los procesos educativos, la didáctica ha estado y estará presente de muchas maneras, siempre se nos hará familiar porque son bastantes las estrategias que se pueden usar (Mallart, 2001). A lo anterior, este investigador también anexa lo siguiente:

> […] ofrece modelos descriptivos, explicativos e interpretativos generales aplicables a la enseñanza de cualquier materia y en cualquiera de las etapas o los ámbitos educativos. Aunque debe partir de realidades concretas, su función no es la aplicación inmediata a la enseñanza de una asignatura o a una edad determinada (p. 12).

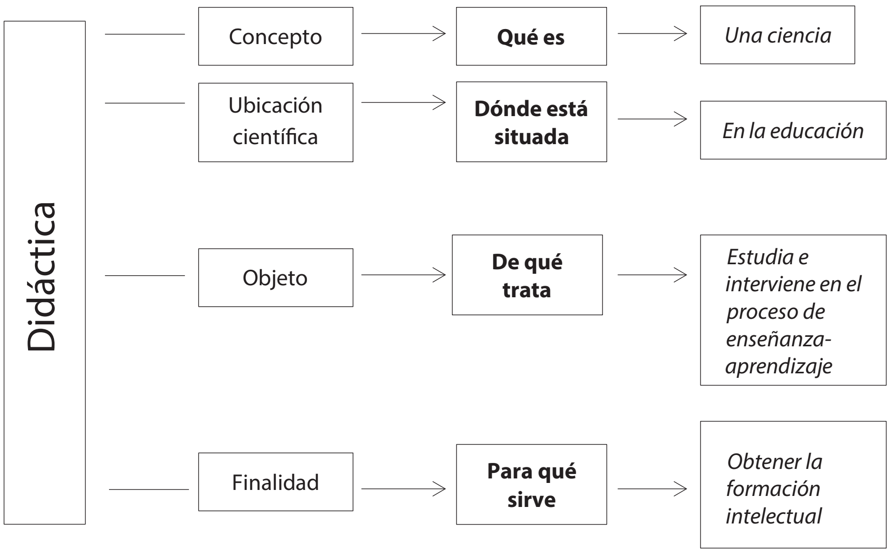
Partiendo de los objetivos que se buscan lograr se analizarán algunos documentos relacionados a la didáctica, con el fin de orientar, conceptualizar y definir métodos, técnicas y estrategias que nos permitan comprender lo necesario y cómo se deben realizar las actividades de clase con el propósito de alcanzar un aprendizaje significativo en los estudiantes, el cual les sirva para la resolución de problemas de contexto y fuera de ellos.

Como se mencionó antes, dentro de los propósitos de la enseñanza activa está tratar de mantener a los estudiantes activos, que ellos hagan parte de sus procesos instructivos, puedan tomar las riendas de sus aprendizajes, aprendan a indagar, cuestionar y proponer diferentes formas de resolución de problemas, puedan debatir en grupos y liderar de una manera coherente y oportuna dependiendo de la situación. Al respecto Carbajal (2013) dice:

> Dewey, Freinet, Montessori, Claparède, Freire y todos los representantes de la escuela activa, más tarde Pólya y Schoenfeld, sugieren enfrentar a los estudiantes a situaciones problemáticas que ocasionen un desequilibrio en sus estructuras mentales de tal forma que surja un interés hacia la resolución del problema y que a su vez la propia tarea de resolución lleve al estudiante a generar procesos de reflexión que finalmente lo lleven al aprendizaje de conceptos matemáticos (p. 21).

Para un primer acercamiento a la didáctica, tomaremos un mapa conceptual de Mallart (2001) seguido de unos conceptos dados por algunos autores, sus ideas, objetivos, consejos y estrategas:

Figura 9. Mapa conceptual de didáctica



Fuente: Mallart (2001, p. 2).

Carvajal (2009) afirma que la didáctica es: "[…] la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando" (p. 1). Por otro lado, Comenius (1986), en su libro "Didáctica magna" coloca al estudiante como el centro de la formación educativa, al igual que lo hace la enseñanza activa, el autor concibe la didáctica como la técnica de la enseñanza. El docente debe tener los instrumentos y los métodos para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje: es necesario dar cabida a que el mismo estudiante pueda analizar los conocimientos adquiridos.

Carvajal (2009) cita a los siguientes autores: Nerici (1970), Zabalza (1990), De la Torre (1993), Villalpando (1970), para ellos la didáctica es un conjunto de técnicas, una disciplina que hace parte de la pedagogía. En esta se investiga, se reflexiona, se ponen en práctica procesos estratégicos que buscan conducir a los estudiantes de manera sucesiva, progresiva, acumulativa, coherente, organizada, activa y agradable, por los caminos de la enseñanza y el aprendizaje, como uno de los criterios claves de formación y desarrollo personal de los alumnos. A manera de síntesis, tomamos el siguiente cuadro (Figura 10), el cual resume los conceptos diversos de la didáctica:

Tabla 2. Elementos presentes en la didáctica

Aspectos	Descriptores en la definición de Didáctica
Carácter	Disciplina subordinada a la Pedagogía Teoría, práctica Ciencia, arte,tecnología
Objeto	Proceso de enseñanza -aprendizaje Enseñanza Aprendizaje Instrucción Formación
Contenido	Normativa Comunicación Alumnado Profesorado Metodología
Finalidad	Formación intelectual Optimización del aprendizaje Integración de la cultura Desarrollo personal

Fuente: Mallart (2001, p. 5).

¿El estudiante como eje central de los procesos educativos? Al respecto, Carvajal (2009) dice:

> […] un transmisor de conocimientos en un entorno de aprendizaje activo, donde el estudiante es el principal actor del proceso, por tanto, el desempeño del docente debe ir más allá del cumplimiento de un programa o la formulación de una simple pregunta cómo ¿entendieron?, se deben crear las condiciones para realizar actividades de aprendizaje cercanas a nuestro mundo real, de esa forma el docente se exige en actualizar y fortalecer sus competencias pedagógicas, las cuales incluyen aplicar nuevas tecnologías en el aula (pp. 4-5).

Al pretender centrar al estudiante en los procesos educativos, el docente debe tomarlo con ciertas precauciones y evitar que ellos puedan crear algún tipo de obstáculos muy frecuentes, incluso en los mismos docentes. Brousseau (1983) es el primero en hacer alusión a los obstáculos epistemológicos, los cuales se encuentran presentes en las matemáticas, él lo define no como parte de la ignorancia, sino como un conocimiento mal adquirido. Por ello, es necesario tratar de superarlos y corregirlos, para esto se pretende realizar la conceptualización del objeto matemático mediante una didáctica bien definida y estructurada, que no limite al estudiante a repetir imágenes o algoritmos que el docente plasma en un tablero; dado que esto genera la creación de rutinas que les permite generar estrategias para resolver problemas sin una adecuada interiorización de los conceptos.

Podemos complementar lo anterior con Mora y Barrantes (2008), quienes mencionan un tipo de práctica en la enseñanza de las matemáticas, la cual llaman "algorítmica". En ella tienen fundamentos de tipo memorístico y algorítmico, además se preparan los estudiantes con definiciones y reglas para proceder en la solución y la aplicación de situaciones particulares. Siguiendo con la enseñanza tradicional, Sierra *et al.*, (2011) aportan:

> Es un hecho comprobable durante el trabajo diario en las aulas que los métodos tradicionales no son efectivos. Los alumnos se convierten en una única entidad pasiva y global ("Técnicas de aprendizaje colaborativo", 2007 [2]), receptores de una única transmisión de conocimientos sin opción a deducirlos por ellos mismos, en que se prima la ejecución de una serie de contenidos puramente matemáticos sin ninguna vinculación con la realidad (p. 2).

Enfocándonos en la educación activa, no debemos desconocer la importancia y la aplicabilidad de las tecnologías, no solo en nuestros entornos familiares, sociales, laborales; sino también en los educativos, debido a que han aceptado a la comunidad científica como mediador en los procesos de formación, Mallart (2001) recomienda:

> No hay que confundir esta dimensión tecnológica con el mero uso de artefactos o ingenios tecnológicos, sino que más bien hay que referirla a procesos orientados a mejorar la acción didáctica. Los procesos didácticos son tecnológicos en el sentido que están provistos de un soporte teórico científico, es decir: se basan en teorías o procesos comprobados, cuya validez consta (p. 9).

Tratar de incorporar estas tecnologías al aula es un trabajo arduo, donde el docente se debe de preocupar por diseñar estrategias y metodologías, también tiene que poseer habilidades y destrezas para utilizar los dispositivos como intermediarios en los aprendizajes. A su vez, es necesario: encontrar los espacios adecuados y los momentos oportunos cuando el estudiante debe hacer uso de las tecnologías o los útiles tradicionales; generar en los alumnos el interés, la concientización de la utilidad y los beneficios que ellas tienen, buscando que empiecen a razonar e interpretar sus resultados. Lo anterior, ya que no son simples maquinas sin raciocinio alguno que solo están facilitando el trabajo en tareas que pueden resultar tediosas y rutinarias, por ejemplo, el llenado de tablas, debido a que esto puede hacerse de manera rápida y precisa; por ello, es posible utilizar el tiempo que se invertirá en esta tarea en analizar e interpretar sus datos. En síntesis, de la forma como se interactúen con estos dispositivos dependerá cómo se aprende.

Parafraseando y analizando a De Guzmán (1992), donde se hace referencia a la importancia del uso de las tecnologías, en lo que el autor recomienda se puede evidenciar que dichas tecnologías siempre han sido necesarias y de gran importancia. En los años 90 era poco usual que las instituciones contaran con equipos de cómputo, menos los estudiantes, por tal motivo la destreza en el uso de esta herramienta era muy limitada, si contaban con una calculadora era un avance bastante significativo. Por esta razón se ha querido traer el tema a discusión, haciendo una comparación de esos tiempos con el presente, donde además de contar con un computador de mesa, un estudiante puede tener uno portátil y otros dispositivos electrónicos: tablets, smartphone, entre otros.

Es evidente que la tecnología llego para quedarse, su avance es exponencial, las matemáticas no pueden ser ajenas a esto. Es necesario dar un buen uso a ellas debido a la gran acogida, el interés y la motivación que causa, aunque no es raro observar hostilidad en algunos docentes, por lo que es un reto encontrar armonía total. Dichas tecnologías servirán como mediadoras entre lo que se enseña y lo aprendido, de una manera más activa y motivante.

Santos (2007) indica que el uso de la tecnología es una herramienta poderosa para sus usuarios, la cual no solo puede ser empleada para encontrar relaciones, sino con el fin de analizar, interpretar y comprender sus funcionamientos; así como las relaciones entre diversas formas de representaciones que nos pueden brindar. En las matemáticas los estudiantes tienen la oportunidad de mostrar sus estrategias al afrontar un problema, esto es de mucha utilidad para el docente a la hora de usar alguna herramienta tecnológica. Lo anterior, pues dispone de un medio que le permitirá realizar la presentación de los conceptos matemáticos de forma más amena y activa, generando en los alumnos la meditación y el análisis.

A pesar de todos los avances y los beneficios que nos ofrece, la tecnología no es la solución a los problemas de las matemáticas; sin embargo, va en crecimiento y está llegando a ser un catalizador de los procesos de cambio de la educación. Esto, debido a la facilidad de manejo activo de los objetos matemáticos en sus diversas formas de representación, de manera interactiva, además de la posibilidad de interacción, algo que con lo tradicional sería complicado. La interacción de estudiante, docente y tecnología, están cambiando la visión de los contenidos matemáticos y los procesos didácticos, este puede ser considerado como su más importante aporte (Gómez, 1997). La didáctica también cumple discernimientos científicos, ya que acepta la integración de objetos subjetivos para la explicación de fenómenos, con la comprensión de dichos fenómenos físicos de manera didáctica los estudiantes podrán generar ideas deductivas e inductivas (Mallart, 2001).

Dentro de las finalidades de la didáctica nos encontramos, primero, con la teórica, la cual busca la adquisición y el fortalecimiento de conocimientos, qué podrá explicar e interpretar; segundo, con la práctica, allí se buscan crear y mejorar las condiciones de aprendizaje, dar solución a problemas y adquirir la educación formativa. "Destacando entre las estrategias cognitivas la comprensión, memoria, clasificación, solución de problemas, flexibilidad, análisis, síntesis, toma de decisiones, pensamiento crítico, creatividad" (Mallart, 2001, p. 24).

En la didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003) se realizó un contraste entre los tipos de enseñanza activa y tradicional, se enfatizó en la importancia de hacer una enseñanza participativa, donde el estudiante pueda ser partícipe de la creación de su propio conocimiento. Es frecuente ver un profesor que solo se limita a dar sus clases en forma de exposición, mientras el alumno intenta imitar lo que su maestro realiza. El profesor presenta y explica los principios, se preocupa de que el estudiante los aplique dentro del mismo contexto, esto conlleva algunas dificultades, por ejemplo, aplicar los conocimientos en situaciones diferentes de las presentadas, problemas de comprensión conceptual y uso eminente de aprender todo memorísticamente. Cabe resaltar que las prácticas por parte del docente, donde se basan solo en actividades del estudiante, pueden conllevar a que forme ideas erróneas o surjan algunas dificultades conceptuales, a su vez, presentar situaciones problema ayuda en la construcción del conocimiento. Por otro lado, con el fin de diferenciar entre ejercicio, problema y situación problema, citaremos a Hitt y Cortes (2009):

- Ejercicio: si al momento de enfrentar la situación se recuerda el algoritmo y el procedimiento para resolverlo.
- Problema: si no recordamos algún algoritmo o procedimiento al momento de realizar la lectura del enunciado y se tiene que hacer uso de representaciones, con el fin de articular entre ellas, dado que un registro es complemento del otro y cada uno trae conceptos matemáticos intrínsecos.
- Situación problema: debe ser simple, fácil de entender (no siempre será fácil de resolver), debe incitar a la reflexión (no puede ser un ejercicio).

Hasta este punto se han presentado diversos puntos de vista de la didáctica y el uso de las tecnologías en ella, culminaremos con Cuevas y Pluvinage (2003), que serán eje en el andamiaje didáctico de la presente investigación. Esta didáctica es el contraste de lo tradicional, partiremos de estos tres principios:

- Tratar de mantener al estudiante en constante actividad, resolviendo problemas, haciéndolo participe de la construcción de sus conocimientos en actividades que resulten de interés.
- Proponer para la introducción de un concepto dentro de un contexto, unos problemas con su respectiva resolución, de manera organizada y coordinada. No es tarea fácil encontrar la adecuación del contexto de clase, ya que en cada tema existen muchos conceptos intrínsecos, por lo tanto es tarea del profesor escoger el más adecuado. Respecto a esto, Iafrancesco (2017) propone crear situaciones que estimulen para generar expectativa, interés, motivación y pasión al aprendizaje.
- Realizar retroalimentación una vez el estudiante haya resuelto algún problema, con el fin de validar los resultados y concluir que lo realizado se encuentra dentro de un proceso lógico.

No se debe limitar al estudiante a que realice la resolución de un problema solo con el método dado por el profesor, se puede llegar a una respuesta correcta de muchas maneras, por esto es tan importante la retroalimentación con el estudiante y verificar que lo realizado se hizo bajo la lógica de un proceso. Además, que dé la solución de un problema en particular, pero es posible que pueda no suceder para otra situación similar, tratar de no generalizar y no centrarnos en una enseñanza del aprendizaje especifico. Sobre este tema, Duval (1998b) manifiesta que a pesar de que un estudiante ha logrado la resolución de un problema específico en un registro dado, puede llegar a tener dificultades en otro. Además, la didáctica de Cuevas y Pluvinage (2003) sugiere:

> Cada vez que se llevan a cabo operaciones que conllevan a conceptos matemáticos, proponer en lo posible operaciones inversas.
>
> Cuando se muestra una forma o un método de resolución de problemas, intentar dar alguna forma de solución alternativa, de ninguna manera imponer una forma de solución (p. 277).

Dentro de las operaciones inversas nos podemos encontrar con muchas, para este caso podemos ejemplificar la posibilidad de que el estudiante sea capaz de obtener la ecuación a partir de una representación semiótica, como puede ser una línea recta. En su gran mayoría, ellos no reconocen el mismo objeto matemático cuando se les da en diversas formas de representación, otros de los problemas se evidencian en la articulación de dos registros (de aquí la importancia de ofrecer diversos conceptos). Lo anterior, debido a la necesidad de usar varias formas de representaciones, ya que unos traen inmersos conceptos que otros no, por tanto son complementarios y necesarios en los procesos de aprendizaje (Duval, 1998a).

Para la comprensión de los conceptos de la línea recta, como uno de los objetivos en este trabajo, que es parte de la problemática, dentro de la cual se encuentra el concepto de pendiente, Cuevas y Pluvinage (2003) proponen una didáctica para la enseñanza de la línea recta y, por supuesto, de la pendiente, en la cual se incluye el uso de ayudas tecnológicas para su conceptualización. Se hace uso del *software* LIREC II, donde el estudiante es el artífice principal de la creación de sus conocimientos, además de un escenario virtual para la construcción del concepto de "pendiente".

Puede resultar que el uso de la didáctica como se ha planteado requiere un trabajo extra por parte del docente, pero puede traer muchos beneficios en los procesos de enseñanza y es una buena forma para que los estudiantes comprendan estos conceptos e, incluso, conceptos anteriores. Se establecen relaciones de las operaciones enseñadas y en áreas de la vida cotidiana, para nuestro caso con el sector productivo, además de una conceptualización más firme con la adquisición de los nuevos conceptos. En esta didáctica se pueden reconocer estos registros:

"aritmética (variaciones proporcionales), algebraico (coeficientes de ecuaciones lineales), geométrico (cociente de segmentos orientados)" (p. 279).

2.2.5. La modelización matemática y el uso de las tecnologías

Es evidente el avance de las tecnologías en los diversos campos, partiendo del hecho que entre sus manos se tengan habitualmente diversos dispositivos tecnológicos, los cuales se están convirtiendo en una necesidad. Lo anterior, puede ser una muestra de la importancia que tiene la tecnología en nuestro diario vivir, debemos abrir las puertas de nuestras aulas a estas ayudas para analizar dichos objetos, evitando que sean instrumentos que solo sirven para oprimir botones y generar resultados.

Es usual encontrar que para muchos profesores el uso de la tecnologías en las aulas puede obstruir el avance de sus habilidades: "[…] inhibe el desarrollo de ciertas habilidades matemáticas; otros, con un entusiasmo desbordado, consideran que es aplicable en todo, promoviendo en los alumnos un uso de la tecnología que consiste en apretar botones sin promover una reflexión" (Hitt y Cortes, 2009, p. 1).

Algunos docentes argumentan que es un impedimento para la contextualización, mientras que un reto de los investigadores es acabar con ese tabú y lograr que las tecnologías sean vistas como ayudas para la comprensión y la conceptualización de los objetos matemáticos. Existen diversas investigaciones que hablan del porqué no han logrado impactar en los contextos matemáticos.

Las representaciones de los objetos matemáticos, con la ayuda de *software*, permiten la interacción y la comparación de lo que se visualiza con los procedimientos algebraicos realizados en el papel (Huertas y Castañeda, 2013). Los anteriores autores referencian a Villa-Ochoa *et al.*, (2009), quienes ven en los docentes que promueven los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contexto, es decir, que las hacen parte de la realidad, su contribución a la reducción de la brecha entre esta disciplina y lo real.

Según Sierra *et al.* (2011), la modelización es considerada la herramienta útil para trabajar desde las matemáticas, la ciencia y la sociedad, para afianzar de forma cultural y antropológica dicha disciplina. Además, la asignan como cualquier tipo de relación entre el mundo real y las matemáticas para poderse interpretar llevándola a un modelo.

Un modelo propuesto por Blum (2002) en gran medida se ajusta con lo que se pretende alcanzar con la población seleccionada: reducir la situación real a un modelo real mediante la modelización, llevar este modelo real a un modelo matemático que otorgue solución al problema al interpretarlo y validarlo, por último, realizar una confrontación con el contexto real.

Además de la comprensión del objeto matemático, en nuestro caso será la función lineal y afín, se buscará que los estudiantes sean capaces de dar solución a situaciones nuevas e indeterminadas, que involucren los conceptos de variación y puedan llegar a un modelo matemático del proceso, reflexionar y concluir de manera coherente. La modelización es un tema en el que la mayoría de los estudiantes demuestran dificultades, ya que deben tener ciertos dominios, habilidades y conocimientos para modelizar una situación.

La modelización dada por Confrey y Maloney (2007), es tomada como un proceso de confrontar una situación, razonar, estructurarla desde las matemáticas y transformarla. En esencia lo que se busca es llegar a un registro semiótico que puede ser una ecuación representativa y predictiva de la situación problema, la cual permite explicar el fenómeno del mundo real.

Debido a las diversas interpretaciones que se puedan dar de los fenómenos, situaciones y demás, es necesario analizar qué son las concepciones, dado que el proceso de creación de conceptos pasa por la construcción de las mismas. Para Hitt y Cortes (2009), se deben seleccionar de forma cautelosa los problemas, respecto a ello se cuestionan: "Para cada concepto matemático, ¿qué tipo de problemas son importantes de seleccionar para que el aprendizaje sea efectivo?" (p. 5).

Los investigadores proponen seleccionar buenos problemas con los cuales los estudiantes adquieran capacidades, no solo para la resolución de problemas específicos; sino también para aplicar sus conocimientos ante nuevas circunstancias. En la mayoría de los casos los profesores no cuentan con suficientes actividades que les permitan avanzar de forma eficaz y se logren alcanzar los aprendizajes esperados.

Para Mora y Barrantes (2008) las concepciones son la visión acerca de la naturaleza de una disciplina o la percepción de la misma. Cabe mencionar que las creencias sobre la disciplina tienen cabida dentro de una concepción, además influyen en las creencias de la misma. De las creencias García *et al*. (2006) afirman que son ideas poco elaboradas, generales o específicas, que hacen parte de los conocimientos de una persona, por tal motivo intervienen de forma directa en sus desempeños y, por supuesto, en los procesos educativos. No siempre las personas son conscientes de lo que creen, esto se encuentra dado a que con el tiempo cambien sus creencias.

Una circunstancia se puede presentar al momento que el estudiante hace uso de ayudas didácticas no tecnológicas, luego emplea la tecnología para analizar la misma variable y realizar una comparación; empero, si no coinciden, el alumno se encontrará frente a un conflicto cognitivo, resolverlo le permitirá avanzar en sus procesos de aprendizaje (Hitt y Cortes, 2009).

2.2.6. El modelo Cuvima

El modelo Cuvima surge debido a la necesidad que existe de guiar actividades didácticas que integren las matemáticas con otras áreas del conocimiento como la física, la ingeniería o las ciencias en general, con el objetivo de promover un aprendizaje activo, la comprensión, la interpretación y la argumentación de conceptos matemáticos y físicos (Cuevas, Villamizar, y Martínez, 2017).).

Los autores de este modelo sugieren que la enseñanza de la matemática y la física no deben separarse, en cambio es necesaria su integración total; sin embargo, se deja abierta la posibilidad de no solo enfocarnos en estas dos áreas, sino de integrar otras ciencias, en nuestro caso la ingeniería electrónica. En la electrónica están presentes muchos fenómenos físicos, por ejemplo, las termocuplas como elemento transductor que transforma la variable temperatura en unidades eléctricas (milivoltios). Con esto se puede evidenciar el proceso de transformación de la energía como fenómeno físico, en este cambio de variables se encuentran implícitos conceptos matemáticos, caso de la función lineal y afín. Por otro lado, con el fin de guiar a los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo promover la comprensión de conceptos físicos y matemáticos en electrónica, con estudiantes de la Técnica Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales?
- ¿Cómo incorporar el uso de las NTIC dentro del aula como herramientas mediadoras del conocimiento?

Dentro del modelo Cuvima existen diversos elementos didácticos, entre los cuales tenemos: ser parte de una situación real, a partir de ella comenzar la construcción del concepto; además de la experimentación que se realizará con el uso del dispositivo tecnológico y la utilización de diversos registros de representación para ser interpretados con el fin de introducir los conceptos.

El modelo ha sido probado con excelentes resultados en México y Colombia, donde se utilizaron tecnologías digitales, por ejemplo, el smartphone. Se realizaron diversos trabajos con los estudiantes para que ellos construyeran sus propios conceptos, conjeturas y de esta forma pudieran modelizar los fenómenos. Con estos procesos, además de emplear la metodología Cuvima, los estudiantes se mostraron motivados, analizaron dichos procesos, ejecutaron discusiones entre ellos y se alcanzó un aprendizaje significativo según los investigadores (Cuevas *et al.*, 2017).

Además, hacen referencia a los cambios conceptuales como forma de suscitar la comprensión de los conceptos científicos. Por ello es importante realizar una confrontación de las ideas previas que los estudiantes tienen sobre estos conceptos con los resultados obtenidos de la experimentación para modificar o dar certeza.

Es usual que siempre que un estudiante se encuentre con algún objeto de estudio, posea algunas ideas o concepciones del mismo o las llamadas ideas previas (Hierrezuelo y Montero, 2006), las cuales serán enfrentadas con los resultados de la experimentación. Cabe resaltar que dichas ideas no siempre son del todo incorrectas, aunque no siempre tienen lugar al cambio, son piezas claves en la restructuración de los conocimientos y se pueden afianzar y repotenciar.

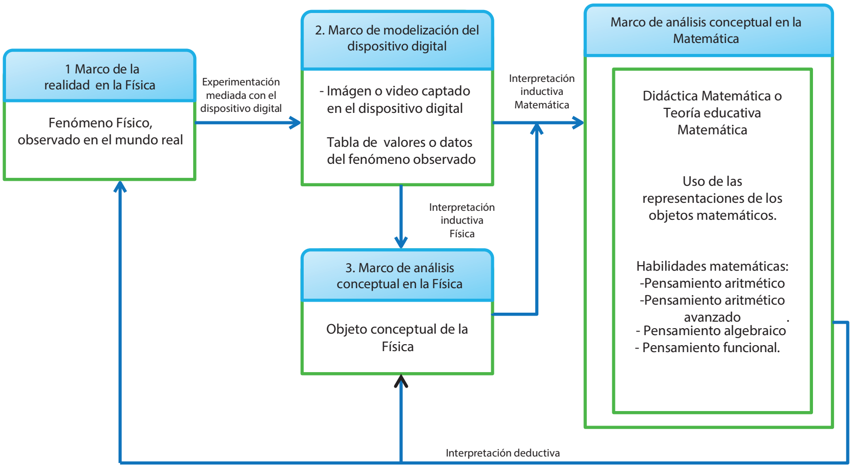
Con la aplicación del modelo se busca formar en los estudiantes habilidades, destrezas, valores y aptitudes propias de los científicos, como los son: la curiosidad, estar abiertos a nuevos conocimientos y a pensamientos lógicos para comprender o proponer, basados en las representaciones de los fenómenos (Cuevas *et al*., 2017).

Los creadores del modelo se enfocaron en el tono como parte importante del sonido (propiedad física) y el fenómeno natural, para ellos el tono no debe ser considerado solo como una cualidad del mismo (sonido). Los estudiantes deben poseer la capacidad de realizar diversas representaciones mediante su modelización para alcanzar una mejor comprensión de sus propiedades.

La propuesta de investigación tiene como uno de sus objetivos diseñar actividades didácticas para promover la comprensión de los conceptos matemáticos (función lineal y afín) y electrónicos. El modelo Cuvima permite la integración de la matemática y la física de manera armónica, activa y, en nuestro caso, electrónica. Además, involucra al estudiante como eje central que le permitirá ser partícipe en la construcción de sus propios aprendizajes con el uso de ayudas tecnológicas, por tal motivo se ajusta a los intereses que se desean alcanzar. A continuación, se realizará una explicación de la metodología a emplear para el presente trabajo, basada en los cuatro marcos del modelo (Figura 11):

1. Marco de la realidad en la física: en este marco se recomienda que, partiendo de una situación en contexto, se proceda a la experimentación para introducir un concepto físico. Por ejemplo: la transformación de la energía (energía calórica a eléctrica asociada a temperatura y voltaje, respectivamente). Para alcanzar esto, el profesor será el encargado de la organización de elementos, recursos, estudiantes y aula para la realización de un experimento mediado con dispositivos tecnológicos, la visualización y la toma de datos del fenómeno físico.

Figura 10. Modelo Cuvima de un fenómeno físico



Fuente: Villamizar (2018, p. 59).

2. Marco de modelización del dispositivo digital: en este marco se pueden utilizar diferentes dispositivos tecnológicos (smartphone, computadora u otros), además de diversos *software* o apps, los cuales permitirán la captura de datos en la experimentación; posteriormente estos serán interpretados y representados (registros de representación). El uso de dichos dispositivos evitará que el estudiante tenga que hacer procedimientos que quizás resulten innecesarios, como el ajuste de curvas y los procesos completos de modelización; a la vez, que dedique más tiempo en la conceptualización, la interpretación de las representaciones y el análisis de los procesos.
3. Marco de análisis conceptual en la física: su objetivo es promover una interpretación que esté relacionada con los conceptos físicos asociados al fenómeno, cuya representación es obtenida en el marco de modelación del dispositivo digital. Es trabajo del docente establecer, en forma de discusión con los estudiantes, lo relacionado a los resultados obtenidos mediante la experimentación. Con esto se espera que ellos no formen ideas erróneas de los conceptos adquiridos que están inmersos en las actividades (conceptos físicos).
4. Marco de análisis conceptual en la matemática: se integran los conceptos matemáticos necesarios para la modelización del fenómeno físico, la creación de un modelo para la interpretación de dicho fenómeno (interpretación inductiva en la matemáticas) y la participación activa de los estudiantes en la creación del mismo, dependiendo del grado de conocimiento, habilidad y destrezas cognitivas, basados en las representaciones obtenidas por el dispositivo tecnológico. De ahí la importancia del aporte de estos dispositivos,

ya que evitarán el uso de algoritmos que a veces puede resultar tedioso y rutinario al tratar de encontrar alguna representación gráfica, tabla de valores, etc.

El profesor es el encargado de la organización para el desarrollo y el cumplimiento de las actividades, de forma individual o en grupos, haciendo uso de una didáctica organizada y secuencial. A partir del modelo obtenido con la ayuda del dispositivo tecnológico, los estudiantes pueden identificar los conceptos matemáticos que se encuentran inmersos.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

En el presente capítulo se describirá el diseño de las actividades didácticas e instrumentos de medición, los cuales se aplicarán a estudiantes de cuarto semestre de la Técnica Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales del programa de articulación de la Universidad de Pamplona.

3.1. Fase 1. Selección del fenómeno físico presente en los procesos industriales

Dentro del programa Técnico Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales (Universidad de Pamplona, 2016), se encuentran principios importantes para comprender algunos procesos industriales, caso de la transformación de energía (calorífica a eléctrica) que es un tema en el cual nos basamos para introducir conceptos matemáticos asociados al fenómeno.

Los instrumentos necesarios para la experimentación fueron seleccionados con base en dispositivos tecnológicos que los estudiantes del programa académico han utilizado, de los cuales tienen ciertos conocimientos en su manejo y formas de operación, además de los smartphone y las computadoras. La finalidad de hacer uso de estos artefactos es crear laboratorios portátiles de bajo costo que permitan generar interés en el estudiante, además de ser agentes mediadores para alcanzar los objetivos del aula (enseñanza y aprendizaje). En el anexo 11 se describen en detalle cada uno de estos instrumentos.

3.2. Fase 2. Diseño de la primera etapa didáctica

Se realiza con base en las competencias y las habilidades que el estudiante debe poseer para encaminarse en la comprensión del fenómeno físico de transferencia de energía (calor) y la función lineal y afín (representación como línea recta). Esta primera etapa se muestra en el anexo 6, a su vez, se dividió en dos secciones:

- Sección 1: se realizó un pretest de ideas previas con el fin de recolectar información relacionada con el proceso de transformación de la energía y los conocimientos que ellos deben poseer sobre línea recta. Las ideas previas fueron en formato de preguntas abiertas, allí se indagó respecto a conceptos de energía, procesos de transformación de la misma y variable de temperatura. Lo concerniente a los conocimientos matemáticos de la línea recta consistió en una serie de preguntas abiertas y otras relacionas, para encontrar o dar solución a ejercicios de contexto donde se involucra temperatura vs. tiempo y voltaje vs. tiempo.
- Sección 2: consistió en realizar una serie de actividades como ubicar puntos en el plano cartesiano y dar las coordenadas de los puntos (operación inversa), con el fin de explorar las habilidades de los estudiantes e iniciar el proceso de construcción de los conceptos matemáticos de la función lineal y afín.

A continuación, se describirán las respuestas a cada una de las preguntas de manera ideal.

Ideas previas sobre la transformación de la energía

1. ¿Qué entiendes por energía?

   Capacidad que tiene un cuerpo para producir alguna acción, cambio o transformación, se presenta cuando se pasa de un cuerpo a otro.
2. ¿Qué tipo de energías conoces?

   Energía cinética, potencial, eléctrica, química, térmica, nuclear, eólica, hidráulica, mecánica, electromagnética, etc.
3. ¿Qué entiendes por el proceso de transformación de energía?

   Es el proceso de transformar una energía inicial en otra energía diferente, por ejemplo, pasar de energía térmica a eléctrica.
4. ¿Qué variables están involucradas en la medición de temperatura?

   La temperatura, voltaje, resistencia, distancia, estas son las más importantes.
5. ¿Qué energías están presentes en la medición de la temperatura?

   Energía cinética, calorífica y eléctrica.
6. ¿De qué depende que la temperatura varié, sea creciente o decrecientemente?

Depende de la fuente productora de calor, si esta se encuentra calentando y no hay factores externos que puedan alterar la temperatura, su comportamiento será variante y creciente; en cambio, si la fuente deja de producir calor, comenzará el proceso de enfriamiento y la temperatura será decreciente.

Conocimientos previos matemáticos

1. ¿Qué entiendes por línea recta?

   "Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos tales que tomados cualesquiera dos puntos diferentes $P_1(x_1, y1)$ y $P_2(x_2, y2)$ del lugar, el valor de la pendiente m calculada por medio de la formula resulta siempre constante" (Lehmann, 2008, pp. 56-57).

2. Describe qué entiendes por variable dependiente e independiente.

   La x es la variable independiente y pertenece al dominio, cambia de un valor a otro sin depender (asume valores) a la y asociada con f, es llamada variable dependiente (depende de x).

3. Se pide realizar la cocción de una pieza cerámica a una velocidad de 5 °C/min constantes hasta llegar a los 600 grados, ¿qué representa dentro de una función el 5 °C/min?

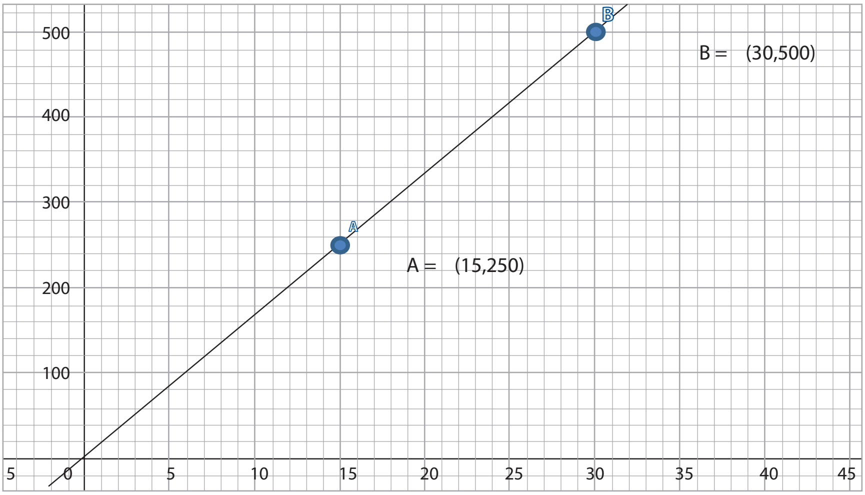
   Los 5 °C/min representan la pendiente de la función.

4. Por 30 minutos a 300 °C se mantiene una pieza cerámica dentro de un horno, ¿cuál es la pendiente?

La pendiente es la razón de cambio de la variable dependiente y (Δy), respecto a la variable independiente x (Δx); ya que por 30 minutos se mantiene la pieza cerámica a una temperatura constante de 300°C, su representación gráfica será una line recta paralela al eje x, por tal razón su pendiente es igual a 0.

5. Cómo representarías de forma gráfica la siguiente situación: transcurridos 15 minutos se toma la medida de temperatura y el dispositivo visualiza 250 °C, se realiza una segunda medición a los 30 minutos con una temperatura de 500 °C.

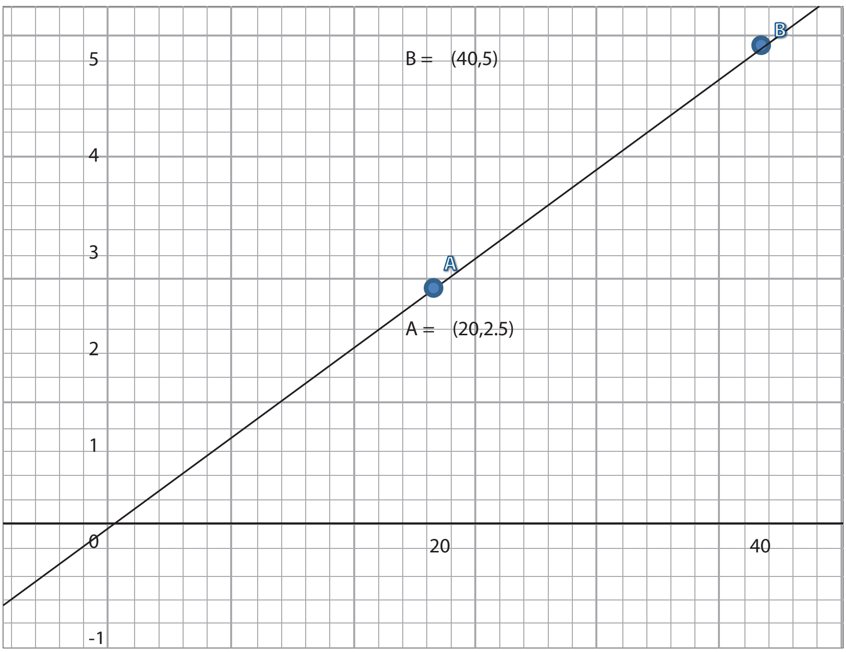
Figura 11. Representación gráfica del caso real de tiempo vs. temperatura



Fuente: elaboración propia.

6. Cómo representarías de forma gráfica la siguiente situación: transcurridos 20 minutos se toma a la salida del AD595 (pin 8-9) un voltaje de 2,5 voltios dc, 40 minutos después un voltaje de 5 voltios dc?

Figura 12. Representación gráfica del caso real de tiempo vs. voltaje



Fuente: elaboración propia.

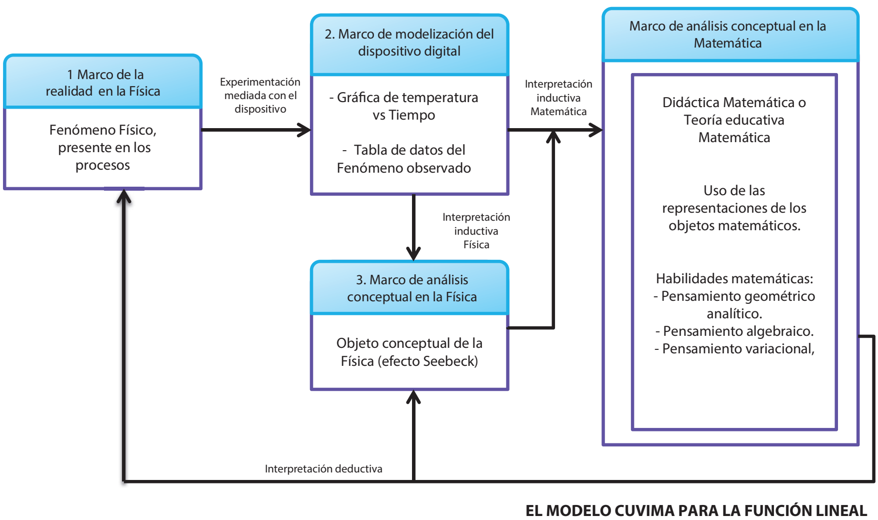
7. Partiendo de la siguiente ecuación: y=2x-3, identifique la variable dependiente, la independiente, el valor de la pendiente y la ordenada al origen.

   La variable dependiente es la y, la independiente la x, la pendiente 2 y la ordenada al origen -3.

3.3. Fase 3. Diseño de la primera experiencia didáctica para la modelización del fenómeno físico

Esta primera experiencia didáctica se basará en actividades que siguen el modelo Cuvima (anexo 7), con el fin de introducir en los estudiantes los conceptos alusivos a una transformación de energía para que ellos puedan construir un modelo matemático interpretativo del fenómeno físico. Con este fin se diseñaron una serie de actividades que los estudiantes deben resolver con la supervisión del docente, la aplicación del modelo Cuvima en el tema de la transformación de energía (calórica a eléctrica) se aprecia en la Figura 14.

Figura 13. Adaptación del modelo Cuvima en el fenómeno de transferencia de calor



Fuente: elaboración propia.

En el primer marco de la Figura 14 (marco de la realidad en la física) la experiencia comienza midiendo la temperatura del artefacto productor de calor, donde los estudiantes harán uso de un termopar tipo K, el cual es un transductor encargado de tomar la energía calorífica y transformarla en voltaje (milivoltios).

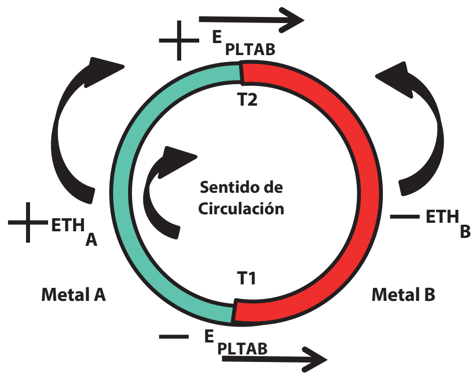
Para el segundo marco de la Figura 14 (marco de modelización del dispositivo digital), se usará el termopar conectado al amplificador (AD595), sus datos son tomados por Arduino y enviados al smartphone o el computador. Estos serán visualizados en parejas (temperatura vs. voltaje), también se tabularán en la tabla 3 del anexo 7, posteriormente se llevarán a una hoja de cálculo en GeoGebra para realizar su linealización y, de esta forma, obtener la representación gráfica del fenómeno físico, lo cual se hará en las actividades que van del punto 8 al 11. En el anexo 5 se encuentra un manual del uso básico del GeoGebra, resulta necesario que el docente ejecute una introducción con el manejo de este *software*, ya que es de suma importancia porque nos ayudará a obtener el modelo matemático.

El proceso de toma de temperatura directamente del termopar haciendo uso de un dispositivo, como un multímetro, no es tarea fácil, dado que a temperaturas bajas el dato que mostrará el dispositivo será demasiado pequeño, generando dudas en el observador. En ocasiones se puede interpretar como alguna especie de ruido o inestabilidad del multímetro, por tal motivo se procede a la amplificación de este valor. Es trabajo del docente discutir estos fenómenos, si él lo ve conveniente puede realizar el experimento de la toma directa de temperatura en el termopar.

Para el tercer marco de la Figura 14 (marco de análisis en la física) se explorarán conceptos alusivos a la física, mediante los puntos 6 y 7 se indagará sobre la importancia del termopar en la experiencia y la necesidad de amplificar estos datos para facilitar su tratamiento después de la experimentación (marco de modelización del dispositivo digital). Es necesario que el profesor genere discusión acerca de los resultados y la interpretación del fenómeno físico (interpretación inductiva en la física).

El principio de medición de temperatura utilizando termocuplas se basa en el efecto Seebeck, el cual sucede cuando hay circulación de una corriente por un circuito conformado por dos materiales distintos, cuyas uniones se mantienen a una temperatura diferente. La circulación de dicha corriente obedece a los efectos Peltier y Thomson (Creus, 1997). Otra conceptualización de este efecto es: al unir dos alambres de materiales diferentes formando un circuito, se presenta una corriente eléctrica cuando las junturas se encuentran a diferente temperatura. Esto es debido a la combinación de los dos efectos anteriores (Álvarez, 2007).

Figura 14. Efecto Seebeck



$$E_{SBCK} = E_{PLTABT_2} - E_{PLTBAT_1} + E_{ThA} - E_{ThB}$$

Fuente: (p. 10).

Para este caso nos enfocaremos en el efecto Seebeck como fenómeno físico que hace referencia a la transformación de energía calorífica en energía eléctrica. Para el cuarto marco de la Figura 14 (marco de análisis conceptual en matemáticas) se plantea en el anexo 7 una secuencia didáctica a partir del punto 12. En esta, los estudiantes son guiados a crear un modelo matemático que permita la interpretación del fenómeno físico (interpretación inductiva en matemáticas), las actividades inician con la identificación de los ejes y su variable, punto de corte de la recta con el eje y. En la Figura 16 se presenta el modelo Cuvima modificado y adaptado para la presente investigación.

Debido a la importancia del concepto de pendiente, en el punto 14 los estudiantes analizarán la hoja de cálculo, con el fin de encontrar la variación en cada dato, tanto de voltaje que está en el eje y (y2-y1), como de temperatura en el eje x (x2-x1).

Debido a la dificultad que se presenta al querer tomar la medida de voltaje de forma directa al termopar, es necesario el uso del AD595 para la amplificación y la compensación por la pérdida de las uniones de materiales, con este dispositivo electrónico la función pasa de ser lineal a afín (a 0 °C se tiene 2,72 mv). Dado esto, en el punto 14 los estudiantes tienen que calcular la pendiente (función afín), no se les dará la ecuación con el fin que, de manera inductiva, ellos comprendan que para una función afín la pendiente se calcula: (y2-y1)/(x2-x1). Este resultado será comparado con la ecuación de la recta dada por el GeoGebra (punto 15).

Por otro lado, en el punto 17 se busca que los estudiantes hagan uso de las tablas ideales del termopar (Figura 57), donde buscarán el dato de voltaje asociado a cada dato de temperatura y comparar así lo experimental con lo teórico. De esta forma, se tendrá certeza que el modelo matemático se puede usar para comprender e interpretar los conceptos físicos del fenómeno (interpretación deductiva en la física).

Cuando solo se emplean las tablas ideales del termopar (Figura 57) (temperatura vs. voltaje), la representación gráfica es lineal, dado que para 0°C se tienen 0 voltios. De los puntos 22 al 24, al igual que se analizó en las actividades anteriores en la hoja de cálculo, pero con los datos amplificados, se espera que los estudiantes interpreten y comprendan cómo se calcula la pendiente cuando una función es lineal o afín.

Además del cálculo de pendiente realizado en la actividad 18, se espera que asocien, comparen y ubiquen esta pendiente con la que se encuentra en la representación gráfica del GeoGebra (puntos 20 al 22). Dicho factor (pendiente) es propio del termopar tipo K, encargado de realizar la transducción de energía calorífica a eléctrica, pero debido a su naturaleza (materiales que lo conforman) aproximadamente nos entrega por cada grado centígrado 40,44μV (pendiente obtenida de las tablas ideales).

Las actividades que van del punto 25 al 27 se enfocarán en analizar la ecuación del AD595: salida_ AD595= (Voltaje_Termopar+11μv)*247,3, donde los estudiantes deberán realizar el despeje de la misma e identificar las variables dependiente e independiente, el punto de corte con el eje y. Se espera que comprendan que el Voltaje_Termopar se encuentra en la tabla ideal del termopar, donde se multiplica el factor de 40,44μV/º C por cada dato de temperatura para hallar el dato de voltaje, a su vez, que deduzcan que este factor, al ser multiplicado por 247,3 (factor de amplificación), resulta siendo la pendiente de la ecuación del AD595.

En el punto 28 realizarán el ajuste de la ecuación y la expresarán de forma y=mx+b, en el punto 29 harán la comparación de las dos rectas del GeoGebra, la que está sin amplificar y la amplificada, allí deberán interpretar sus diferencias. El objetivo de la presente experiencia es que, de forma inductiva, los estudiantes comprendan que mediante la función lineal y afín se pueden modelar procesos de transformación de energía, donde se hace uso del termopar como elemento transductor. Duval (2004) indica que para alcanzar una interpretación correcta de un concepto matemático, se deben emplear y comprender diferentes formas de representación e interactuar dentro de las mismas. Además, es necesario reforzar los procesos de realización de las operaciones inversas, que concluyan de las gráficas halladas y las asocien con las diferentes variables.

Por último, se espera que los estudiantes puedan predecir datos futuros de temperatura y voltaje (puntos 30 y 31) mediante la función lineal y afín, que hagan uso de su pensamiento variacional y el despeje de ecuaciones.

3.4. Fase 4. Diseño de la segunda experiencia didáctica para la modelización del fenómeno físico

Esta segunda experiencia didáctica también se basará en el modelo Cuvima (anexo 8), su objetivo es que los estudiantes refuercen los conocimientos adquiridos de la transformación de energía y su modelo matemático. Además de que puedan observar cómo este fenómeno físico es variante en el tiempo y puede ser lineal ascendente, con una pendiente constante, si la fuente de calor que se está midiendo también es constante. El docente debe permanecer atento de que el elemento de calor no esté siendo afectado por algún agente externo, como el viento, dado que puede hacer que varíe el calor aplicado al dispositivo (termopar) usado para medir la variable.

Para lograr lo anterior se diseñaron una serie de actividades que los estudiantes deberán desarrollar acompañados de la supervisión del docente. La experiencia didáctica es similar a la primera, se usarán los mismos dispositivos tecnológicos, la diferencia principal radica en las variables tomadas, tiempo y temperatura, esta medición se realizará en el punto 3 (marco de la realidad en la física). Los datos serán tabulados y llevados al GeoGebra, para la realización de la representación gráfica (marco de modelización del dispositivo digital), puntos del 4 al 9 (modelo matemático interpretativo del fenómeno físico).

Las siguientes actividades estarán centradas en la interpretación del modelo matemático (marco de análisis en matemáticas). En los puntos del 11 al 14, los estudiantes podrán interactuar en el GeoGebra con los deslizadores (m y b), que los irán moviendo de forma respectiva, con esto se espera que los estudiantes conceptualicen los conceptos de pendiente y punto de corte (eje y). A la vez que comparan con la ecuación de la recta y=mx+b y puedan concluir de lo que sucede cuando se mueve el deslizador m (pendiente) y lo que sucede al mover el deslizador b (corte con el eje y).

Además de lo anterior, haciendo uso de los deslizadores, ajustarán la recta con los datos de tiempo y temperatura (x,y), los cuales estarán representados en puntos en el plano cartesiano (punto 15); deberán identificar la pendiente y el punto de corte con el eje y, (punto 16); después procederán a calcular la pendiente e identificarla en la recta, partiendo de la hoja de cálculo (punto 17); mientras que en el punto 19 tomarán los datos de tiempo que están en la columna A, correspondientes a la variable dependiente y, los cuales se remplazarán en la ecuación de la recta. Estos nuevos datos se registrarán en la columna C, donde los estudiantes compararán la nueva columna con el fin de encontrar similitud con las demás columnas.

Con el fin de predecir datos futuros, en los puntos 20 y 21 deberán hacer uso de su pensamiento variacional y dar datos de temperatura y tiempos, partiendo de unas condiciones iniciales. En la última actividad se espera que los estudiantes puedan identificar que es posible usar la función lineal y afín para modelizar otros fenómenos físicos.

3.5. Fase 5. Diseño del postest de actividades

Se busca explorar y corroborar los conceptos adquiridos alusivos a la interpretación del modelo matemático, con la aplicación de las experiencias didácticas y la solución de las actividades. En el anexo 9 se encuentran las actividades correspondientes al postest, para lo cual se inicia partiendo de una representación gráfica donde los estudiantes deben hallar la ecuación de la recta (punto 1). Seguidamente realizarán la operación inversa (punto 2), partir de una ecuación de la forma Ax+By=C, la cual deben despejar y dar de la forma y=mx+b, donde además es necesario seleccionar la pendiente y el punto de corte con el eje y, así como realizar la representación gráfica. Por último (punto 3) se les presenta una tabla de datos con la cual deben encontrar la ecuación de la recta y graficarla.

Cabe destacar que con estas actividades se espera reforzar las habilidades y las formas de interactuar dentro de los diferentes registros de representación. Como actividad complementaria (anexo 10) se hará uso de la herramienta LabVIEW, con base a que los estudiantes o la población seleccionada para la presente investigación pertenecen al programa Técnico en Instrumentación y Control de Procesos Industriales. Ellos presentan ciertas habilidades en el uso de los instrumentos virtuales, lo cual no solo servirá para que refuercen los conocimientos adquiridos en la interpretación del fenómeno físico y su modelo matemático explicativo del mismo; sino para interactuar con el *software* que les permitirá observar en tiempo real los procesos de transformación de la energía y sus diversas formas de representación en la matemática. Esta actividad se puede considerar de libre elección para el docente y depende de la población escogida.

3.6. Fase 6. Aplicación de la primera etapa didáctica

En todas las actividades participaron 26 estudiantes de cuarto semestre que están en el rango de 17 a 20 años de edad, del programa Técnico en Instrumentación y Control de Procesos Industriales de la Universidad de Pamplona. Para esta primera etapa didáctica se aplicó un pretest de ideas previas acerca de la transformación de la energía, el cual indagó sobre temas relacionados con energía, variables involucradas en la medición de la temperatura, tipos de energía que conocen, entre otras. Después se realizó el pretest de conocimientos previos matemáticos alusivos a la función lineal y afín (anexo 6).

La aplicación del pretest se realizó de manera individual en un salón del laboratorio de instrumentación, aula normal que cuenta con tablero, pupitres, mesones grandes alrededor, sistema de aire acondicionado y muy buena iluminación; aunque el espacio es un poco pequeño, el tiempo fue de una hora y media.

Con anticipación se solicitó a los estudiantes que llevaran materiales básicos: lápiz, borrador, regla y calculadora, aunque la que trae un smartphone es apropiada. El trabajo del docente consistió en repartir el material de trabajo que eran tres hojas con los ítems a responder, además él debía realizar la lectura en voz alta a todo el grupo, supervisar en lo posible una actividad individual y que el estudiante respondiera con sus conocimientos, sin ningún tipo de ayuda; lo anterior, ya que se desean explorar las ideas y los conocimientos previos que poseen. Algunas consideraciones para tener en cuenta son:

- Que sea un trabajo individual.
- Que cada estudiante cuente con los materiales básicos.
- Que el salón sea lo suficientemente grande, proporcional al número de estudiantes, con buena iluminación en un ambiente agradable.

3.7. Fase 7. Aplicación de la primera experiencia didáctica para la modelización del fenómeno físico

En esta experiencia la población fue la misma de la etapa anterior, terminado el pretest se dio un descanso de media hora, luego se realizó una introducción con el uso de GeoGebra (anexo 5) donde se explicaron las operaciones básicas, lo cual duró alrededor de 30 minutos. Esta actividad se realizó en grupos de dos estudiantes (escogidos de forma libre) en el laboratorio de instrumentación, ellos se ubicaron allí en las posiciones de su preferencia, la duración de la experiencia fue de dos horas y media. La parte didáctica consistió en usar el banco de monitoreo de temperatura, se cuenta con tres ubicados en el mismo laboratorio, cuyo manual de uso está en el anexo 3 y la programación del mismo en el anexo 1. Con el banco de monitoreo programado los estudiantes procedieron a tomar los datos de temperatura y voltaje con el smartphone y registrarlos en una tabla para llevarlos a una hoja de cálculo en GeoGebra. Por otro lado, con la secuencia didáctica comenzaron a crear los conceptos de la transformación de la energía y cómo la función lineal y afín puede modelizar este fenómeno.

Figura 15. Temperatura vs. voltaje

Fuente: elaboración propia.

No fue necesario hacer alguna explicación profunda con el uso del banco y sus componentes, ya que en otras experiencias realizadas meses atrás se habían utilizado estos dispositivos en otras prácticas. Cabe resaltar que los estudiantes a quienes se han aplicado estas actividades poseen ciertos conocimientos y habilidades con el uso de algunos dispositivos tecnológicos, ya que hacen parte de su formación profesional.

La función del docente consistió en entregar el material y explicar al grupo cómo se realizaría la actividad leyendo en voz alta los puntos (anexo 7), también en dar los bancos a los grupos, como solo hay tres disponibles fue necesario que, a medida que cada grupo realizaba la medición y la toma de datos, lo cedieran a otros grupos. El docente se encargó de hacer esto con responsabilidad y orden, la toma de los datos no superó los cinco minutos, terminada esta actividad se realizó una retroalimentación de los conceptos para evitar malas interpretaciones. Por último, algunas consideraciones para tener en cuenta son:

- Realizar una introducción al GeoGebra.
- Comprender el funcionamiento del banco de monitoreo y la programación del mismo.
- Si llegado el caso existen problemas con la red lan, los datos se pueden tomar haciendo uso del monitor serial de Arduino.
- Es preferible no inscribir los primeros datos debido que, muchas veces, la inercia de los dispositivos puede generar resultados no apropiados.
- Es necesario supervisar la manipulación del dispositivo fuente de calor para evitar quemaduras.
- En lo posible usar un dispositivo fuente de calor que proporcione temperaturas constantes (muflas o cautín), evitar que agentes externos como el aire afecten el proceso.

3.8. Fase 8. Aplicación de la segunda experiencia didáctica para la modelización del fenómeno físico

Se realizó en grupos de dos estudiantes (es preferible que sean diferentes a los anteriores) un día después de la primera experiencia en el laboratorio de instrumentación, ellos se ubicaron en posiciones de su preferencia, tuvo una duración de dos horas. De igual forma, se usó el banco de monitoreo de temperatura, pero solo cambio la programación, ya que se tomaron los datos de tiempo y temperatura, la programación del mismo está en el anexo 2. Con el banco de monitoreo los estudiantes procedieron a tomar los datos haciendo uso del smartphone o, en su ausencia, un computador con tarjeta wifi, los registraron en una tabla para llevarlos a una hoja de cálculo en el GeoGebra. Con la secuencia didáctica los estudiantes comenzaron a crear y reforzar los conceptos de función lineal y afín, además de hacer uso de su pensamiento variacional para predecir datos futuros.

Figura 16. Toma de datos de temperatura en tiempo real

Fuente: elaboración propia.

El uso de este banco de monitoreo es similar a la experiencia anterior, la función del docente consistió en entregar el material y explicar al grupo cómo se realizará la actividad, leyendo en voz alta los puntos (anexo 8), también hizo entrega de los bancos a los grupos. Algunas consideraciones para tener en cuenta son:

- Comprender el funcionamiento del banco de monitoreo y la programación del mismo.
- Si en llegado caso existen problemas con la red lan, los datos se pueden tomar haciendo uso del monitor serial de Arduino.
- Es preferible no inscribir los primeros datos, debido a que, muchas veces, la inercia de los dispositivos puede generar resultados no apropiados.
- Supervisar la manipulación del dispositivo fuente de calor para evitar quemaduras.
- En lo posible usar un dispositivo fuente de calor que proporcione temperaturas constantes (muflas o cautín).
- Evitar que agentes externos como el aire afecten.

3.9. Fase 9. Aplicación del postest de actividades

Terminada la segunda experiencia se dio un receso de media hora para continuar con la última fase que es la aplicación del postest, fue necesario realizar algunas aclaraciones respecto a la actividad anterior, con el fin de mejorar la comprensión de los conceptos adquiridos. Se crearon grupos de dos estudiantes, los materiales utilizados fueron: documento con los puntos a resolver (anexo 9), lápiz, borrador, escuadra y calculadora, la duración del mismo fue cerca de una hora y media, se desarrolló en el laboratorio de instrumentación donde los estudiantes se ubicaron de forma libre.

Como en las anteriores actividades la función del docente radicó en entregar el material a los grupos y explicarlo de forma colectiva, además de supervisar el trabajo y el cumplimiento de la actividad que consistió en la solución de los 3 puntos (hallar la ecuación de las rectas, ubicar puntos en el plano y hacer uso de tabla de datos). Con el fin de explorar los cambios conceptuales alcanzados por los estudiantes con las anteriores secuencias didácticas, el docente realizó una explicación y una aclaración de todas las inquietudes dadas por los estudiantes. Algunas consideraciones para tener en cuenta son:

- Supervisar el trabajo en grupos por parte de los estudiantes.
- Terminada la actividad realizar una retroalimentación y aclarar inquietudes.

4. RESULTADOS DE APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA

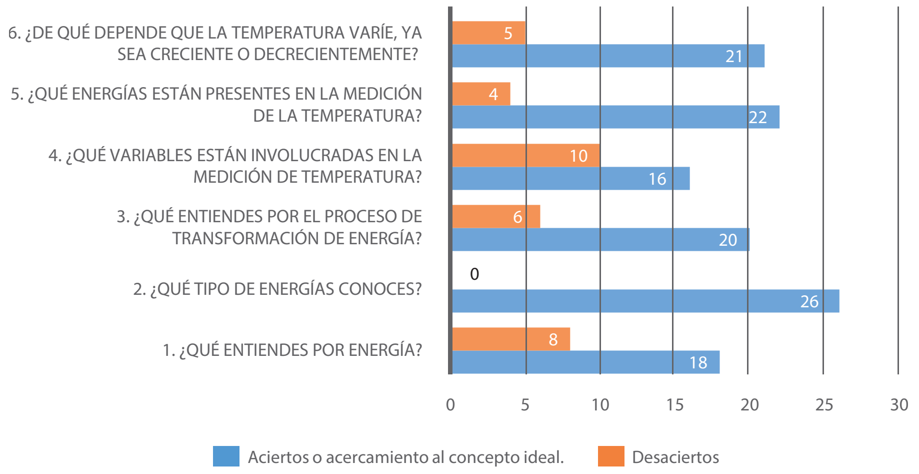
4.1. Resultados de la primera etapa didáctica

La primera etapa didáctica tuvo como fin explorar las ideas y los conocimientos que los estudiantes poseen sobre la transformación de la energía y la línea recta.

4.1.1. Resultados del pretest de ideas previas respecto a la transformación de la energía

En la 8 se encuentran esquematizados los resultados de las ideas previas sobre la transformación de la energía, aplicadas en los 26 estudiantes que participaron en la presente etapa didáctica.

Figura 17. Resultados de las ideas previas sobre la transformación de la energía



Fuente: elaboración propia.

Como se puede apreciar en los resultados, en la pregunta 1, 18 estudiantes respondieron de manera acertada o estuvieron cerca del concepto ideal, donde interpretaron la energía como la capacidad de un cuerpo de producir una acción; por otro lado, 8 estudiantes estuvieron lejos de una correcta apreciación y tomaron la energía como una especie de trabajo o fuerza. En lo concerniente a la pregunta 2, se evidencia que el 100% de los estudiantes demostraron tener conocimiento, por lo menos, de un tipo de energía, la gran mayoría tuvieron en cuenta la energía térmica y eléctrica.

En la pregunta 3, 20 estudiantes tuvieron un acercamiento al concepto de proceso de transformación de la energía, en muchos casos lo ejemplificaron como cambiar de energía calorífica a energía eléctrica; 6 estudiantes no respondieron de manera satisfactoria, incluso 3 de ellos dejaron en blanco el espacio.

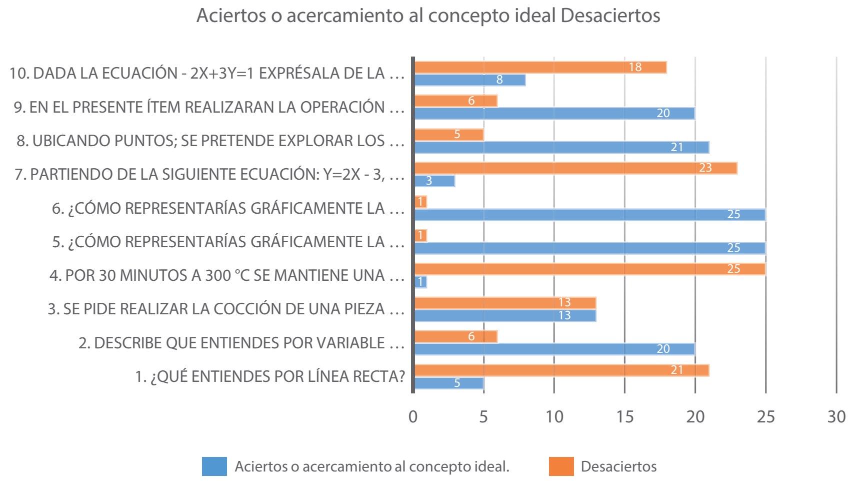
En lo que concierne a la pregunta 4, 16 estudiantes asociaron por lo menos una variable que se encuentra presente en el proceso de medición de temperatura: temperatura, voltaje, etc.; 10 estudiantes mencionaron algunas variables pero ninguna relacionada a la pregunta. En la pregunta 5, donde se indaga sobre las energías presentes en la medición de la temperatura, 22 estudiantes contestaron de forma acertada, a su vez, al menos nombraron dos tipos; los otros 4 nombraron algunos tipos pero no tienen nada que ver en dicho proceso.

En la pregunta 6, 21 estudiantes dieron una definición correcta respecto al comportamiento creciente y decreciente de la temperatura, asociaron que esto se debe al tiempo en que se exponga el instrumento medidor al calor y la intensidad del calor. Algunos mencionaron que los factores ambientales pueden influir, mientras que los restantes 5 estudiantes estuvieron lejos de un concepto valido.

4.1.2. Resultados del pretest de conocimientos previos matemáticos

En la Figura 20 se encuentran esbozados los resultados de los conocimientos previos matemáticos, pretest aplicado a los 26 estudiantes que participaron de manera activa.

Figura 18. Resultados de los conocimientos previos matemáticos



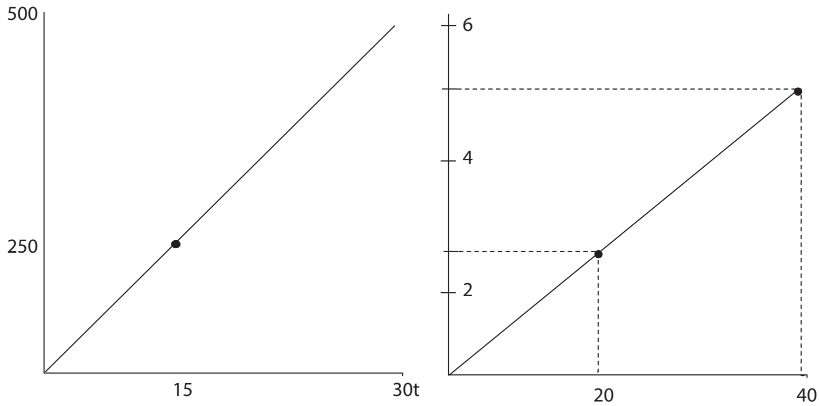
Fuente: elaboración propia.

Como se puede observar en los resultados (pregunta 1), solo 5 estudiantes tuvieron un acercamiento al concepto de línea recta, por ejemplo, concluyeron: “distancia más corta entre dos puntos”, comparando estos con los demás se decidió registrarlos como aciertos o un acercamiento al concepto ideal; dado que los otros 21 estudiantes dieron concepciones muy distantes, como: “es una línea que utilizamos para hacer mediciones rectas”. En el punto 2, 20 estudiantes contestaron algo similar a: “La variable dependiente depende de otras variables para que varié”, además, que la independiente no depende de ninguna, pero no asociaron estas variables a la ecuación de la línea recta (x,y), los demás estudiantes no contestaron nada.

En el tercer punto se evidencia que hubo una paridad en los resultados, de los 13 estudiantes que tuvieron un acercamiento al concepto, solo uno acertó en qué era la pendiente, los demás concluyeron de forma muy similar: por cada minuto la temperatura se incrementaba 5 grados. Los otros 13 alumnos estuvieron en desacierto, muchos lo asumieron como la variable de la función e, incluso, algunos no contestaron.

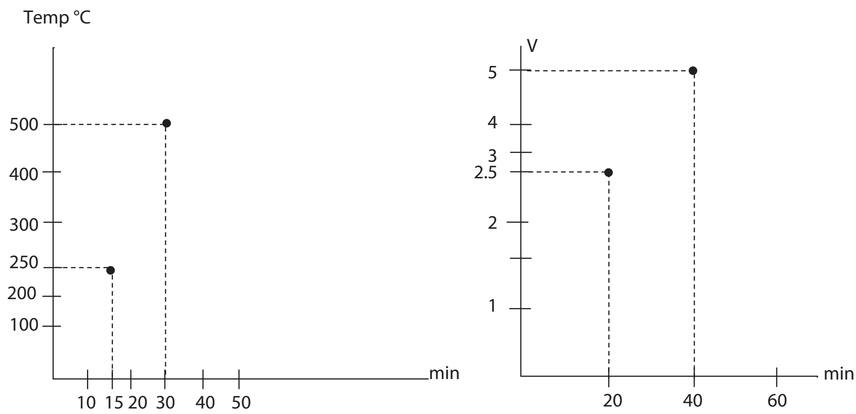
En lo que concierne al punto 4, solo un estudiante determino que la pendiente era 0, los demás dieron conceptos errados y la gran mayoría no contestó nada. Las preguntas 5 y 6 son muy similares, 25 estudiantes usaron la línea recta para representar el suceso, como lo evidencia la Figura 21. Se ubicaron los puntos de manera adecuada, mantuvieron la escala para cada eje y el estudiante restante solo ubico los puntos en el plano cartesiano (Figura 22).

Figura 19. Uso de la línea recta como forma de representación



Fuente: elaboración propia.

Figura 20. Inadecuada forma de representar una línea recta



Fuente: elaboración propia.

En el punto 7, 3 estudiantes tuvieron aciertos y solo uno de ellos hallo la pendiente, la variable dependiente y la independiente de manera adecuada, los otros dos hallaron las dos variables, mientras que los 23 estudiantes restantes dieron ideas inadecuadas. Partiendo de las coordenadas de puntos dados en el punto 8, 21 estudiantes presentaron conocimientos y habilidades en reconocer la abscisa, la ordenada de cada punto y la ubicación del mismo en el plano cartesiano. Por otro lado, 5 estudiantes presentaron inconvenientes con la ubicación de ellos, no tuvieron en cuenta los signos y 3 de ellos confundieron las coordenadas de los mismos, tomaron la y como abscisa y la x como la ordenada.

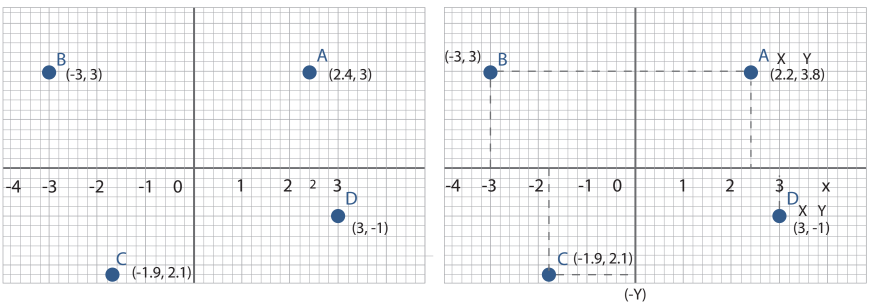
Tabla 3. Correcta apreciación de las variables (izquierda), inadecuada solución (derecha)

Ubicar cada punto en el plano con sus respectivo nombre y coordenadas					
Punto	**Distancia del punto al origen sobre el eje x**	**Distancia del punto al origen sobre el eje y**	**Punto**	**Distancia del punto al origen sobre el eje x**	**Distancia del punto al origen sobre el eje y**
A(4,3)	4	3	A(4, 3)	4	3
B(-5,2)	-5	3	B(-5, 3)	5	3
C(4,-2)	4	-2	C(4, -2)	4	2
D(-3,-5)	-3	-5	D(-3, -5)	3	5
E(1, 5, 2, 5)	1,5	2,5	E(1.5, 2.5)	1.5	2.5
F(-1.5, -2,5	-1,5	-2,5	F(-1.5, -2.5)	1.5	2.5

Fuente: elaboración propia.

Con el objetivo de explorar las habilidades de realizar las operaciones inversas, en el apartado 9, partiendo de puntos ubicados en el plano, 20 estudiantes realizaron la actividad de forma satisfactoria; mientras que los restantes 6 alumnos presentaron inconvenientes, sobre todo con puntos cuyas coordenadas no eran números enteros.

Tabla 4. Puntos con sus correctas coordenadas (izquierda), coordenadas erróneas (derecha)



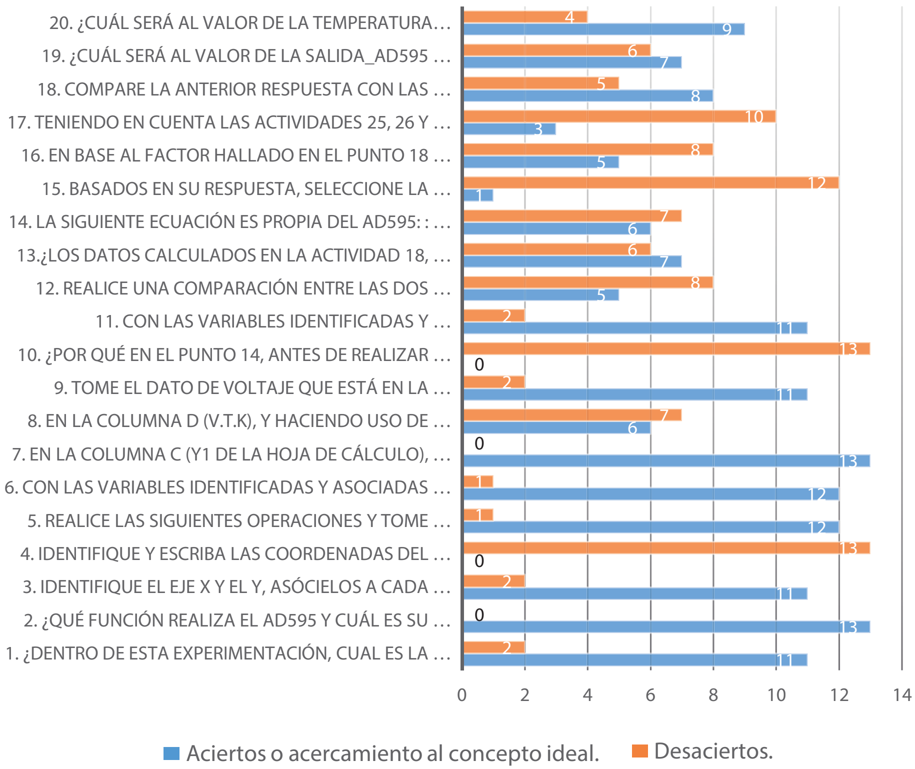
Fuente: elaboración propia.

En el punto 10, haciendo uso de la ecuación de una línea recta (-2x+3y=1), se debía despejar y darla de la forma y=mx+b, solo 8 estudiantes realizaron la operación correcta, los demás, 18, presentaron dificultades en realizar los despejes o no identificaron la pendiente m y el punto de corte con el eje y.

4.1.3. Resultados de la primera etapa didáctica

Con los 26 estudiantes se realizaron grupos de 2 personas para un total de 13 grupos, ellos participaron en esta primera etapa didáctica (toma de datos de temperatura y voltaje), sus resultados se evidencian en la Figura 25.

Figura 21. Resultados de la primera experiencia didáctica (temperatura vs. voltaje)



Fuente: elaboración propia.

En la primera pregunta, 11 grupos contestaron de forma satisfactoria, identificando el termopar como un dispositivo transductor que transforma la energía calorífica en eléctrica, los otros grupos mostraron ideas inadecuadas. En lo que corresponde a la función del AD595, los 13 grupos lo identificaron como el amplificador de instrumentación, cuya función principal es la amplificación de los datos entregados por el termopar, además de la compensación que se hace por las uniones de materiales (pregunta 2). Este dispositivo había sido utilizado en otras actividades por parte del mismo grupo de estudiantes.

En el tercer punto es posible observar que 11 grupos tuvieron un acierto, identificaron el eje x y lo asociaron a la variable temperatura y, de igual manera asociaron el eje y con la variable voltaje, los grupos restantes no concluyeron nada. En el punto 4, la función es afín porque para 0 ° centígrado existen 2,72 mv, los 13 grupos asumieron que las coordenadas o el corte con el eje y era (0,0), dado que a simple vista la recta pasa por ese punto (solo tuvieron en cuenta la representación gráfica, dejando a una lado la algebraica). Además, presentaron conceptos erróneos como el lugar donde la recta comienza su ascenso.

En lo relacionado al punto 5, 12 grupos realizaron la operación de manera correcta y concluyeron que los datos eran iguales, pero no asumieron que esta constante corresponde a la pendiente de la presente recta, el otro grupo no realizó de forma satisfactoria el presente ítem. En el punto 6, luego de identificar la función de la recta dada por GeoGebra (modelización del proceso, y=mx+b) y compararla con el dato hallado en el punto anterior (0,01 que corresponde a la pendiente de la recta), 12 grupos encontraron la similitud del dato con el de la función. Aunque esto representó una tarea muy sencilla, se les dificultó identificar que ese dato corresponde a la pendiente de la función.

Como se puede evidenciar en el punto 7, los 13 grupos realizaron la actividad de remplazar los datos de temperatura (x) de forma adecuada, el objetivo era sustituir estos datos tomados con el smartphone en la función dada por GeoGebra y encontrar los valores de la variable dependiente. Por otro lado, con el objetivo de que los estudiantes analizaran la función que realiza el AD595, en el punto 8, haciendo uso de las tablas reales del termopar, 6 grupos argumentaron después de hacer la comparación de las columnas que en esta nueva columna sus datos son más pequeños debido a que no están amplificados. Los 7 grupos restantes concluyeron solo en decir que los datos eran más pequeños o que no había similitud con otra columna.

Con el fin de que los estudiantes encontraran el valor de la pendiente (temperatura vs. v.t.k.), en el punto 9, 11 grupos tuvieron aciertos pero a la pendiente la llaman constante, ellos tienen dificultades en identificar la pendiente de la función por su nombre, mientras que los otros 2 grupos tomaron los datos de las columnas equivocadas. En la pregunta del punto 10 ningún grupo argumento que para hallar la pendiente, cuando la función es lineal, solo es necesario tomar las coordenadas de un punto, dado que la línea recta pasa por el punto (0,0).

Los estudiantes no identifican la pendiente de la función, siempre la denominan como una constante. En el punto 11, haciendo uso de GeoGebra (modelización del proceso), 11 grupos identificaron la función (temperatura vs. v.t.k.), la compararon con el dato de pendiente hallado en el punto 9 y a ese dato lo reconocieron solo como una constante.

En el punto 12 se realizó una comparación de las dos rectas, la primera es con el uso del AD595 (datos del termopar amplificados), la segunda con los datos de la tabla real del termopar (datos del termopar sin amplificar). En este punto solo 5 grupos definieron que las dos rectas son diferentes, dado que una representa los datos del termopar amplificados, mientras la otra indica los datos de temperatura sin amplificar. Los 8 grupos restantes dieron ideas inadecuadas y asumieron que las dos rectas eran iguales o tenían mucha similitud.

Los estudiantes no asumen el nombre real para la pendiente, siempre la toman como una constante porque la pendiente es, en efecto, una constante. 7 grupos la asumieron como tal, mientras que los 6 grupos restantes dieron conceptos erróneos, por ejemplo, que es el inicio de la recta (esta actividad corresponde al punto 13).

El punto 14 representa la ecuación propia de AD595, los estudiantes tenían que realzar el despeje y seleccionar la respuesta correcta de la forma y=mx+b (salida_ AD595= 247,3*Voltaje_Termopar+2,72(mv)), solo 6 grupos escogieron bien, los demás seleccionaron de forma equivocada. Con la ecuación del AD595 en su forma y=mx+b, en el punto 15 los estudiantes tenían que identificar la variable dependiente, la variable independiente y el punto de corte con el eje y; no obstante, solo un grupo seleccionó la respuesta correcta: Variable independiente=Voltaje_ Termopar, dependiente= salida_ AD595, punto de corte= 2,72 mv.

El amplificador de instrumentación amplifica los datos del termopar por 247,3, el dato de pendiente y correspondiente a la ecuación de la recta de temperatura vs. v.t.k. al ser multiplicado por 247,3, representa la pendiente de la ecuación del AD595 ≈ 0,01. En el punto 16 los estudiantes debían hallarlo y compararlo con la pendiente de la ecuación del amplificador, 5 grupos presentaron aciertos, mientras que los otros 8 grupos expresaron ideas erróneas y no realizaron las operaciones de aproximación ni redondeo de manera correcta.

Remplazando el Voltaje_Termopar=0,00004*Temperatura, donde el 0,00004 representa la pendiente de la recta de temperatura vs. v.t.k. (punto 9), la ecuación queda de la siguiente manera: salida_ AD595= 0,01*Temperatura+2,72, esto corresponde al punto 17, donde solo 3 grupos seleccionaron la respuesta correcta.

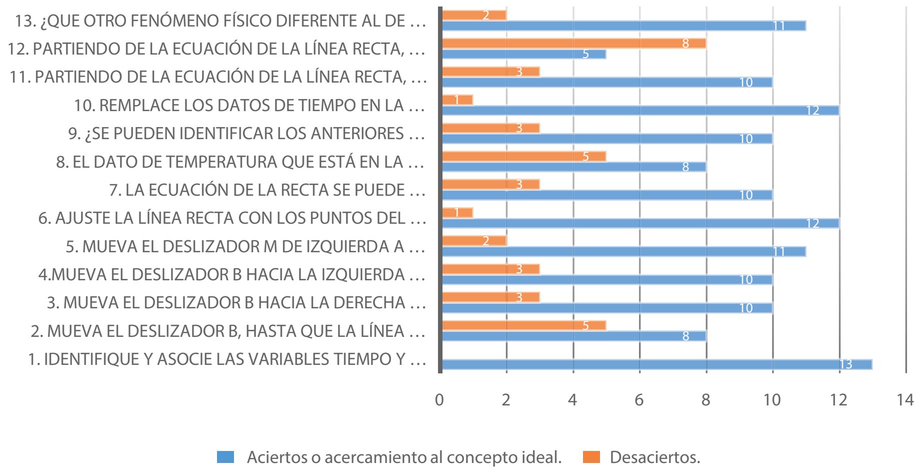
Por otro lado, en el punto 18 tenían que hacer la comparación del resultado anterior con las dos líneas de GeoGebra y concluir con cual tenía semejanza, 8 grupos contestaron que con la recta L1, los otros 5 grupos asumieron de forma errónea que con la recta L2.

Haciendo uso de la ecuación hallada en el punto 17 se busca encontrar el valor de la salida_AD595 para una temperatura de 200 °C, lo que corresponde al punto 19. 7 grupos hallaron de forma satisfactoria la respuesta: 2,0072 v, los demás emplearon la operación inadecuadamente, por ello el resultado fue erróneo. Para el punto 20 se utilizó la ecuación anterior, pero esta vez con el fin de calcular la temperatura para 3 voltios, cuyo resultado son 300 °C, 9 grupos presentaron la respuesta de manera correcta.

4.1.4. Resultados de la segunda etapa didáctica

En esta segunda experiencia (toma de datos de tiempo y temperatura) participaron los mismos 26 estudiantes, de igual forma se organizaron en grupos de 2 para un total de 13 grupos. En la Figura 26 se encuentran plasmados los resultados de la actividad.

Figura 22. Resultados de la segunda experiencia didáctica (tiempo vs. temperatura)



Fuente: elaboración propia.

Los 13 grupos identificaron y asociaron el eje *x* con la variable independiente tiempo, de igual manera al eje *y* con la variable dependiente temperatura (punto 1). En el punto 2, 8 grupos ubicaron e hicieron pasar la recta por el punto (0,0), también asumieron que para una x=0 existe una y=0, los demás grupos concluyeron que el hecho de que la recta pase por ese punto significa que es el comienzo de la misma.

Con el fin de que los estudiantes comprendieran qué representa el punto de corte de la recta con el eje *y*, en el punto 3 debían mover el deslizador hacia la derecha, reconocer la ecuación de la misma e identificar tanto en el deslizador como en la ecuación el punto de corte *b*. 10 grupos realizaron la actividad de manera satisfactoria y reconocieron la *b* como el punto donde en un tiempo de 0 segundos existe un valor diferente de temperatura mayor a 0.

Similar al punto anterior, en el punto 4, 10 grupos realizaron la actividad correctamente, ubicaron la recta por puntos que estaban debajo del origen (0,0) y asumieron que para tiempos de 0 segundos existían temperaturas por debajo de los 0° centígrados, los demás grupos concluyeron diciendo que la recta disminuía.

En el punto 5, 11 grupos reconocieron que la recta se inclinaba a medida que se iba moviendo el deslizador *m*, asumieron que la constante que acompañaba la variable independiente *x* es la pendiente de la recta, los grupos restantes solo se limitaron a tomar nota de diferentes ecuaciones de la recta.

Partiendo de la experiencia didáctica de la toma de datos de tiempo vs. temperatura y después de ubicar estos puntos en el plano, se debían ajustar los deslizadores, con esto hacer coincidir la recta con los presentes puntos. 12 grupos concluyeron de manera efectiva afirmando que los procesos tienen un comportamiento lineal, que para un tiempo de 0 segundos existe una temperatura aproximada a la temperatura ambiente, el grupo faltante no realizó el ajuste (punto 6).

Posterior al ajuste manual del proceso (tiempo vs. temperatura), como se puede evidenciar en el punto 7, 10 grupos reconocieron que mediante la función afín (y=mx+b) se puede modelizar este fenómeno e identificaron con propiedad la pendiente *m* y el punto de corte con el eje *y* (*b*), los otros 3 grupos presentaron datos erróneos.

En el punto 8, partiendo de la hoja de cálculo de GeoGebra (tiempo vs. temperatura), los estudiantes debían calcular la pendiente de la función afín, 8 grupos realizaron de manera exitosa la actividad, reconocieron que esta constante representa la pendiente. A pesar de que hallaron bien los datos, los otros 5 grupos no identificaron que se trataba de la pendiente.

Además de reconocer que el dato calculado en el punto anterior corresponde a la pendiente, 10 grupos (punto 9) realizaron la comparación con la función afín (y=mx+b), ellos concluyeron que esta representa la *m* (pendiente). Por otro lado, algunos grupos siguen con problemas al momento de identificarla, a pesar de que saben que es una constante no la llaman por su nombre real, de hecho se esperaba que basados en este punto corrigieran el punto anterior después de realizar la comparación de los datos con la función de GeoGebra. Respecto al punto 10, solo un grupo no realizó la actividad de forma correcta, los demás encontraron la similitud de la nueva columna con la de temperatura de la hoja de cálculo (GeoGebra).

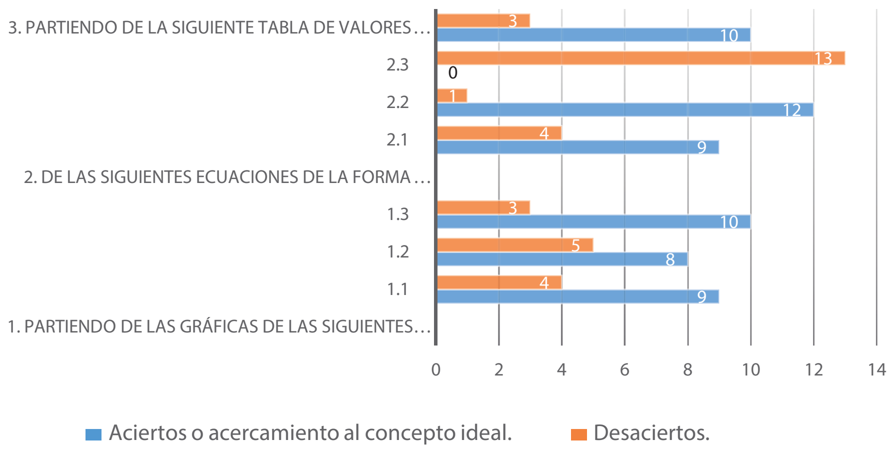
Haciendo uso de la función afín (tiempo vs. temperatura) en el punto 11 se buscaba que los estudiantes encontraran datos futuros de temperatura para diferentes tiempos, 10 grupos realizaron la actividad sin ningún inconveniente; mientras que los otros 3 grupos presentaron dificultades, en especial con las unidades y las aproximaciones.

A pesar de que el punto 12 es muy similar al anterior, su diferencia está en que es necesario calcular datos futuros de tiempo partiendo de datos de temperatura (contrario al anterior). Solo 5 grupos realizaron el despeje de la variable independiente (tiempo) de forma correcta y calcularon efectivamente los datos, el resto de grupos tuvieron dificultad en el despeje de la ecuación. Como última actividad de la segunda experiencia didáctica, los estudiantes debían exponer otros fenómenos que se puedan modelizar haciendo uso de la función lineal y afín, 11 grupos definieron algunos, como los fenómenos donde existen fuerzas, las presiones y los caudales constantes.

4.1.5. Resultados del postest

Los presentes resultados evidencian un cambio conceptual comparado con el pretest de conocimientos previos matemáticos (pendiente, punto de corte con el eje *y*, variable dependiente e independiente, diversas formas de representación de la línea recta, etc.). Como en las anteriores actividades, se formaron 13 grupos con los 26 estudiantes que venían trabajando activamente.

Figura 23. Resultados del postest



Fuente: elaboración propia.

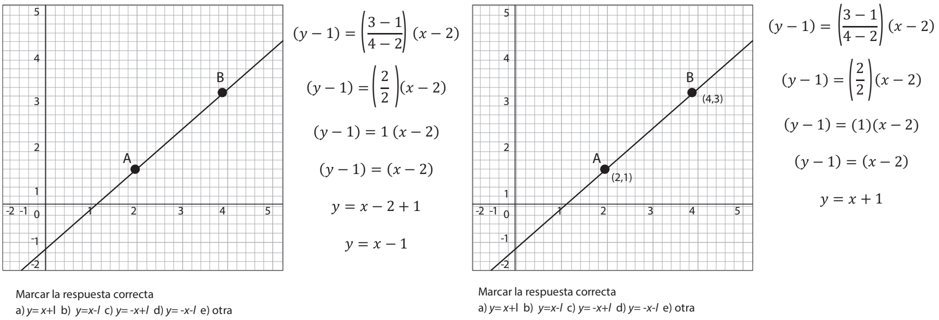
En el presente postest se realizaron 3 actividades, la primera consistió en que, partiendo de la línea recta, solo con los puntos ubicados pero sin sus coordenadas, se debía hallar la ecuación de la misma, esto corresponde a los puntos 1.1, 1.2 y 1.3. En la segunda actividad debían desarrollar la operación inversa y dada la ecuación realizar la representación gráfica, esto corresponde a los puntos 2.1, 2.2 y 2.3. En el tercer punto había una tabla de valores, era necesario hallar la ecuación y realizar la gráfica.

Resultados del punto 1

1. Punto 1.1: la solución es y= x-1.

   9 grupos seleccionaron la respuesta correcta, los grupos restantes presentaron dificultad con los signos.

Figura 24. Solución correcta (izquierda), solución incorrecta (derecha)

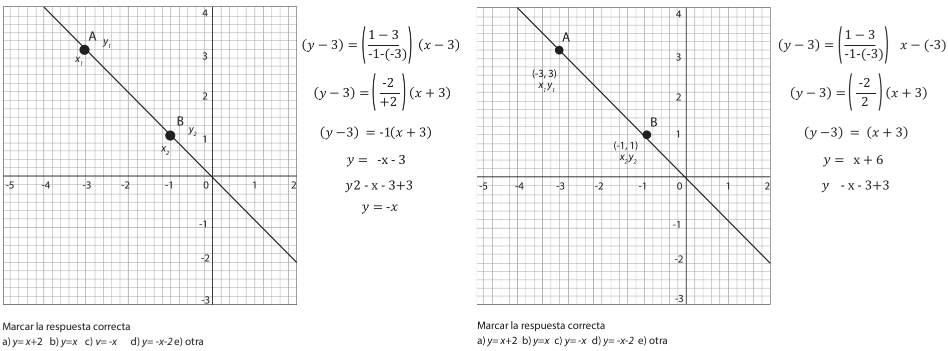


Fuente: elaboración propia.

2. Punto 1.2: la solución es y= -x.

   8 grupos seleccionaron la respuesta correcta, los 5 grupos restantes presentaron dificultad porque en el denominador debían hacer la resta de números negativos, esto les generó confusión.

Figura 25. Solución correcta (izquierda), solución incorrecta (derecha)

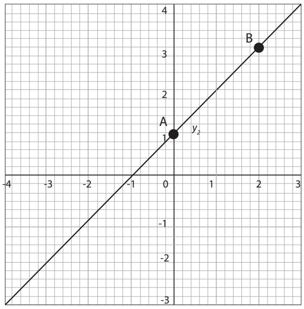


Fuente: elaboración propia.

3. Punto 1.3: la solución es y= x+1.

   10 grupos seleccionaron la respuesta correcta, mientras que en los grupos restantes se evidenciaron problemas al despejar la ecuación.

Figura 26. Solución correcta (izquierda), solución incorrecta (derecha)



$(y-1)(3-1)(x-1)$

$(y-1)\left(\frac{3-1}{2-0}\right)(x-0)$

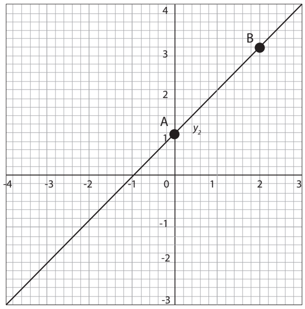
$y-1=\left(\frac{2}{2}\right)(x-0)$

$y-1=(x-0)$

$y=x+1$

Marcar la respuesta correcta

a) $y=x+3$ b) $y=x+1$ c) $y=-x-1$ d) $y=-x-3$ e) otra



$(y-1)=\left(\frac{3-1}{2-0}\right)(x-0)$

$y-1=\left(\frac{2}{2}\right)(x-0)$

$y-1=(x-0)$

$y=x-0+1$

$y=x-1$

Marcar la respuesta correcta

a) $y=x+2$ b) $y=x$ c) $y=-x$ d) $y=-x-2$ e) otra

Fuente: elaboración propia.

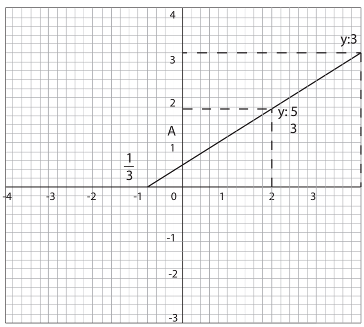
Resultados del punto 2

1. Punto 2.1: la ecuación de la forma y=mx+b es y= (2/3) x+1/3, su pendiente es 2/3, el punto de corte con el eje y es 1/3.

   9 grupos seleccionaron la respuesta correcta, los grupos restantes presentaron dificultades, hallaron ecuaciones como: y= (2/3) x+1.

Figura 27. Solución correcta (izquierda), solución incorrecta (derecha)

Educación de la forma ±Ax ±By= ±C	Ecuación de la forma y= ±mx ±b	Pendiente	Punto de corte con el eje y	Ecuación de la forma ±Ax ± By = ±C	Ecuación de la forma y= ±mx ±b	Pendiente	Punto de corte con el eje y
Recta (A, B) -2x+3y=1	3y=2x + 1 y= $\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	Recta (A, B) -2x+3y=1	y= $\frac{2}{3}$ x + 1	$\frac{2}{3}$	1



Marcar la respuesta correcta

a) $y=x+3$ b) $y=x+1$ c) $y=-x-1$ d) $y=-x-3$ e) otra

$y=\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)$

$y=\left(\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)$

$y=\left(\frac{12+3}{9}\right)$

$y=\left(\frac{25}{9}\right)$

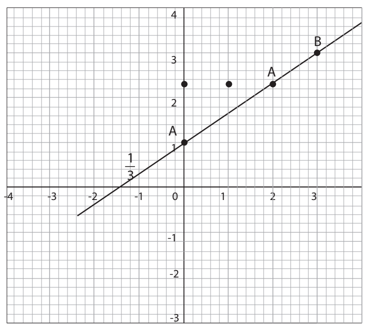
$y=\left(\frac{5}{3}\right)$

$y=\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{}\right)$

$y=\left(\frac{24+3}{9}\right)$

$y=\left(\frac{27}{9}\right)$

$y=3$



Marcar la respuesta correcta

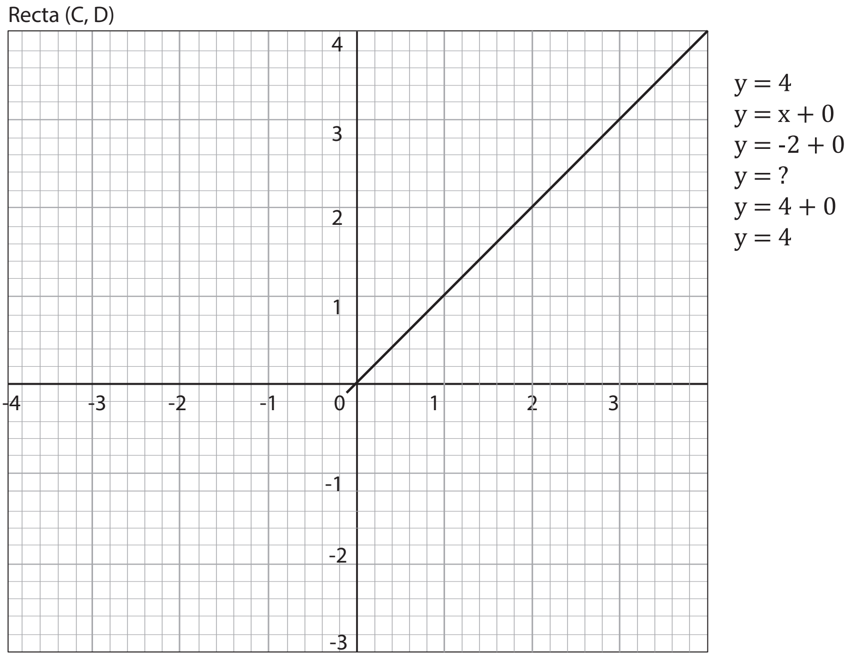
a) $y=x+2$ b) $y=x$ c) $y=-x$ d) $y=-x-2$ e) otra

Fuente: elaboración propia.

2. Punto 2.2: la ecuación de la forma y=mx+b es y= x, cuya pendiente es 1 y pasa por el origen (0,0), 12 grupos seleccionaron la respuesta correcta, el grupo faltante no realizó la actividad.

Figura 28. Solución correcta, recta y=x

Educación de la forma ±Ax ±By= ±C	Ecuación de la forma y= ±mx ±b	Pendiente	Punto de corte con el eje y
Recta (C, D) -x+y=0	y= x + 0	1	0

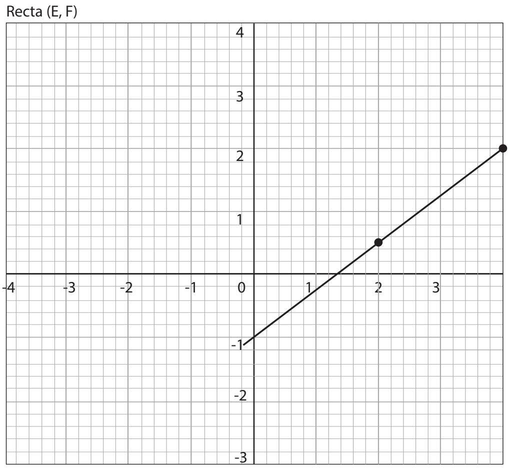


Fuente: elaboración propia.

3. Punto 2.3: la ecuación de la forma y=mx+b es y= -(3/4) x+1, cuya pendiente es -(3/4), el punto de corte con el eje y es 1, los 13 grupos presentaron dificultades al momento de despejar la ecuación.

Figura 29. Solución incorrecta

Educación de la forma ±Ax ±By= ±C	Ecuación de la forma y= ±mx ±b	Pendiente	Punto de corte con el eje y
Recta (E, F) -3x-4y= -4	y=7-4	-3	-4



$y = \frac{3}{4}\ x - 3$

$y = \frac{3}{4}\ (2) - 1$

$y = \frac{6}{4}\ - 1$

$y = \frac{-4 + 6}{4}$

$y = \frac{2}{4}$

$y = \frac{1}{2}$

$y = \frac{3}{4}\ (4) - 1$

$y = \frac{12}{4}\ -3$

$y = \frac{-4 + 12}{4}$

$y = \frac{-4 + 12}{4}$

$y = \frac{8}{4}$

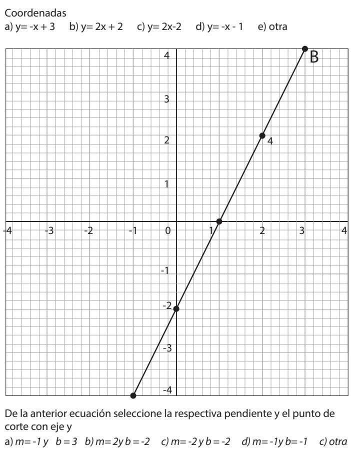
$y = \frac{4}{2}$

$y = \frac{2}{3}$

Fuente: elaboración propia.

Partiendo de una tabla de valores, en el punto 3 los estudiantes debían encontrar la ecuación de la recta y la representación gráfica, respecto a este punto 10 grupos hallaron de forma correcta la ecuación (y= 2x-2), su respectiva gráfica, la pendiente y el punto de corte con el eje y (m= 2 y b= -2).

Figura 30. Solución correcta (izquierda), solución incorrecta (derecha)



A (2, 2)
B (3, 4)

$(y - y1) - \left(\frac{y1 - x1}{x2 - x1}\right)(x - x1)$

$(y - 2) - \left(\frac{4 - 2}{3 - 2}\right)(x - 2)$

$\frac{2}{3}\ (x-3)$

$(y-4)\ \ (x - 2)$

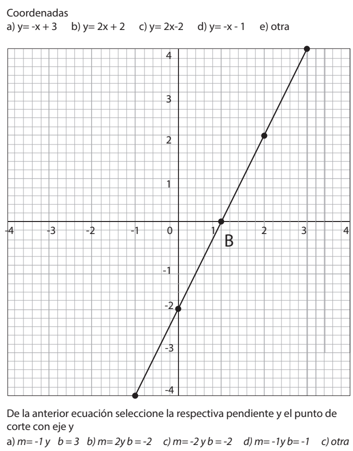
$y - 2 = 2x - 4$
$y = x - 3$
$9 = 2x - 4 + 2$
$y = 2x - 2$

$x-2 = 2x - 4$
$x = 2x - 4 + 2$
$x = 2\,x - 2$

$y- (-28) = \frac{-2\ -\ 0}{0\ -\ 1}\ (x - 0)$

$y = \frac{-2}{-1}\ x + 2$

$y = -2x + 2$



Postest. Análisis tabular

Fuente: elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

Debido a las dificultades encontradas en estudiantes, especialmente del programa Técnico Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales (cuarto semestre), surgió la necesidad de resolverlas. En el presente proceso de investigación se diseñaron una serie de actividades enmarcadas en una didáctica para la enseñanza de los conceptos de función lineal y afín, como parte de las matemáticas, las ciencias y, para este caso, la física. Como lo es el fenómeno de transformación de la energía (energía calorífica en eléctrica), al igual que algunos procesos industriales propios del sector cerámico, por ejemplo, el control de temperatura, variable que se encuentra presente en muchos procesos del sector industrial.

Las actividades fueron dividas en varios ítems, la primera consistió en el pretest de ideas previas sobre la transformación de la energía (6 puntos) y los conocimientos previos matemáticos (10 puntos). Su finalidad fue explorar las ideas previas y los conocimientos iniciales que los estudiantes tienen y, partiendo de esto, lograr que los estudiantes alcancen un cambio conceptual, es decir, que puedan conceptualizar y comprender a lo largo de las actividades los conocimientos en física. Además de verificar cómo haciendo uso de las matemáticas se puede llegar a un modelo explicativo del fenómeno.

En los resultados alusivos al fenómeno físico (Figura 19) los estudiantes mostraron tener ciertos conocimientos sobre lo indagado, en gran parte, esto puede ser porque la población partícipe ha venido trabajando en procesos donde se encuentran inmersos algunos conceptos físicos, al igual que dispositivos que permiten medir las variables (temperatura como variable principal) involucradas en los mismos. El diseño de estas actividades se basó en situaciones de contexto, lo cual generó mayor interés en los estudiantes.

En lo concerniente al pretest de conocimientos previos matemáticos (función lineal y afín) y basados en los resultados, como se evidencia en la Figura 20, se muestran las falencias y las habilidades que los estudiantes del programa técnico tienen en el campo de las matemáticas. Para nuestro caso en el objeto matemático de la línea recta (pendiente, variables dependiente e independiente y sus registros de representación). En casos particulares, como el punto 4, donde partiendo de una situación en contexto en la cual se daban los datos iniciales de la variable dependiente e independiente, se debía encontrar el valor de la pendiente, de los 26 estudiantes solo uno la pudo hallar. Vale destacar que otro de los inconvenientes encontrados se da al momento de realizar despejes en las ecuaciones.

La primera experiencia didáctica, cuyos resultados se muestran en la Figura 25, se enmarcó dentro de una metodología (Cuvima) donde se hace uso de dispositivos tecnológicos y electrónicos que permiten alcanzar una interpretación deductiva e inductiva del fenómeno físico y llegar a una modelización del mismo.

El marco de análisis en la física, correspondiente al punto 1 y 2 de la Figura 25 (puntos 6 y 7 del anexo 7), arrojaron resultados favorables debido a que los estudiantes habían tenido la oportunidad de utilizar estos dispositivos en el control y la visualización de la temperatura, en otras experiencias. Con el uso del dispositivo tecnológico (smartphone o computador) y la ayuda de GeoGebra, se llegó a un modelo del proceso, partiendo de esto se realizó el análisis conceptual en matemáticas. En el punto 7 del anexo 7 se debía reconocer que la función es afín, ya que los datos están amplificados, pero esto no fue reconocido por ningún estudiante, además se les dificultó encontrar la diferencia que existe en el cálculo de la pendiente cuando una función es afín o lineal.

En ciertos puntos donde se les indagó sobre la ecuación de la forma $y=mx+b$, en algunos casos debían calcular la pendiente, unos grupos argumentaron que la pendiente era una variable o el inicio de la recta; otros la asumieron como una constante pero no la reconocieron con su nombre real.

En el inciso 2.1.1. se realizó una descripción del programa donde los estudiantes de programas de articulación han mostrado a lo largo de su formación ciertas habilidades y destrezas en el manejo de dispositivos y artefactos propios del sector industrial. No obstante, han evidenciado demasiadas falencias al momento de enfrentarse a los objetos matemáticos (despeje de ecuaciones, manejo de signos, factorización, etc.). Como se puede apreciar en los resultados de esta investigación, uno de los causantes de esto puede encontrarse asociado al hecho de que su orientación se enfoque a módulos, no asignaturas.

De igual forma que la segunda actividad (primera experiencia didáctica) nos encontramos con la tercera actividad (segunda experiencia didáctica), que siguió la misma metodología ajustada a la didáctica (Cuevas y Pluvinage, 2009) y el uso de los mismos dispositivos tecnológicos que permitieron modelizar una situación de contexto; lo anterior, con el fin de reforzar y mejorar los procesos de aprendizaje alusivos a la física y las matemáticas. La presente secuencia didáctica parte de la experimentación en el aula, desde ella los estudiantes son participes en la construcción de sus conocimientos de manera activa, a diferencia de la enseñanza tradicional.

En la segunda experiencia, con la metodología y la didáctica planteada, los estudiantes demostraron una mejor interpretación de los conceptos tratados, como se puede apreciar en la Figura 26. La presente actividad involucró las variables de tiempo, temperatura, junto con las condiciones ambientales, gracias a ello se observó en el modelo del fenómeno físico (GeoGebra) que la función afín es representativa del mismo. Esto conllevo a una interpretación más clara por parte de los estudiantes, a diferencia de la anterior actividad (variables: temperatura y voltaje) donde a pesar de que también es afín, a simple vista no se pudo apreciar el punto de corte con el eje y, dado a que sus unidades están en el orden de los milivoltios (2,72 mv).

Además de lo anterior, como lo muestran los resultados del punto 7 (Figura 26), donde partiendo de la modelización con la colaboración del GeoGebra, 10 grupos identificaron con propiedad la pendiente y el punto de corte con el eje y, reconociendo la función afín como el modelo del fenómeno físico. En los puntos siguientes donde se debía calcular la pendiente partiendo de la tabla de datos, 8 grupos hallaron sin ningún inconveniente la pendiente y la identificaron dentro de la función dada por GeoGebra.

Con el fin de encontrar datos futuros partiendo de la ecuación, los estudiantes presentaron dificultades al momento de despejar la variable independiente, al terminar esta actividad los estudiantes destacaron otros procesos que también se pueden modelizar con la función lineal y afín. El desarrollo de las actividades ha servido para dar respuestas a las preguntas de investigación:

- ¿Cómo promover la comprensión de conceptos físicos y matemáticos en electrónica, con estudiantes de la Técnica Profesional en Instrumentación y Control de Procesos Industriales?
- ¿Cómo incorporar el uso de las NTIC dentro del aula como herramientas mediadoras del conocimiento?

La última actividad fue el postest, donde se evidenció un avance notorio (Figura 27) en la interpretación y la articulación entre diversos registros de representación de la función lineal y afín. A pesar de alcanzar un cambio conceptual satisfactorio los estudiantes siguieron presentando dificultad en el manejo y el despeje de ecuaciones (Figura 33).

Promover la comprensión conceptual requiere un trabajo dedicado por parte de los estudiantes y los docentes para alcanzar un cambio conceptual. Las actividades didácticas que proponen el uso de distintas representaciones sobre un concepto, son un medio para confrontar a los estudiantes con sus ideas previas, siendo estas, a su vez, modificadas a través de secuencias didácticas que incluyen la modelización matemática.

Con la presente secuencia didáctica se buscó apartar al estudiante de una enseñanza tradicional, dado que se limitaban a repetir algoritmos y usar un aprendizaje memorístico, para esto se adicionó el uso de herramientas donde ellos puedan inmiscuirse en la construcción e interiorización de los conceptos, centrándolos como principales ejes de los procesos educativos. El empleo de tecnologías cercanas a los estudiantes, además de generar interés y motivación, sirvió como agente mediador en busca de alcanzar y reforzar los conocimientos.

6. REFERENCIAS

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, N. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *17*, 52-61.

Álvarez, E. (2007). *Medición de temperatura.* http://www.aadeca.org/pdf/apuntes_cursos/2007_temperatura/termocuppt01.pdf.

Analog Devices (1999). *Monolithic Thermocouple Amplifiers with Cold Junction Compensation (AD594/AD595).* http://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/pdf/48077/AD/AD595.html.

Arduino. (2018). *Página web.* https://www.arduino.cc/

Aristizábal, D. y Muñoz, T. (2011). *Implementación de las NTIC's en los laboratorios de ciencias naturales mediante el uso de la plataforma arduino-physicssensor: experiencia en la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.* http://medellin.unal.edu.co/~ludifisica/images/docs/introduccion.pdf.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*, 1-10.

Barajas, C., Fulano, B., Ríos, W. y Salazar, L. (2016). *Función constante, lineal y afín* [Tesis de maestría]. Universidad de los Andes.

Bloom, H. (2006). "Prefacio". En Parra, N., Obras completas & algo + (pp. XXVII-XXVIII). Edición supervisada por el autor asesorada y establecida por Niall Binns al cuidado de Ignacio Echeverría. Prefacio de Harold Bloom. Prólogo de Federico Schopf. Barcelona: Galaxia Gutenberg.

Blum, W. (2002). icmi Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics*, *51*(1-2), 149-171.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Carbajal, A. (2013). *Una Propuesta de enseñanza de lugar geométrico, el caso de la línea recta* [Tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Carvajal, M. (2009). Fundación académica de dibujo profesional: la didáctica en la educación. *Revista Investigación Educativa*, *2*(1), 10-4.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Montevideo: Aiqué.

Comenius, J. (1986). *Didáctica magna (Vol. 133)*. Akal.

Confrey, J. y Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. En *Modelling and applications in Mathematics Education* (pp. 57-68). Springer.

Creus, A. (1997). *Instrumentación industrial.* Marcombo S.A.

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action pratique, elements d'une ingenierie d enseignement des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *8*, 273-293.

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y tecnología. *El c*álculo *y su enseñanza*, *1*(1), 45-59.

Cuevas, C., Villamizar, F. y Martínez, A. (2017). Actividades didácticas para el tono como cualidad del sonido en cursos de física del nivel básico, mediadas por la tecnología digital *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *35*(3), 129-150.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid

De Faria, E. (2006). Transposición didáctica: definición, epistemología, objeto de estudio. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (2).

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Portr, A. Wlkins, y W. Walins (eds), *Resources for Teaching Linear Algebra,* (pp. 85-106), maa Notes.

Duval, R. (1998a). Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciances Cognitives*, 235-253.

Duval, R. (1998b). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (trad.), *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173-201). Iberoamérica.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* [tesis de doctorado]. Universidad del Valle.

Editronikx (2014). *Control domótico con ethernet hiel y Arduino desde internet* [archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ISwLluQWrgc.

El profe García (2015). *Conexión por Internet del Arduino (Shield Ethernet) Como se hace* [archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=MuNi8edyQVwyt=4s.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 85-116.

Geekbot Electronics. (s.f.). *Producto termopar tipo K.* http://www.geekbotelectronics.com/producto/termopar-tipo-k

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Coords.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*, (pp. 49-69).

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, *10*(1), 93-111.

Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, *1*(1), 83-115.

Gómez, M. (2014). *La apatía escolar en el adolescente* [tesis doctoral]. Universidad Abierta Interamericana.

Hernández, J. (2009). *Sistema de monitoreo y control de encendido de un horno basado en un control de potencia tipo integral* [tesis de pregrado]. Universidad Tecnológica de la Mixteca.

Hitt, F. (1998). Dificultades en la articulación de diferentes representaciones relativas al concepto de función. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134. cinvestav.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo.* En XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mexico.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-30.

Hierrezuelo, J. y Montero, A. (2006). *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la física y la química.* Fontamara.

Huertas, J. y Castañeda, Y. (2013). Funciones en contexto, una experiencia enriquecida en la modelación y simulación interactiva, *Sistemas & Telemática, 11*(26), 59-80

Iafrancesco, G. (2012). *Aprestamientos e integración social en la infancia*. Coripet.

Iafrancesco, G. (2017). *Modelos pedagógicos, maestría en educación matemática*. Conferencia llevada a cabo en la Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

Icfes. (2013). *Colombia en pisa 2012, principales resultados*. resultadoswww.icfes.gov.co/docman/instituciones-educativas-y-secretarias/evaluaciones-internacionales-investigadores/pisa/pisa-2012/2702-presentacion-principales-resultados-colombia-en-pisa-2012/file%3Fforce-download%3D1+ycd=1yhl=esyct=clnkygl=co.

Janvier, C (1996) Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee, (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers.

Lajara, J. y Pelegri, J. (2007*). LabVIEW, entorno gráfico de programación*. Marcombo.

Lehmann, C. (2008). *Geometría analítica*. Limusa.

Mallart, J. (2001). Capítulo 1. Didáctica: concepto, objeto y finalidad. En F. Sepúlveda, y N. Rajadell*, Didáctica general para psicopedagogos.* Universidad Nacional de Educación a Distancia (uned).

Ministerio de Educación de Colombia (men). (2014). *Lineamientos curriculares: matemáticas. Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Autor. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

Mora, F. y Barrantes, H. (2008). ¿Qué es matemática? Creencias y concepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *3*(4), 71-81.

Posada, B. y Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia y Universidad de Antioquia (Eds.), *Módulo 2: Pensamiento variacional y razonamiento algebraico.* (pp. 127-163). http://www.galileodidacticos.com/sites/default/files/M%C3%93DULO%202%20PENSAMIENTO%20VARIACIONAL.pdf.

Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8 y 9 grados de educación básica.* Universidad Nacional de Colombia. http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf.

Rosas, R. y Balmaceda, C. (2008). *Piaget, Vigotski y Maturana: constructivismo a tres voces*. Montevideo Aique.

Ruiz, J. (2012). *Utilización de LabVIEW para la visualización y control de la plataforma Open Hardware Arduino.* http://bricotronica.com/libros-arduino/170-labview-arduino.html.

Sánchez, D. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: una experiencia de aula* [tesis de maestría]. Universidad Distrital Francisco José.

Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas.

Silva, T., Paludzyszyn, R. y Luiz, T. (2016). Gradiente de temperatura. *Anais do EVINCI-UniBrasil*, *1*(3), 366-366.

Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión del concepto de función. En *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy, maa notes*, *25*, (pp. 25-28).

Sierra, L., Blanco, M., García-Raffi, L. y Gómez, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en educación secundaria obligatoria. En *15ª Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*.

Spivak, M. (2014). *Cálculo infinitesimal*. Reverté.

Universidad de Pamplona. (2016). Contenidos curriculares. En Contreras (ed.), *Técnico Profesional en Instrumentación y Control de procesos industriales*, (pp. 38-48).

Villamizar, F. (2018). *Modelo metodológico para promover conceptos físicos y matemáticos: hacia la orquestación de actividades didácticas con tecnologías digitales* [tesis doctoral]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del i.p.n.

Von Glasersfeld, E. (1981). Introducción al constructivismo radical. En *La realidad inventada ¿Cómo sabemos lo que creemos saber?* (pp. 20-37).

Youschkevitch, A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, *16*(1), 37-85.

Zúñiga, M., A. (2014). *Del saber sabio al saber enseñado: transposición didáctica, un análisis de libros de texto de ciencias III (química) en educación secundaria* [tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

Zúñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos en un curso de cálculo 1* [tesis de maestría]. Universidad Internacional, Cuernavaca.

ANEXOS

Anexo 1. Programación temperatura vs. voltaje

La siguiente programación se debe usar para programar el Arduino, con esto se puede realizar la primera experiencia didáctica:

```
#include <LiquidCrystal.h>
#include <AD595.h>
#include <SPI.h>
#include <Ethernet.h>
LiquidCrystal lcd(9,8,5,4,3,2);
AD595 thermocouple;
byte mac[] = {
0xDE, 0xAD, 0xBE, 0xEF, 0xFE, 0xED };
IPAddress ip(192,168,1,9);
EthernetServer server(80);
long temperatura;
float voltaje;
void setup() {
Ethernet.begin(mac, ip);
Serial.begin(9600);
```

```
        lcd.begin(16,2);
        lcd.print("C= F=");
        lcd.setCursor(0,1);
        lcd.print("K= ");
        thermocouple.init(0);
        //delay(500);
}
        void loop() {
        Serial.print("Temperatura = ");
        Serial.println(long(thermocouple.measure(TEMPC)));
        voltaje=(analogRead(TEMPC)*5L)/1023.0;
        Serial.print("Voltaje = ");
        Serial.println(voltaje);
        lcd.setCursor(2,0);
        lcd.print(long(thermocouple.measure(TEMPC)));
        lcd.setCursor(10,0);
        lcd.print(long(thermocouple.measure(TEMPF)));
        lcd.setCursor(2,1);
        lcd.print(long(thermocouple.measure(TEMPF)));
        delay(3000);
        EthernetClient cliente = server.available(); // Inicializa cliente como servidor
        ethernet
        if (cliente) {
        boolean currentLineIsBlank = true;
        while (cliente.connected()) {
        if (cliente.available()) {
        char c = cliente.read();
        if (c == '\n' yy currentLineIsBlank) {
        cliente.println("HTTP/1.1 200 OK");
        cliente.println("Content-Type: text/html"); // Envía el encabezado en código
        HTML estándar
        cliente.println("Connection: close");
        cliente.println("Refresh: 3"); // refresca la página automáticamente cada 3
        segundos
        cliente.println();
```

```
        cliente.println("<!DOCTYPE HTML>");
        cliente.println("<html>");
        cliente.println("<HEAD>");
        cliente.println("<TITLE>Ethernet Monitor</TITLE>");
        cliente.println("</HEAD>");
        cliente.println("<BODY>");
        cliente.println("<hr />");
        cliente.println("<H1>Monitor de temperatura</H1>");
        cliente.println("<br />");
        cliente.println("<H2>Monitorea A0</H2>");
        cliente.println("<br />");
        cliente.println("Lectura de termocupla Ethernet");
        cliente.println("<br />");
        cliente.println("<br />");
        int puertoAnalogo = 0;
int lecturaSensor =(analogRead(TEMPC)*500L)/1023; // Lee los 6 puertos análogos
de A0 a A5
        cliente.print("Entrada Analoga");
        cliente.print(puertoAnalogo);
        cliente.print(" es ");
        cliente.print(lecturaSensor);
        cliente.println("<br />");
// }
        cliente.println("<br />");
        cliente.println("Ing. Gustavo");
        cliente.println("</html>");
        break;
}
        if (c == '\n') {
        currentLineIsBlank = true;
}
        else if (c != '\r') {
        currentLineIsBlank = false;
}}}
```

```
delay(15); // Da tiempo al Servidor para que reciba los datos 15ms
cliente.stop(); // cierra la conexion
}}
```

Anexo 2. Programación tiempo vs. temperatura

La siguiente programación se debe usar para programar el Arduino, con esto se puede realizar la segunda experiencia didáctica:

```
#include <LiquidCrystal.h>
#include <AD595.h>
#include <SPI.h>
#include <Ethernet.h>
LiquidCrystal lcd(9,8,5,4,3,2);
AD595 thermocouple;
byte mac[] = {
0xDE, 0xAD, 0xBE, 0xEF, 0xFE, 0xED };
IPAddress ip(192,168,1,9);
EthernetServer server(80);
long temperatura;
float voltaje;
void setup() {
Ethernet.begin(mac, ip);
Serial.begin(9600);
lcd.begin(16,2);
lcd.print("C= F=");
lcd.setCursor(0,1);
lcd.print("K= ");
thermocouple.init(0);
//delay(500);
}

void loop() {
Serial.print("Temperatura = ");
Serial.println(long(thermocouple.measure(TEMPC)));
voltaje=(analogRead(TEMPC)*5L)/1023.0;
Serial.print("Voltaje = ");
Serial.println(voltaje);
lcd.setCursor(2,0);
lcd.print(long(thermocouple.measure(TEMPC)));
lcd.setCursor(10,0);
```

```
lcd.print(long(thermocouple.measure(TEMPF)));
lcd.setCursor(2,1);
lcd.print(long(thermocouple.measure(TEMPF)));
delay(3000);
EthernetClient cliente = server.available(); // Inicializa cliente como servidor ethernet
if (cliente) {
boolean currentLineIsBlank = true;
while (cliente.connected()) {
if (cliente.available()) {
char c = cliente.read();
if (c == ‘\n’ yy currentLineIsBlank) {
cliente.println(“HTTP/1.1 200 OK”);
cliente.println(“Content-Type: text/html”); // Envía el encabezado en código HTML estándar
cliente.println(“Connection: close”);
cliente.println(“Refresh: 3”); // refresca la página automáticamente cada 3 segundos
cliente.println();
cliente.println(“<!DOCTYPE HTML>”);
cliente.println(“<html>”);
cliente.println(“<HEAD>”);
cliente.println(“<TITLE>Ethernet Monitor</TITLE>”);
cliente.println(“</HEAD>”);
cliente.println(“<BODY>”);
cliente.println(“<hr />”);
cliente.println(“<H1>Monitor de temperatura</H1>”);
cliente.println(“<br />”);
cliente.println(“<H2>Monitorea A0</H2>”);
cliente.println(“<br />”);
cliente.println(“Lectura de termocupla Ethernet”);
cliente.println(“<br />”);
cliente.println(“<br />”);
int puertoAnalogo = 0;
int lecturaSensor =(analogRead(TEMPC)*500L)/1023; // Lee los 6 puertos análogos de A0 a A5
```

```
        cliente.print("Entrada Analoga");
        cliente.print(puertoAnalogo);
        cliente.print(" es ");
        cliente.print(lecturaSensor);
        cliente.println("<br />");
// }
        cliente.println("<br />");
        cliente.println("Ing. Gustavo");
        cliente.println("</html>");
        break;
}
        if (c == '\n') {
        currentLineIsBlank = true;
}
        else if (c != '\r') {
        currentLineIsBlank = false;
}}}
delay(15); // Da tiempo al servidor para que reciba los datos 15ms
cliente.stop(); // cierra la conexion
}}
```

Anexo 3. Manual de uso del banco de monitoreo y control de temperatura

En el presente anexo se darán los pasos a seguir para el funcionamiento del banco de monitoreo y el control de temperatura para la realización de las experiencias didácticas (Figura 62):

1. Conectar el router por medio del cargador al tomacorriente.
2. Conectar el Arduino, que ya está con el módulo de Ethernet, al computador por medio del cable usb.
3. Conectar el computador que se usará para programar el Arduino a la red lan, esto se puede hacer por cable Ethernet o wifi.
4. Buscar la ip que el router generó para el computador principal (con el que se programará el Arduino), es posible hacerlo de la siguiente manera:
   » Oprimimos la tecla Windows +r.
   » En la ventana que aparece tecleamos cmd y enter.
   » En la ventana dos (ventana de fondo negro), escribimos ipconfig/all, damos enter.
   » Buscar la dirección ipv4 que, por lo general, empieza por 192.
   » Tomar nota de ella, dado que con base a esta se tomará una ipv4 diferente que será incluida en la programación de Arduino (anexo 1, anexo 2), en la parte que dice: IPAddress ip(). Por ejemplo, si la ipv4 encontrada en la pantalla dos fue 192.168,1.5, se deberá usar otra, ya que esta es propia del computador principal, puede ser 192.168.1.15, solo se modifica el último número, con el fin de que no exista conflicto de direcciones. Esta ipv4 se digitará entre los paréntesis de IPAddress ip (192,168, 1,15) (ojo que se cambiaron los puntos por comas).
5. Los estudiantes se conectarán a la red lan (generada por el router del banco), con su respectiva contraseña (dada por el docente), se puede usar un smartphone o un computador con tarjeta wifi.
6. Comenzar a calentar la termocupla.
7. La anterior ipv4 seleccionada será la que los estudiantes digitaran en su navegador (smartphone o pc), para empezar a ver los datos de temperatura no se debe escribir www, ni nada similar, solo la ipv4, pero con punto: 192.168.1.15 y enter.

Anexo 4. Manual de uso del *software* LabVIEW con los dispositivos electrónicos

Este anexo servirá de guía para el uso de LabVIEW y Arduino (actividades complementarias):

1. Conectar el Arduino (no se usará el módulo de Ethernet) que está en el banco de monitoreo de temperatura al computador principal, el cual ya tendrá el *software* LabVIEW con el vi (panel frontal y diagrama de bloques) (Figura 65).
2. El Arduino debe programarse con lifa (interfaz de LabVIEW para Arduino), con el fin de que se pueda usar como tarjeta de adquisición de datos.
3. Se dará run a la máquina virtual (LabView), después en una tabla empezarán a aparecer los datos de temperatura, tiempo, fecha y hora, además de la representación gráfica.
4. Para generar el reporte en Word, se deberá oprimir el botón OK, de inmediato aparecerá el documento (Word) con todas las variables mencionadas antes.

Anexo 5. Manual de GeoGebra

El presente manual busca orientar a los estudiantes en las operaciones básicas que les permitan crear el modelo matemático del proceso físico en las experiencias didácticas.

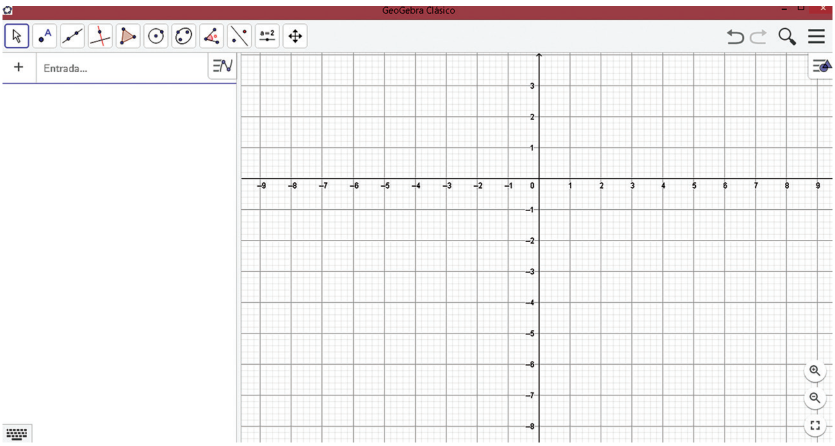
Introducción al uso del GeoGebra para la ubicación de puntos en el plano y el trazo de líneas rectas.

1. En el escritorio del ordenador encontraran el icono de GeoGebra, con doble clic se ejecuta.

Figura 31. Logo de GeoGebra.

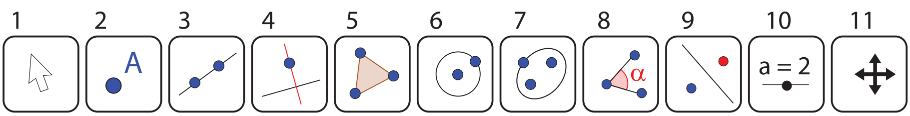
2. A continuación encontraran la ventana principal de trabajo.

Figura 32. Zona de trabajo de GeoGebra



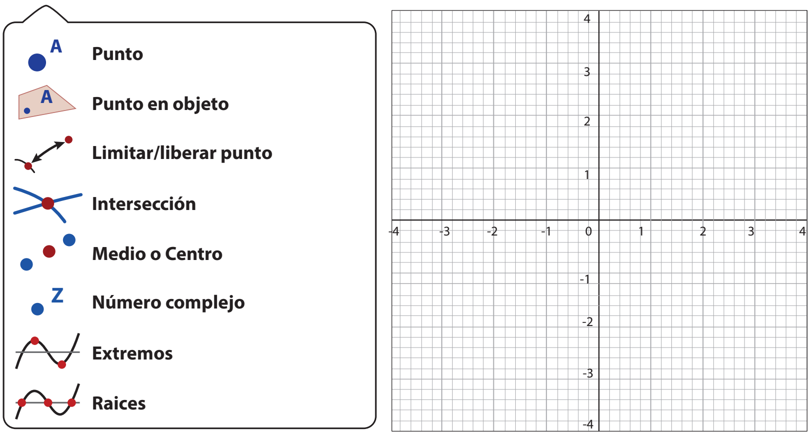
3. En la barra de herramientas, ubicada en la parte superior derecha, nos centraremos en los iconos: 2, 3 y 8.

Figura 33. Barra de herramientas



4. En el icono 2 nos encontraremos con la imagen que aparece más abajo. Haciendo clic izquierdo donde aparece la A (punto) podremos ubicar puntos en el plano cartesiano (zona de trabajo) el cual se encuentra al lado derecho en forma de cuadricula.

Figura 34. Ubicar puntos



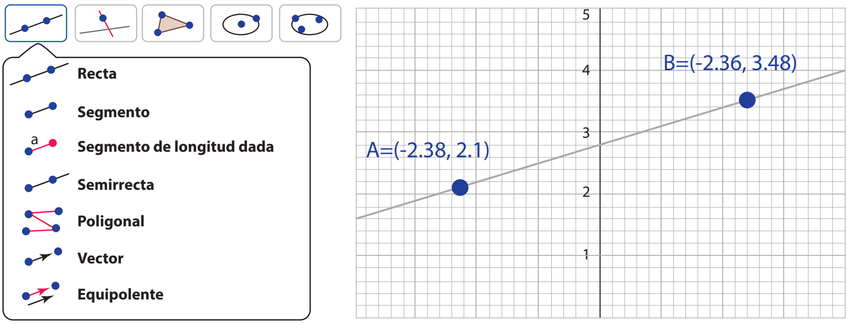
5. Para colocar coordenadas al punto, damos clic en el punto, luego nos ubicamos en la parte superior derecha, clic en "Nombre", seleccionamos nombre y valor.

Figura 35. Etiquetas

Fuente: elaboración propia.

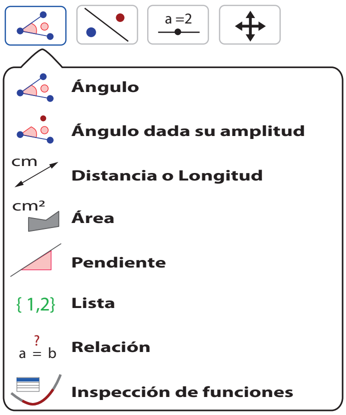
6. Para trazar la recta es posible hacer el siguiente procedimiento: ubicamos dos puntos, luego en el icono 3 seleccionamos "Recta" y ubicando el puntero en uno de ellos nos dirigimos hasta el segundo o partiendo directamente de recta sin ubicar puntos.

Figura 36. Trazar líneas



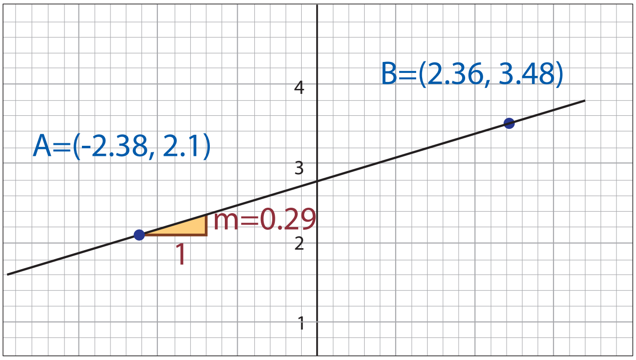
7. En el icono numero 8 encontramos la siguiente imagen:

Figura 37. Hallar la pendiente



Por ejemplo: si queremos encontrar la pendiente de una recta damos clic en pendiente, luego clic en la recta.

Figura 38. Línea recta con su pendiente



Si se quiere mover la línea, se da clic en el icono 1, luego nos dirigimos a la recta y con clic sostenido se puede realizar el movimiento.

En la parte superior van a ir apareciendo los puntos con nombre y coordenadas, además de las ecuaciones de las rectas trazadas.

Anexo 6. Pretest de ideas previas y conocimientos previos matemáticos

Cuestionario diagnóstico

Nombre: ____ Código: ________

Este cuestionario no tiene valor en tu calificación, por lo tanto, escribe tu respuesta de acuerdo con lo que concibes u opinas tranquilamente.

Responde a las preguntas:

Sección 1: Ideas previas sobre la transformación de la energía

1. ¿Qué entiendes por energía?

   ____
   ____
   ____
   ____

2. ¿Qué tipo de energías conoces?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. ¿Qué entiendes por el proceso de transformación de energía?

   ____
   ____
   ____
   ____

4. ¿Qué variables están involucradas en la medición de temperatura?

   ____
   ____
   ____
   ____

5. ¿Qué energías están presentes en la medición de la temperatura?

   ____
   ____
   ____
   ____

6. ¿De qué depende que la temperatura varíe, sea creciente o decrecientemente?

Sección 2: Conocimientos previos matemáticos

1. ¿Qué entiendes por línea recta?

2. Describe qué entiendes por variable dependiente e independiente.

3. Se pide realizar la cocción de una pieza cerámica a una velocidad de 5 °C/min constantes hasta llegar a los 600 grados, ¿qué representa dentro de una función el 5 °C/min?

4. Por 30 minutos a 300 °C se mantiene una pieza cerámica dentro de un horno, ¿cuál es la pendiente?

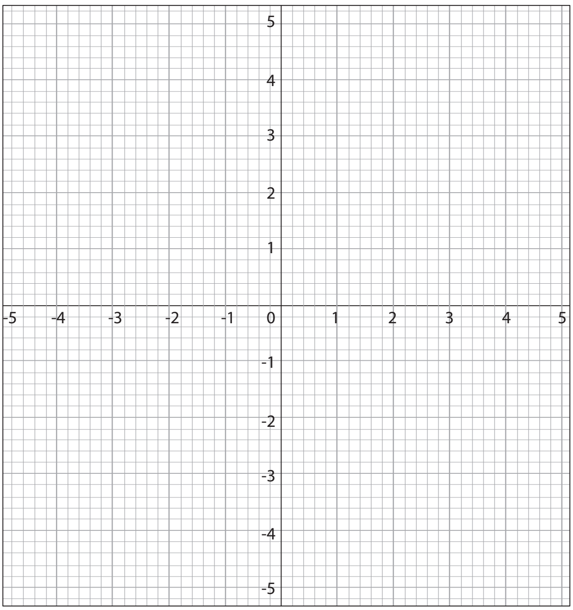
5. Cómo representarías gráficamente la siguiente situación: transcurridos 15 minutos se toma la medida de temperatura y el dispositivo visualiza 250 °C, se realiza una segunda medición a los 30 minutos con una temperatura de 500 °C.
6. Cómo representarías gráficamente la siguiente situación: transcurridos 20 minutos se toma a la salida del AD595 (pin 8-9) un voltaje de 2,5 voltios dc, 40 minutos después un voltaje de 5 voltios dc.
7. Partiendo de la siguiente ecuación: y=2x-3, identifique la variable dependiente, la independiente, el valor de la pendiente y la ordenada al origen.

8. Ubicando puntos se pretenden explorar los conocimientos que los estudiantes tienen en la ubicación de puntos en el plano cartesiano y la distancia del punto al origen.

Tabla 5. Puntos con sus coordenadas

Ubicar cada punto en el plano con su respectivo nombre y coordenadas.		
Punto	**Distancia del punto al origen sobre el eje x**	**Distancia del punto al origen sobre el eje y**
A (4,3)		
B (-5,3)		
C (4,-2)		
D (-3,-5)		
E (1.5,2.5)		
F (-1.5,-2.5)		

Figura 39. Plano cartesiano para el pretest

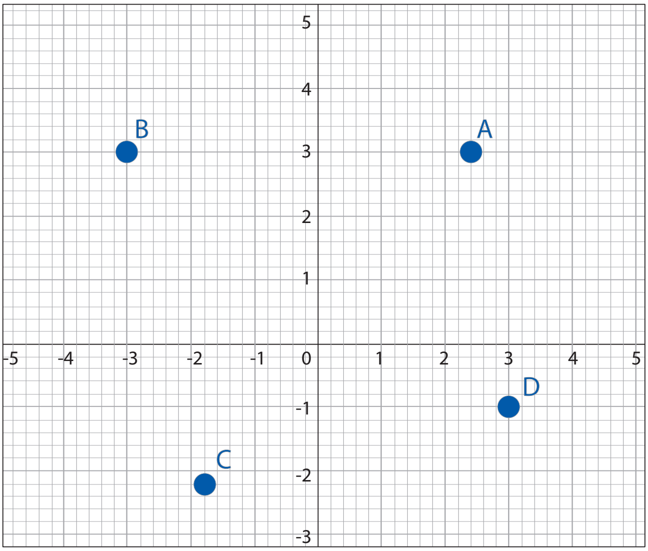


Ítem I. Pretest ubicando puntos en el plano

9. En el presente ítem realizarán la operación inversa al punto anterior, partiendo de puntos ubicados en el plano se pretende explorar las capacidades de los estudiantes de dar las coordenadas (x,y) de cada punto.

Identifique las coordenadas de los puntos ubicados en el plano.

Figura 40. Puntos en el plano cartesiano



Ítem II. Pretest ubicando las coordenadas de los puntos

10. Dada la ecuación -2x+3y=1 exprésala de la forma y=mx+b.

Anexo 7. Primera actividad para la modelización del fenómeno físico (Cuvima)

Toma de datos de temperatura y voltaje

Nombres:

Materiales: horno o artefacto que produzca calor (mechera o cautín), termopar tipo k con su tabla de datos, banco de monitoreo de temperatura con manual de uso, smartphone, computador con GeoGebra y Arduino.

Instrucciones:

1. El trabajo se realizará en grupos de 2 estudiantes.
2. Seguir los pasos para el uso del banco de monitoreo de temperatura que se encuentra en el anexo 3.
3. Encender el horno o el artefacto de calor, acercarlo al termopar.
4. Tomar los datos de temperatura y voltaje dados por el dispositivo tecnológico, conforme se estén visualizando en el smartphone o el ordenador, llene la siguiente tabla (tenga en cuenta las unidades de cada variable).

Tabla 6. Temperatura vs. voltaje

N.	TEMPERATURA (°C)	VOLTAJE (v)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Datos de temperatura y voltaje.		

5. Abrir en GeoGebra el proyecto 1 (dado por el profesor).
6. Copiar estos datos y llevarlos a GeoGebra, pegarlos en una hoja de cálculo (columna A y B, respectivamente (TEM. (°C), VOLT. (v)). Tenga en cuenta que las unidades de la tabla deben de coincidir con el encabezado de la hoja de cálculo de GeoGebra.
7. ¿Dentro de esta experimentación, cuál es la función del termopar tipo K?

____

____

____

8. ¿Qué función realiza el AD595, cuál es su importancia? ________________
____
____
____

9. Con los datos anteriores seleccionados en GeoGebra (clic sostenido sobre los datos), dar clic derecho y seleccionar la lista de puntos en crear.
10. Para que los puntos se puedan visualizar en el plano cartesiano, dar clic derecho (sobre el plano cartesiano) y mostrar todos los datos.
11. Ajuste el plano hasta que visualice el eje vertical y horizontal (clic en la lupa con el signo menos).
12. En la casilla entrada, que se encuentra al lado inferior izquierdo, digitar AjusteLineal(l1), de esa forma se realiza la representación gráfica propia del termopar (temperatura vs. voltaje).
13. Identifique el eje x y el y, asócielos a cada variable (temperatura vs. voltaje)
____
____
____
14. Identifique y escriba las coordenadas del punto de corte de la recta con el eje y: ____
____________________ ¿Qué representa este punto de corte en la presente recta? ____
____
____
15. Realice las siguientes operaciones y tome nota del resultado, el dato del voltaje que está en la columna B fila 3, réstelo con el dato del voltaje que se encuentra en la columna B fila 2. Este resultado divídalo entre la resta del dato de temperatura que se encuentra en la columna A fila 3, con el dato de temperatura de la columna A fila 2, el resultado debe ser escrito con sus respectivas unidades =____.

    Realice la misma operación para los datos de la fila 5 y 4, columna B y A=__________. ¿Estos resultados son iguales, qué representan? ________
    ____
    ____
16. Con las variables identificadas y asociadas a cada eje (x,y), ubique la ecuación (f: AjusteLineal(l1)), tome nota de ella: ____________________, selecciónela y arrástrela hasta el plano cartesiano para una mejor visualización.

    Observe con atención esta ecuación ¿existe alguna similitud con los resultados del punto 14? Describa (tenga en cuenta que los números cuando no son enteros se pueden aproximar o redondear

¿El anterior resultado, comparado con la ecuación de la recta f: AjusteLineal(l1)), qué representa? ________________________________
____

17. En la columna C (y1 de la hoja de cálculo) remplazar cada dato de x (temperatura, columna A) en la ecuación anterior (f: AjusteLineal(l1)).

    ¿Esta nueva columna y1 tiene alguna similitud con alguna de las columnas anteriores? Menciónelas y concluya________________________________

18. En la columna D (V.T.K.) haciendo uso de las tablas reales del termopar tipo K, buscar el dato en milivoltios asociado a cada dato de temperatura de la columna A y registrarlo en esta columna (dividir por mil cada uno, debido a que deben estar en el orden de los voltios).

    Compare la nueva columna D con la B ¿qué diferencia encuentra, a qué se debe? ____
    ____
    ____
    ____

19. Tome el dato de voltaje que está en la columna D fila 3, divídalo entre el dato de temperatura que se encuentra en la columna A fila 3, el resultado debe ser escrito con sus respectivas unidades =__________________________
    ____

    Realice la misma operación para los datos de la fila 5, columna D y A=_______________

    ¿Los anteriores resultados son iguales, qué representa este resultado? _____
    ____
    ____
    ____
    ____

20. ¿Por qué en el punto 14, antes de realizar la división, se realizó una resta de datos y luego se calculó el resultado, mientras que en el punto 18 no fue necesario realizar primero esta resta de datos?
    ____
    ____
    ____
    ____

21. Seleccione la columna A y D, realice los mismos pasos del punto 8 al 11, para este caso será AjusteLineal(l2).

22. Como se podrá apreciar los datos son muy pequeños y se verán sobre el eje x, es necesario ajustar la escala del eje y, para esto damos clic izquierdo sobre el símbolo con la forma de una cruz con flechas, ubicada en la parte superior, dando clic en desplaza vista gráfica nos ubicamos en el eje que deseamos

modificar (y). Con clic sostenido lo desplazamos hasta arriba, hasta visualizar la línea recta con los nuevos datos de una forma clara.

23. Con las variables identificadas y asociadas a cada eje (x,y), ubique la ecuación (f: AjusteLineal(l2)), tome nota de ella:____________________, selecciónela y arrástrela hasta el plano cartesiano para una mejor visualización.

    Analice esta ecuación ¿existe alguna similitud con los resultados de la actividad 18? ____

24. Realice una comparación entre las dos rectas, ¿qué se puede concluir de esto? ____

25. ¿ Qué representan en la presente línea recta los datos calculados en la actividad 18? ____

26. La siguiente ecuación es propia del AD595: salida_AD595= (Voltaje_Termopar+11µv)*247.3, donde los 11µv son la compensación que hace el AD595 por las pérdidas de unión de materiales del circuito, los 243.7 son el factor de amplificación y el Voltaje_Termopar (V.T.K., en la hoja de cálculo en GeoGebra), es el voltaje de las tablas reales del termopar tipo K (milivoltios), realice el despeje de la misma y seleccione la respuesta correcta:
    - a) salida_ AD595= 247,3*Voltaje_Termopar+2,72(mv).
    - b) salida_ AD595= 247,3*Voltaje_Termopar+11(mv).
    - c) salida_ AD595= 247,3*Voltaje_Termopar+2,72(µv).
    - d) salida_ AD595=Voltaje_Termopar+2,72(mv).
    - e) Otra.

27. Basados en su respuesta seleccione la variable dependiente, la independiente y el punto de corte con el eje y, respectivamente:
    - a) Variable independiente=Voltaje_Termopar, dependiente= salida_AD595, punto de corte= 11 mv.
    - b) Variable independiente=salida_AD595, dependiente= Voltaje_Termopar, punto de corte= 11 mv.
    - c) Variable independiente=Voltaje_Termopar, dependiente= salida_AD595, punto de corte= 2.72 mv.
    - d) Variable independiente=Voltaje_Termopar, dependiente=2.72 mv, punto de corte= 11 mv
    - e) Otra.

28. Con base al factor hallado en el punto 18 se realiza el tabulado que corresponde a la tabla real del termopar tipo K, se toma el dato de temperatura y se multiplica por este factor (AjusteLineal(l2)).

    Realice la siguiente operación: multiplique este factor por el 247.3 (factor multiplicador del AD595) y escriba el resultado con sus respectivas unidades=___________________________

    Compare este resultado con la recta AjusteLineal(l1) (tenga en cuenta las aproximaciones o el redondeo de números) ¿encuentra alguna similitud? Tome nota de esto. ____
    ____
    ____

29. Teniendo en cuenta las actividades 25, 26 y 27, modifique la ecuación salida_AD595= (Voltaje_Termopar+11µv)*247.3, tener en cuenta el factor del punto 18 y las unidades. Seleccione la respuesta correcta:
    - a) salida_ AD595= 0.01*Temperatura+2.72.
    - b) salida_ AD595= 0.01*Voltaje_Termopar+0.00272.
    - c) salida_ AD595= 0.01*Temperatura+0.00272.
    - d) salida_ AD595= 0.01*Voltaje_Termopar+0.000011.
    - e) Otra.
30. Compare la anterior respuesta con las dos líneas de GeoGebra e indique con cuál de ellas tiene similitud: _______________________________________
    ____
31. ¿Cuál será al valor de la salida_AD595 para una temperatura de 200 °C? __
    ____
    ____
32. ¿Cuál será el valor de la temperatura para una salida_AD595 de 3 voltios?
    ____
    ____
33. Guarde el proyecto.

Anexo 8. Segunda actividad para la modelización del fenómeno físico (Cuvima)

Toma de datos de tiempo y temperatura.

Nombres:

Materiales: horno o artefacto que produzca calor (mechera o cautín), termopar tipo k, banco de monitoreo de temperatura con manual de uso, smartphone, computador con GeoGebra y Arduino.

Instrucciones: el trabajo se realizará en grupos de 2 estudiantes, preferiblemente grupos diferentes a la actividad anterior.

1. Seguir los pasos para el uso del banco de monitoreo de temperatura que se encuentra en el anexo 3.
2. Encender el horno o el artefacto de calor y acercarlo al termopar.
3. Tomar los datos de tiempo y temperatura dados por el dispositivo tecnológico, conforme se estén visualizando en el smartphone o el ordenador, llene la siguiente tabla (tenga en cuenta las unidades de cada variable).

Tabla 7. Tiempo vs. temperatura

N.	TIEMPO (s)	TEMPERATURA °C
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Datos de tiempo y temperatura.		

4. Abrir en GeoGebra el proyecto 2 (dado por el profesor).
5. Copiar estos datos y llevarlos a GeoGebra, pegarlos en una hoja de cálculo (columna A y B, respectivamente (TIEM. (s), TEM. (°C)). Tenga en cuenta que las unidades de la tabla deben coincidir con el encabezado de la hoja de cálculo de GeoGebra.
6. Con los datos anteriores seleccionados en GeoGebra (clic sostenido sobre los datos), damos clic derecho, en crear seleccionamos lista de puntos.
7. Para que los puntos aparezcan en el plano cartesiano, damos clic derecho y mostrar todos los datos.

8. Ajuste el plano hasta que visualice el eje vertical y horizontal (clic en la lupa con el menos).
9. Identifique y asocie las variables tiempo y temperatura con los ejes x y. ____
10. En el presente proyecto encontrará una línea recta y dos deslizadores identificados con la letra m y b, con los cuales puede interactuar moviéndolos con clic sostenido o con las flechas del teclado, preferiblemente.
11. Mueva el deslizador b hasta que la línea pase por el origen (0,0), analice la ecuación de la recta y describa lo siguiente, ¿cuáles son las coordenadas del punto de corte con el eje y? ____

    Tome nota de la ecuación: _____________, ¿qué se puede concluir de ella teniendo en cuanta el punto de corte con el eje y?

    ____
12. Mueva el deslizador b hacia la derecha donde se pueda visualizar con facilidad el punto de corte con el eje y, ¿cuáles son las coordenadas del punto de corte? ______________

    Tome nota de la ecuación: _____________, ¿qué se puede concluir de ella teniendo en cuenta el punto de corte con el eje y?

    ____
13. Mueva el deslizador b hacia la izquierda donde se pueda visualizar con facilidad el punto de corte con el eje y, ¿cuáles son las coordenadas del punto de corte? ______________

    Tome nota de la ecuación: _____________, ¿qué se puede concluir de ella teniendo en cuenta el punto de corte con el eje y?

    ____
14. Mueva el deslizador m de izquierda a derecha y viceversa, observe con atención lo que pasa con la ecuación y tome nota del evento:

    ____
15. Ajuste la línea recta con los puntos del plano haciendo uso de los dos deslizadores. ¿Qué se puede concluir de esta actividad?

____

16. La ecuación de la recta se puede representar de la forma y=mx+b, analice la ecuación del GeoGebra ajustada con los puntos, tome nota de lo siguiente y describa: m=_________, ¿qué representa la m dentro de la ecuación? ________________________________b=_________, ¿que representa esta b dentro de la ecuación? ____
17. El dato de temperatura que está en la columna B fila 5, réstelo con el dato de temperatura de la columna B fila 4, este resultado divídalo entre la resta del dato de tiempo que está en la columna A fila 5, con el dato de tiempo que se encuentra en la columna A fila 4. El resultado debe ser escrito con sus respectivas unidades =___________. Realice la misma operación para los datos de la fila 3 y 2, columna B y A=___________. ¿Estos resultados son iguales, qué representan en la ecuación de la recta?

    ____
18. ¿Se pueden identificar los anteriores resultados en la ecuación de la recta presente? Tome nota.

    ____
19. Remplace los datos de tiempo en la ecuación y llene la columna C (y). ¿Encuentra alguna semejanza entre esta nueva columna y alguna de las anteriores, con cuál? ____
20. Partiendo de la ecuación de la línea recta calcule dos datos de temperatura futuros para dos tiempos diferentes a los que se encuentran en la tabla.

    Tiempo 1=__________ y temperatura 1=____________.

    Tiempo 2= __________y temperatura 2=____________.
21. Partiendo de la ecuación de la línea recta, calcule dos datos de tiempo futuros para dos temperaturas diferentes a las que se encuentran en la tabla.

    Temperatura 1=__________ y tiempo1=_____________.

    Temperatura 2= __________ y tiempo 2=____________.
22. ¿Qué otro fenómeno físico diferente al de tomar la temperatura con un termopar tipo k, se puede modelar haciendo uso de la función lineal y afín?

    ____
23. Guarde el proyecto.

Anexo 9. Postest de actividades

Postest

Nombres:

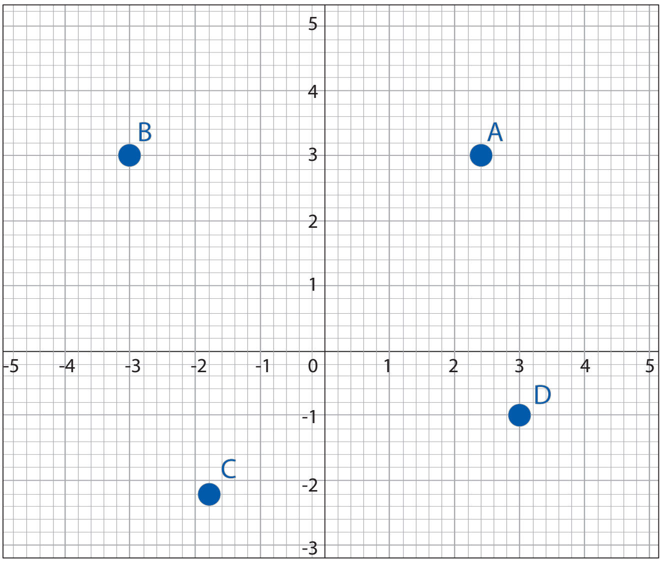
Materiales: lápiz, borrador, reglas, calculadora básica.

Instrucciones: el trabajo se realizará en grupos de 2 estudiantes, preferiblemente grupos diferentes a las actividades anteriores:

1. Partiendo de las gráficas de las siguientes líneas hallar su respectiva ecuación.

$$(y\text{-}y1) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(y\text{-}y1) =$$

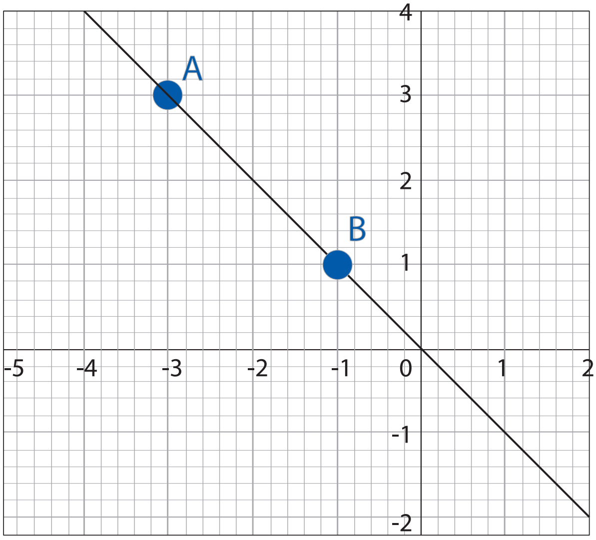
Figura 41. Actividad 1.1. del postest



Marcar la respuesta correcta

a) y= x+1
b) y= x-1
c) y= -x+1
d) y= -x-1
e) Otra.

Figura 42. Actividad 1.2. del postest



Marcar la respuesta correcta

a) y= x+2

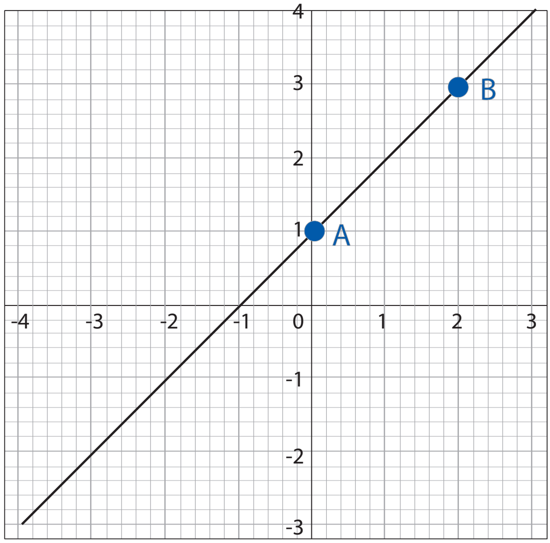
b) y= x

c) y= -x

d) y= -x-2

e) Otra.

Figura 43. Actividad 1.3. del postest



Marcar la respuesta correcta

a) y= x+3
b) y= x+1
c) y= -x-1
d) y= -x-3
e) Otra.

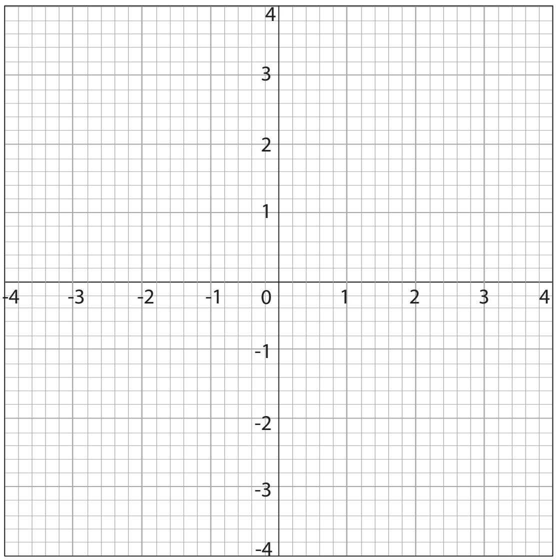
Postest, hallar la ecuacion de la recta.

2. De las siguientes ecuaciones de la forma Ax+By=C, expresarla de la forma y=mx+b, identificar la pendiente y el punto de corte con el eje y, realizar la representación gráfica.

Tabla 8. Despeje de la ecuación Ax+By=C, pendiente y punto de corte

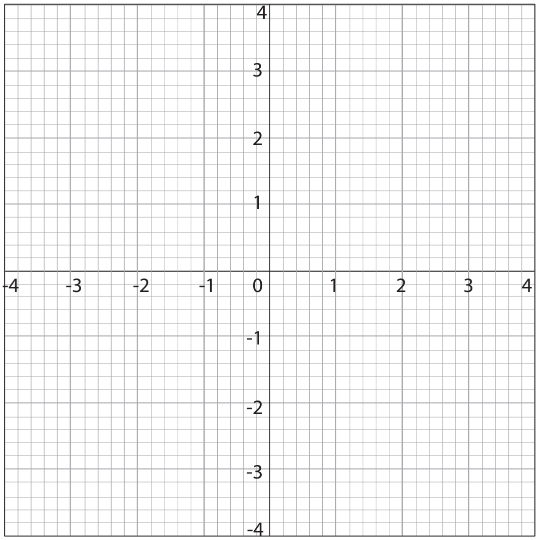
Ecuación de la forma ax+by=c	Ecuación de la forma y= mx+b	Pendiente	Punto de corte con el eje y
Recta (A,B)-2x+3y=1			
Recta (C,D)-x+y=0			
Recta (E,F)-3x-4y=–4			
Recta (A,B)			

Figura 44. Actividad 2.1. del postest



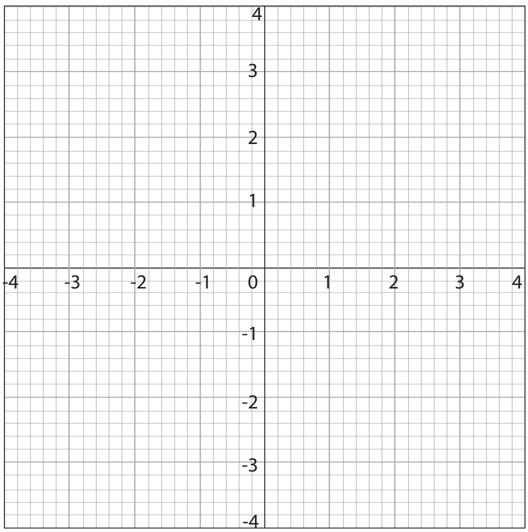
Recta (C,D)

Figura 45. Actividad 2.2. del postest



Recta (E,F)

Figura 46. Actividad 2.3. del postest



Postest, despeje de ecuaciones y representacion grafica

3. Partiendo de la siguiente tabla de valores hallar la ecuación de la recta y graficar.

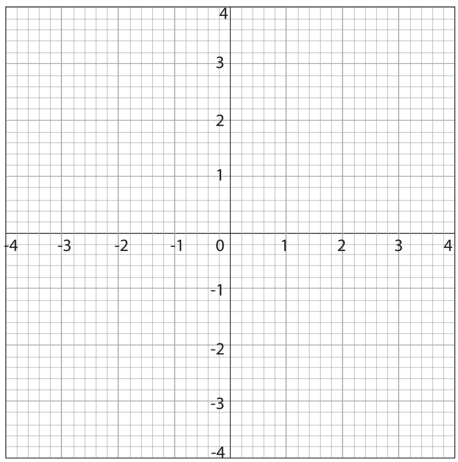
Tabla 9. Coordenadas (x,y) de forma tabulada

N.	VARABLE INDEPENDIENTE X	VARABLE DEPENDIENTE Y
1	-1	-4
2	0	-2
3	1	0
4	2	2
5	3	4

Marcar la respuesta correcta, grafique la línea y ubique los puntos con sus coordenadas.

a) y= -x+3
b) y= 2x+2
c) y= 2x-2
d) y= -x-1
e) Otra.

Figura 47. Actividad 2.3. del postest



De la anterior ecuación seleccione la respectiva pendiente y el punto de corte con el eje y.

a) m=-1 y b= 3
b) m= 2 y b= -2
c) m= 2 y b= -2
d) m= -1y b= -1
e) Otra.

Postest, análisis tabular

Anexo 10. Actividades complementarias

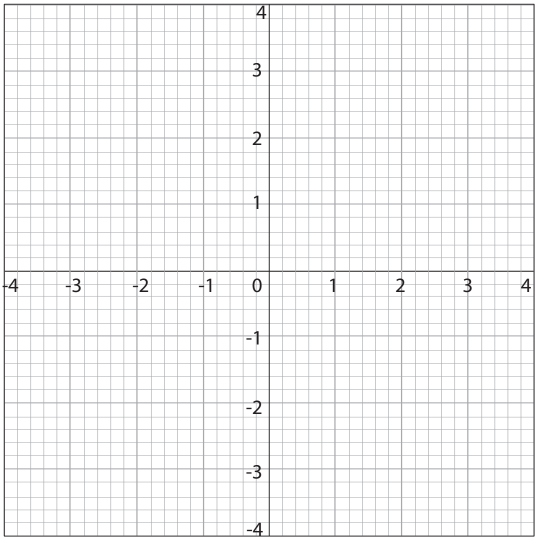
En este ítem se presentarán algunas formas de representación de la función lineal y afín, como lo son: tabular y gráfica, en las cuales se evidencia de manera clara todas la variables que se muestran en el proceso de transformación de la energía (energía calorífica a energía eléctrica), relacionadas con la medición de la temperatura, usando un termopar tipo K. Se podrá observar en tiempo real este proceso con el uso de la instrumentación virtual (LabVIEW), en la cual se generarán reportes que quedarán guardados en un documento en Word (en el anexo 4 se encuentra una breve explicación de este *software*).

Tabla 10. Variables entregadas por LabVIEW

A partir del reporte generado por LabVIEW, analizar los datos de la tabla donde se encuentran registrados temperatura, tiempo, voltaje Arduino y hora del suceso, además verificar la gráfica. Tabular estos datos en la siguiente tabla y realizar las actividades enunciadas a continuación.			
Voltaje Arduino	**Temperatura**	**Tiempo**	**Hora**

Guiados por la gráfica del reporte realizar la línea recta en el siguiente plano cartesiano

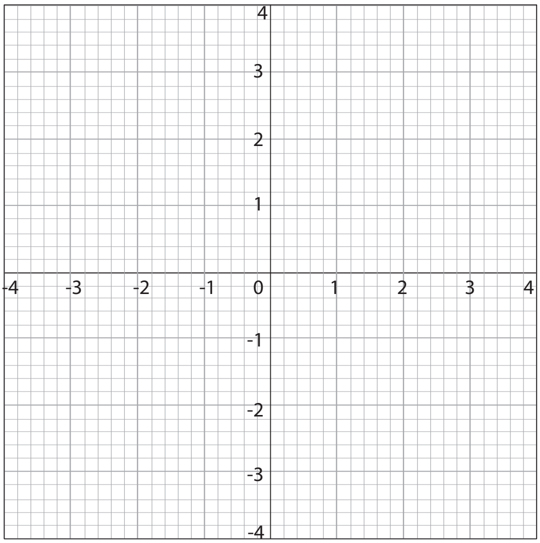
Figura 48. Grafica de tiempo vs. temperatura



De los datos mostrados halle la ecuación y concluya de la gráfica.

De la anterior tabla escoja 2 variables diferentes a la pareja tiempo vs. temperatura, especificando en cada eje la respectiva variable, realice la gráfica, halle la ecuacion y ubique 2 puntos sobre la recta.

Figura 49. Grafica de la línea recta para variables diferentes a tiempo vs. temperatura



Actividad complementaria, uso de LabVIEW

Anexo 11. Dispositivos tecnológicos e inserción en el modelo Cuvima

Dentro de los dispositivos industriales y tecnológicos a utilizar dentro de un contexto, y cercano a los estudiantes, nos encontramos con el termopar[7] (transductor) que es económico y hay variedad dependiendo de su utilización. Existen unos metales que proporcionan mejor respuesta (producen voltajes predecibles) y poseen un margen amplio de gradientes de temperatura[8], se utilizará el tipo K que está compuesto de aleaciones de Niquel (Ni), Cromo (Cr), Aluminio (Al), Manganeso (Mn) y Silicio (Si) (por ser uno de los más utilizados en la industria). En la Figura 55 encontramos los termopares más usados, el tipo K entrega un voltaje de aproximadamente 40,44µV/º C, por ejemplo, si se tiene una temperatura de 300 ºC se obtendrá un voltaje de 12,2 mV (Hernández, 2009).

Tabla 11. Principales tipos de termopares

Tipo	Material positivo	Material negativo	Error%	Rango total (°C)	Rango útil (°C)	Comentssrio
B	Pt, 30%Rh	Pt, 60%Rh	0.5% >800°C	50 a 1820	1370 a 1700	Bueno a altas temperaturas, donde no requiere compensación de unión fría
C	W, 5%Re	W,26%Re	1%>425 °C	0 a 2315	1650 a 2315	Para uso a muy altas temperaturas, pero es quebradizo
E	Ni, 10%Cr	Cu,45%Ni	0.5% o 1.7 °C	-270 a 1000	95 a 900	Para medianas y bajas temperaturas
G	W	W, 26%Re	1% >425°C	0 a 2315	-	Idéntico al tipo C
J	Fe	Cu, 4.5%Ni	0.75% o 2.2 °C	-210 a 1200	95 a 760	Para altas temperaturas con ambientes reductores
K*	Ni, 10%Cr		0.75% o 2.2°C	-270 a 1372	95 a 1260	Pra altas temperaturas en ambientes exidantes

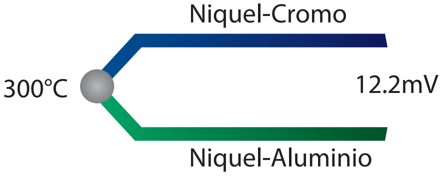
Fuente: Hernández (2009, p. 19).

En las figuras 55 y 56 se ilustra lo que podemos entender como un termopar tipo K, se tomó como referencia del ejemplo anterior.

7 Termopar: termocupla por su traducción del inglés *thermocouple*

8 Gradiente de temperatura: se refiere a la variación de temperatura en cierta área o volumen predeterminados (Silva, 2016).

Figura 50. Funcionamiento del termopar tipo K



Fuente: (p. 18).

Figura 51. Termopar real

Fuente: Geekbot Electronics (s.f.).

En la automatización industrial un sensor y un transductor vienen de la mano y son elementos indispensables en dichos procesos, lo que realiza un sensor es el reconocimiento de la variable a medir y este envía la información al transductor para su tratamiento y conversión. Es posible ejemplificar lo anterior de la siguiente manera: pensemos en los ojos y el cerebro, los ojos serían los sensores, para que los datos recogidos por ellos puedan ser procesados y entendidos, también necesitamos del cerebro, que sería el transductor. En la Figura 57 se puede apreciar un fragmento de las tablas de los datos ideales del termopar tipo K, mientras que en la Figura 58 se ve la representación gráfica del tipo K y otros termopares.

Tabla 12. Fragmento de tabla de datos del termopar tipo k

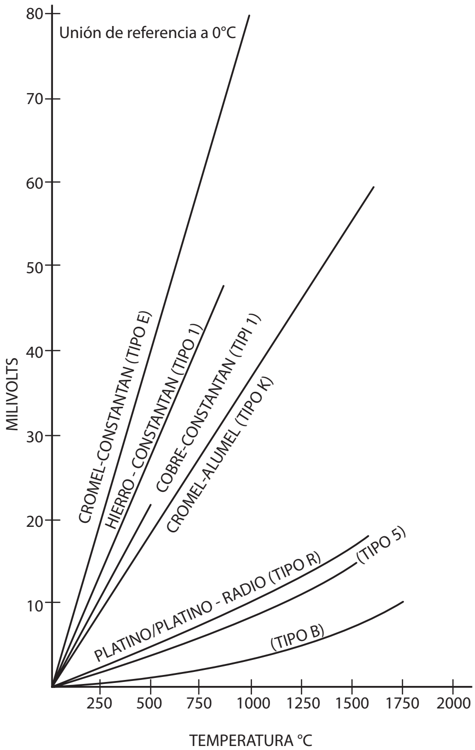
TERMOCUPLA			K	mili-volts						
°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-270	-6.458									
-260	-6.441	-6.444	-6.446	-6.448	-6.450	-6.452	-6.453	-6.455	-6.456	-6.457
-250	-6.404	-6.408	-6.413	-6.417	-6.421	-6.425	-6.429	-6.432	-6.435	-6.438
-240	-6.344	-6.351	-6.358	-6.364	-6.371	-6.377	-6.382	-6.388	-6.394	-6.399
-230	-6262	-6.271	-6.280	-6.289	-6.297	-6.306	-6.314	-6.322	-6.329	-6.337
-220	-6.158	-6.170	-6.181	-6.192	-6.202	-6.213	-6.223	-6.233	-6.243	-6.253
-210	-6.035	-6.048	-6.061	-6.074	-6.087	-6.099	-6.111	-6.123	-6.135	-6.147

TERMOCUPLA			K	mili-volts						
°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-200	-5.891	-5.907	-5.922	-5.936	-5.951	-5.965	-5.980	-5.994	-6.007	-6.021
-190	-5.730	-5.747	-5.763	-5.780	-5.796	-5.813	-5.829	-5.845	-5.860	-5.876
-180	-5.550	-5.569	-5.587	-5.606	-5.624	-5.642	-5.660	-5.678	-5.695	-5.712
-170	-5.354	-5.374	-5.394	-5.414	-5.434	-5.454	-5.474	-5.493	-5.512	-5.531
-160	-5.141	-5.163	-5.185	-5.207	-5.228	-5.249	-5.271	-5.292	-5.313	-5.333
-150	-4.912	-4.936	-4.959	-4.983	-5.006	-5.029	-5.051	-5.074	-5.097	-5.119
-140	-4.669	-4.694	-4.719	-4.743	-4.768	-4.792	-4.817	-4.841	-4.865	-4.889
-130	-4.410	-4.437	-4.463	-4.489	-4.515	-4.541	-4.567	-4.593	-4.618	-4.644
-120	-4.138	-4.166	-4.193	-4.221	-4.248	-4.276	-4.303	-4.330	-4.357	-4.384
-110	-3.852	-3.881	-3.910	-3.939	-3.968	-3.997	-4.025	-4.053	-4.082	-4.110
-100	-3.553	-3.584	-3.614	-3.644	-3.674	-3.704	-3.734	-3.764	-3.793	-3.823
-90	-3.242	-3.274	-3.305	-3.337	-3.368	-3.399	-3.430	-3.461	-3.492	-3.523
-80	-2.920	-2.953	-2.985	-3.018	-3.050	-3.082	-3.115	-3.147	-3.179	-3.211
-70	-2.586	-2.620	-2.654	-2.687	-2.721	-2.754	-2.788	-2.821	-2.854	-2.887
-60	-2.243	-2.277	-2.312	-2.347	-2.381	-2.416	-2.450	-2.484	-2.518	-2.552
-50	-1.889	-1.925	-1.961	-1.996	-2.032	-2.067	-2.102	-2.137	-2.173	-2.208
-40	-1.527	-1.563	-1.600	-1.636	-1.673	-1.709	-1.745	-1.781	-1.817	-1.853
-30	-1.156	-1.193	-1.231	-1.268	-1.305	-1.342	-1.379	-1.416	-1.453	-1.490
-20	-0.777	-0.816	-0.854	-0.892	-0.930	-0.968	-1.005	-1.043	-1.081	-1.118
-10	-0.392	-0.431	-0.469	-0.508	-0.547	-0.585	-0.624	-0.662	-0.701	-0.739
0	-0.000	-0.039	-0.079	-0.118	-0.157	-0.197	-0.236	-0.275	-0.314	-0.353
0	-0.000	0.039	0.079	0.119	0.158	0.198	0.238	0.277	0.317	0.357
10	0.397	0.437	0.477	0.517	0.557	0.597	0.637	0.677	0.718	0.758
20	0.798	0.838	0.879	0.919	0.960	1.000	1.041	1.081	1.122	1.162
30	1.203	1.244	1.285	1.325	1.366	1.407	1.448	1.489	1.529	1.570
40	1.611	1.652	1.693	1.734	1.776	1.817	1.858	1.899	1.940	1.981
50	2.022	2.064	2.105	2.146	2.188	2.229	2.270	2.312	2.353	2.394
60	2.436	2.477	2.519	2.560	2.601	2.643	2.684	2.726	2.767	2.809
70	2.850	2.892	2.933	2.975	3.016	3.058	3.100	3.141	3.183	3.224
80	3.266	3.307	3.349	3.390	3.432	3.473	3.515	3.556	3.598	3.639

TERMOCUPLA			K	mili-volts						
°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	3.681	3.722	3.764	3.805	3.847	3.888	3.930	3.971	4.012	4.054
100	4.095	4.137	4.178	4.219	4.261	4.302	4.343	4.384	4.426	4.467
110	4.508	4.549	4.590	4.632	4.673	4.714	4.755	4.796	4.837	4.878
120	4.919	4.960	5.001	5.042	5.083	5.124	5.164	5.205	5.246	5.287
130	5.327	5.368	5.409	5.450	5.490	5.531	5.571	5.612	5.652	5.693
140	5.733	5.774	5.814	5.855	5.895	5.936	5.976	6.016	6.057	6.097
150	6.137	6.177	6.218	6.258	6.298	6.338	6.378	6.419	6.459	6.499

Fuente: (Creus, 1997, p. 249).

Figura 52. Curvas características de las temperaturas de los termopares

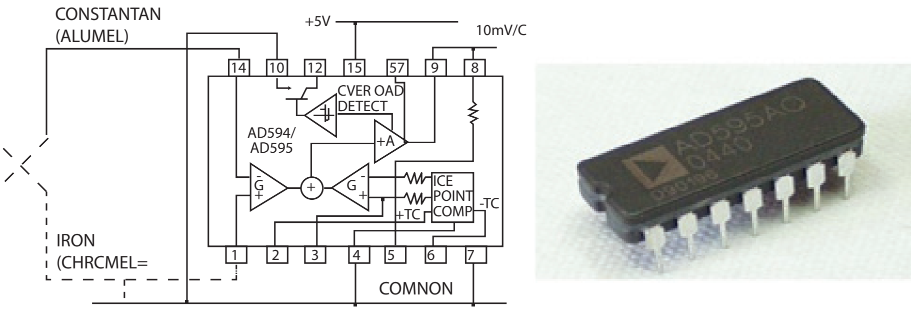


Fuente: (p. 239).

Como se apreció en la tabla de datos ideales del termopar tipo K (Figura 57), por cada grado de temperatura existe un dato de voltaje en el orden de los milivoltios, lo cual resulta ser un problema al tratar de procesar estas unidades tan pequeñas, debido a este inconveniente es necesario utilizar un amplificador. Por ejemplo, el AD595 (Figura 59) multiplicará por 247,3 estos datos, haciendo mucho más fácil su control y visualización, además el dispositivo anexará una compensación de 11µv (compensación por junta fría) debido a las pérdidas ocasionadas por la unión del termopar con otros materiales (en especial el cobre que se usa para el empalme con el circuito).

El AD595 es un completo amplificador de instrumentación utilizado para trabajar con los termopares tipo K, por cada grado centígrado él entregara 10 milivotltios (10 mV/º C) aproximadamente (Rodríguez *et al.*, 2007). La compensación por junta fría se refiere a que el amplificador colocará la de la pareja de metales del termopar y la del material negativo, a 0 mV (o 0°C) para su compensación y evitar pérdidas en la caída de tensión en los extremos donde se mide la temperatura (Analog Devices[9]).

Figura 53. AD595 (datasheet del AD595)



Fuente: Analog Devices.

Refiriéndonos al ejemplo mencionado con anterioridad, donde para una temperatura de 300°C medidos con un termopar, tenemos 12,2 mV (0,0122 v), dato medido con un multímetro, en este proceso no se utiliza el AD595. Al ejecutar el mismo proceso, pero adicionando el amplificador, la respuesta quedará de la siguiente manera:

Salida AD595= (Voltaje_Termopar+11µv)*247,3

Al llevarla a la ecuación de la recta:

Salida AD595= 247,3*Voltaje_Termopar+2,72mv→y=mx+b

Como se aprecia, con la adición del AD595 lo que antes era función lineal ahora es afín, ya que para un Voltaje_Termopar =0, tenemos una Salida AD595= 2,72mv, que viene siendo el punto de corte del eje y (b).

9 Analog Devices: multinacional estadounidense productora de dispositivos semiconductores.

Donde el Voltaje_termopar es el obtenido de la tabla (Figura 57), para 300°C tenemos 12,2mV. El 11µv es la compensación por pérdidas producidas al conectar el termopar al circuito, mientras que los 247,3 son el factor multiplicador, por lo tanto:

Salida AD595= (0,0122µv+11µv)*247,3=3019,78mv (3,01978 v).

Este dato es más manejable, fácil de interpretar y visualizar por los diferentes dispositivos electrónicos. Pasando el dato a grados centígrados, recordemos que por cada grado centígrado el amplificador da 10 mv, elaborando una regla de tres simple "La regla de tres o regla de oro se encuentra en las primeras aritméticas conocidas. Se relaciona con problemas para cuya solución se establecen reglas fijas que dependen de una igualdad de razones" (Gómez, 2006, p. 3). Tendremos lo siguiente:

1°C → 10mv

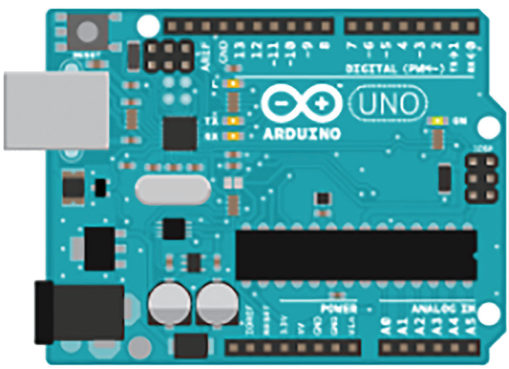
3019 mv →X

X=3019mv*1°C ≈ 300°C

10mv

Otro de los dispositivos es la tarjeta Arduino, que es una plataforma de prototipos electrónicos de código abierto, cuenta con hardware y *software* de libre distribución, de fácil trabajo. Con su hardware se pueden diseñar diversas aplicaciones, es posible usarlo como tarjeta de adquisición para recibir los datos de los diversos sensores, crear entornos interactivos, controlar motores, luces y demás. A su vez, es un buen aliado para los profesores, ya que permite la interactividad de su ambiente con los usuarios, su entorno de programación es bastante amigable y sencillo para los principiantes, con esta tarjeta se pueden dar solución a diversas situaciones electrónicas que se puedan presentar, es muy económica y funciona en diferentes sistemas operativos (Arduino, 2018).

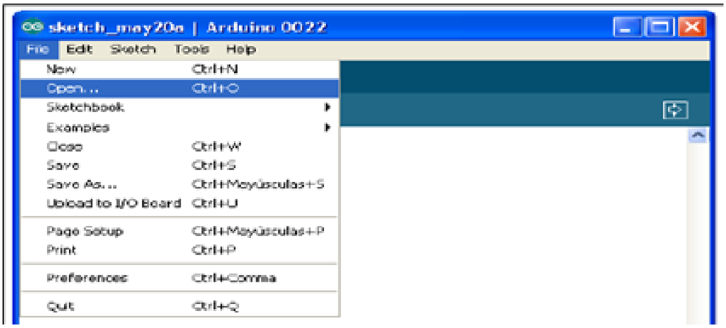
Figura 54. Arduino uno



Fuente: Arduino (2008).

Otra definición para tener en cuenta de Arduino: “[…] es una plataforma de hardware basada en una sencilla placa con entradas y salidas, análogas y digitales, en un entorno de desarrollo que implementa el lenguaje de programación Processing/ Wiring” (Aristizábal y Muñoz, 2011, p. 7). Con su IDE (Entorno de Desarrollo Integrado) se desarrolló un programa para calcular el valor de la temperatura en grados centígrados, dependiendo del valor en milivoltios a la salida del termopar. En el anexo 1 y 2 se encontrará la programación basada en García (2015).

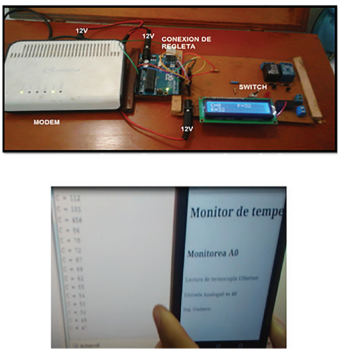
Figura 55. IDE **de Arduino**



Fuente: Arduino (2008).

Con el módulo de Arduino Ethernet Shield se podrá realizar la conexión a una red LAN[10] (Editonikx, 2014) y con la ayuda de un router (dirección IP) se podrán visualizar en el smartphone las variables, además los datos serán mostrados en una LCD y en la pantalla del ordenador. En la Figura 62 se podrá observar el montaje completo de todos los dispositivos tecnológicos.

Figura 56. Banco para el monitoreo y el control de temperatura



Fuente: elaboración propia.

10 LAN: por las siglas en inglés de Local Area Network.

Figura 57. Módulo de Ethernet

Fuente: Editronikx (2014).

El *software* LabVIEW[11] de National Instruments, es un programa de ingeniería diseñado para aplicaciones que requieren pruebas, medidas y control con acceso rápido a información de datos y hardware (Lajara y Pelegri, 2007) junto con la tarjeta Arduino para la visualización de datos, donde además de dar los datos de las variables de temperatura, fecha y hora, se realizará la gráfica de temperatura vs. tiempo. Lo anterior, genera un documento en Word donde quedan almacenados los datos mencionados, al igual que su respectiva gráfica, para tener acceso a este documento con el fin de realizar su interpretación y análisis en el momento deseado. El diagrama de bloque y el panel frontal (interfaz con el usuario) se encuentran en la Figura 65.

La instrumentación virtual: "En el año de 1983 Truchard y Kodosky, investigadores de la National Instruments, decidieron enfrentar el problema de crear un *software* que permitiera utilizar la computadora personal (PC) como un instrumento para realizar mediciones" (Aristizábal y Muñoz, 2011, p. 4). Se llama instrumento virtual porque se ejecuta en una computadora, todo es realizado mediante la programación, cumple con las características de la instrumentación tradicional, donde es necesario disponer de varios dispositivos y se centra en el hardware; por el contrario, con lo virtual solo es necesario el PC, la tarjeta de adquisición de datos (Arduino para nuestro caso) y el *software* apropiado.

11 LabVIEW: laboratorio virtual de instrumentación.

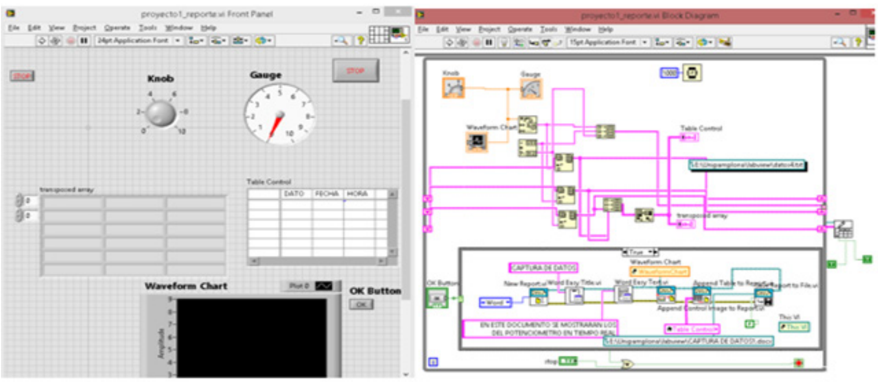
Tabla 13. Instrumentos tradicionales vs. instrumentos virtuales

Instrumento tradicional	Instrumento virtual
Definido por el fabricante	Definido por el usuario
Funcionalidad específica con conectividad limitada	Funcionalidad ilimitada orientado a aplicaciones conectividad amplia
Hardware es la clave	Software es la clave
Alto costo/función	Bajo costo/función, variedad de funciones reusable.
Arquitectura "cerrada"	Arquitectura "abierta"
Lenta incorporación de nuevas tecnologías	Rápida incorporación de nuevas tecnologías gracias a la plataforma PC
Bajas economías de escala alto costo de mantenimiento	Altas economías de escala bajos costos de mantenimiento

Fuente: Aristizábal y Muñoz (2011, p. 6).

Debido a la gran acogida que ha tenido Arduino en los ambientes educativos, en especial en electrónica, la NI (National Instruments) desarrolló para la comunidad académica el LIFA[12], con el cual se puede realizar la comunicación del Arduino con LabVIEW (Ruiz, 2012).

Figura 58. Panel frontal y diagrama de bloques (simulación realizada en LabVIEW)



Fuente: elaboración propia. en LabVIEW.

Después de un recorrido por los dispositivos a utilizar se procede a la explicación del proceso de medición de la temperatura, inicia calentando el termopar mediante la mufla eléctrica diseñada por los estudiantes en los laboratorios de la universidad. Los datos del termopar son amplificados por el AD595, y luego son tomados por

12 LIFA LabVIEW Interface para usar LabVIEW con Arduino.

Arduino, existen dos formas de enviar la información para su visualización, control, interpretación y conceptualización del fenómeno físico: mediante el módulo Ethernet, el cual con la ayuda de un router se conectará a una red LAN, se enviarán los datos a un PC o un smartphone. La otra forma es también usando Arduino y LabVIEW, con lo cual se podrán visualizar los datos y la gráfica del fenómeno en un PC.

Se diseñarán actividades didácticas para promover la comprensión de los conceptos matemáticos (función lineal y afín), electrónicos y físicos. El modelo Cuvima cumple con los objetivos que se buscan alcanzar, ya que permite integrar de manera armónica, activa, las áreas de la matemática, la electrónica y la física, a su vez, involucran al estudiante como eje central que es partícipe en la construcción de sus propios aprendizajes con el uso de ayudas tecnológicas.

Este libro fue compuesto en caracteres Minion
a 11 puntos, impreso sobre papel Bond de 75
gramos y encuadernado con el método hot
melt, en octubre del 2021, en Bogotá, Colombia.

TIC Y TERMOPARES
EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL

Esta investigación surge con el objetivo de fortalecer y servir de apoyo al sector industrial, específicamente el sector arcillero, al orientar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento tecnológico y formal y en la conceptualización en función lineal afín, al hacer uso de elementos tecnológicos y electrónicos para el tratamiento, control y visualización de la variable temperatura presente en procesos industriales.

La investigación inicia su implementación en la población estudiantil de técnica en instrumentación industrial, cuya formación se orienta de forma práctica vivencial, no asignaturista, incorporando módulos de cálculo, motivo por el cual se realiza una transposición didáctica hacia la enseñanza de la función lineal y afín, propiciando escenarios de modelación en un contexto real y cercano, haciendo uso de elementos tecnológicos mediadores en la construcción del concepto.

Dirigido a estudiantes y docentes de ingeniería o asignaturas afines que deseen comprender y analizar situaciones reales donde están presentes los procesos de modelización descriptiva predictiva de procesos.

Incluye

- Aplicación dentro de un contexto real y cercano a los estudiantes.
- Aplicación basada en elementos electrónicos de costos económicos y accesibles en el mercado.
- Uso de elementos industriales para medir la variable temperatura.
- Uso de un laboratorio portátil.

Gustavo Adolfo Acevedo Rodríguez
Ingeniero electrónico y magíster en Educación Matemática, egresado de la UFPS. Profesor universitario de los departamentos de Matemáticas y Estadística de la UFPS y de la UDP; autor de artículos de investigación, medalla "a la Investigación e Innovación en Educación Matemática", la cual exalta la labor de los egresados de la maestría en Educación Matemática de la UFPS, otorgado en el marco de la Bienal Covalente 2019.

Mawency Vergel Ortega
Licenciada en Matemáticas y Física, especialista en Estadística e Informática, magíster en Gerencia, doctora en Educación, post-doctora en Imaginarios y Representaciones Sociales, post-doctora en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud, candidata a doctora en proyectos. Investigadora Senior y directora de grupo de investigación Graunt; autora de libros, artículos de investigación, *software* y patente de invención. Profesora titular del departamento de Matemáticas y Estadística de la UFPS y directora de la Maestría en Educación Matemática.

Carlos Sebastián Gómez Vergel
Estudiante de Ingeniería Electrónica de la Uniandes, autor de artículos científicos, integrante del semillero Anova de la UFPS y del grupo de investigación en Conocimiento e Innovación Social Quetelet.

Universidad Francisco de Paula Santander
Vigilada Mineducación

Universidad de los Andes

ISBN 978-958-503-159-3

9 789585 031593

e-ISBN 978-958-503-160-9