TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA PARA APOYAR LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL Y AFÍN PARA ESTUDIANTES DE CÁLCULO USANDO LAS NTIC

DIDACTIC TRANSPOSITION TO SUPPORT THE TEACHING OF THE LINEAR AND ALFIN FUNCTION FOR STUDENTS OF CALCULUS USING THE NICT

Gustavo Adolfo Acevedo Rodríguez[1]
Mawency Vergel Ortega[2]
Zulmary Carolina Nieto Sánchez[3]

Resumen

El objetivo de este artículo es analizar el impacto de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo, como mediadores en la conceptualización de los objetos matemáticos. Se desarrolla un estudio cuantitativo con diseño de campo, con una población de 26 estudiantes de Cálculo Diferencial (17 a 20 años), del primer semestre, en el área de Técnica Profesional en Instrumentación y Control de una universidad colombiana. Se realiza una transposición didáctica a través de actividades mediadas con las NTIC, con el objetivo de apoyar y promover la enseñanza de la función lineal y afín, siendo necesario enmarcar las actividades dentro del modelo didáctico y metodológico Cuvima, para la modelización matemática de situaciones reales. Los resultados permiten evidenciar cambios conceptuales en los estudiantes en el área de contexto real como en el tema de función lineal y afín. Se concluye que la estrategia mejora la interpretación y articulación entre diversos registros de representación de la función lineal y afín, pero los estudiantes presentan dificultad en procedimientos básicos de solución de ecuaciones.

Palabras clave: NTIC, transposición didáctica, modelo Cuvima.

Abstract

The objective of this paper is to analyze the impact of Information and Communication Technologies (ICT) in the teaching and learning processes of calculus, as mediators in the conceptualization of mathematical objects. A quantitative study with field design is developed, with a population of 26 students of Differential Calculus (17 to 20 years old), of the first semester, in the area of Professional Technique in Instrumentation and Control of a Colombian university. A didactic transposition is carried out through activities mediated with NICT, with the objective of supporting and promoting the teaching of the linear and affine function, being necessary to frame the activities within the didactic and methodological model Cuvima, for the mathematical modeling of real situations. The results show conceptual changes in the students in the area of real context as

Fecha de recepción: Diciembre de 2019 / Fecha de aceptación en forma revisada: Mayo de 2020

[1] Magíster en Educación Matemática, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia https://orcid.org/0000-0001-6321-4047, tavitoon@hotmail.com
[2] Doctora en Educación, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia, https://orcid.org/0000-0001-8285-2968, mawency@ufps.edu.co
[3] Doctora en Educación, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia, https://orcid.org/0000-0001-6725-4601, zulmarycarolinanisa@ufps.edu.co

well as in the topic of linear and affine function. It is concluded that the strategy improves the interpretation and articulation between different registers of representation of the linear and affine function, but students have difficulty in basic procedures for solving equations.

Keywords: NTIC, didactic transposition, Cuvima model.

Introducción

Una de las características más importantes de la función lineal y afín, es su aplicación para explicar algunos procesos de variación (Sánchez, 2016), y sus expresiones analíticas deben construirse en herramientas que permiten modelar situaciones reales, dentro de las cuales están los contextos productivos, tales como los relacionados con procesos cerámicos y control de temperatura (manejo de termocuplas) (Hernández, 2009). El objetivo de la investigación es crear estrategias didácticas, motivadoras, basadas en contextos reales en estudiantes de primer semestre de una universidad en el área de cálculo. Para ello, se busca diseñar una serie de actividades para el tema de función lineal y afín, enmarcadas dentro de una didáctica apoyada en las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (NTIC).

Estas NTIC, para Hernández (2017), refieren a herramientas tecnológicas digitales tales como Arduino, módulo de Ethernet, termocuplas, teléfonos inteligentes (Smartphone) y pc's. En esta propuesta el uso de las NTIC juega un papel importante como mediadores en la experimentación de una situación real (control de temperatura en termocuplas). Se trata de la obtención y procesamiento de datos experimentales de un fenómeno para apoyar su modelización matemática (Zúñiga, 2009), es decir, que los estudiantes interpreten un proceso industrial bajo representaciones matemáticas que en este caso son visualizadas mediante dispositivos móviles como los Smartphone.

La atención se centra atención en las dificultades asociadas a la conceptualización de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes en sus procesos formativos. Ante ello, se deben buscar y generar propuestas didácticas con el fin de que los estudiantes tengan un acercamiento a esta rama, y de una manera progresiva como acumulativa, puedan alcanzar los conocimientos, destrezas y actitudes para que en el momento de enfrentar situaciones reales que conciernan la utilización del algebra lineal, posean las capacidades de reconocer y dar soluciones a éstas.

Las matemáticas a menudo se presentan de una forma estática, muchas veces dadas las circunstancias de la situación planteada. Así suele suceder cuando se hacen uso solo de elementos propios del algebra para la solución de problemas, descuidando el papel crucial que representa el uso de diversos registros semióticos de representación. Una forma de poder dinamizar los objetos es traer a la mesa de trabajo fenómenos del mundo real y construir modelos matemáticos; para lograrlo, según Janvier (1996), se debe partir de una fase de formulación, donde se establecen los vínculos o conjeturas entre sus variables, y seguidamente la realización de transformaciones matemáticas para llegar a un modelo matemático; en la fase de validación, se confrontará la validez del modelo con la situación que lo originó.

Sierpinska (1992), parte del concepto de función, en el cual se asume las variables dependiente e independiente **x, y** respectivamente, como partes del mundo de los cambios (objetos cambiantes) y, **f** a las relaciones existentes entre los objetos cambiantes, o los procesos de transformación de un objeto en otros. Una de las conclusiones del trabajo es que se debe promover en los estudiantes el interés en explicar los cambios y determinar coherencias entre sus variables, establecer criterios de comprensión de lo que cambia y cómo lo hace, y poder llegar a una herramienta que le dé al estudiante la posibilidad de alcanzar y modelar situaciones reales.

Para hacer del aprendizaje significativo desde la perspectiva de Ausubel, Novak y Hanesian (2003), la enseñanza de la función lineal y afín, debe empezar a desarrollar un pensamiento variacional y analizar los cambios que presentan las diferentes variables involucradas y cómo cambian. En este contexto, la función se presenta como un instrumento indiscutible con la cual se pueden afrontar los fenómenos cambiantes y sus variaciones. Centrarse solo en soluciones algebraicas por medio de algún registro semiótico, dejando a un lado el rol que representa el análisis de la covariación entre diversas magnitudes iguales o de diferente naturaleza, las cuales obedecen a características similares; no permitirá comprenderlo como modelo matemático explicativo de situaciones de variación.

Posada y Villa (2006), desde una perspectiva variacional, recomiendan que, para realizar la construcción de conceptos propios del álgebra, se debe empezar por un modelo matemático (sentido dinámico), el cual sirva como intermedio para entenderlo como un concepto matemático analítico (sentido estático). Lo anterior, es desarrollado con la ayuda de diferentes registros de representación, asociados al concepto de función, como lo son: "El registro de representación en lengua natural (castellano), el sistema de representación gráfica cartesiano ortogonal, el registro de representación tabular y el registro de representación simbólico" (Posada y Villa, 2006, p. 131).

Generalmente una situación se presenta en un lenguaje natural, y mediante el modelado matemático, se llega a la construcción de un registro simbólico, para lo cual se utilizan registros auxiliares como los tabulares y gráficos. Duval (2004), expone que los registros auxiliares dan información adicional a los del registro principal y que en ocasiones resulta difícil esclarecer; además permite desarrollar secuencias procedimentales de forma organizada, e incluso se puede remplazar el registro principal.

Para Iafrancesco (2016), la mente humana fue diseñada para que nunca olvide, esto se puede evidenciar, por ejemplo, en que las personas que aprendieron a leer, así se dejen de hacerlo por mucho tiempo, jamás lo olvidarán. Carvajal (2013), expresa que uno de los problemas que más se hace evidente en los estudiantes, no solo de bachillerato, si no en los semestres de universidad, es que cuando intentan realizar una representación o se les presenta algún tipo de concepto matemático, muestran un desconocimiento como si fuera la primera vez que lo trataran.

En el estudio de la función lineal existen diversas dificultades. Para Roldán (2013), las dificultades que se evidencian en el uso de las diferentes representaciones, es que algunos docentes centran sus enseñanzas en lo algebráico, descuidando el resto de representaciones. Por ello, muchas veces los estudiantes limitan la resolución de ejercicios solo en la utilización de algoritmos algebráicos de una manera rutinaria. Otro problema, es la falta de interpretación de los fenómenos que presentan variación, los cuales se descuidan o no se les da la importancia que merecen los procesos de modelización. Por otra parte, al plantear actividades en clase, las cuales no se inscriben en un contexto cercano al estudiante, éstas no permiten que éste fortalezca el análisis, la interpretación y la argumentación.

Hitt (2017), atribuye que una de las grandes dificultades en la comprensión, tanto en docentes como estudiantes, es que solo se enfocan en un análisis algebráico, descuidando con ello las diferentes formas y análisis de las diversas representaciones que el objeto demanda. Para este autor, el concepto que el docente tiene de función es que: "…al conceptualizar la función como una noción de función-continuidad como un solo ente matemático" (Hitt, 2017, p.6).

Reconocer una situación que se encuentra en el lenguaje natural y que se pretenda llevar a un modelo matemático, no es una tarea sencilla, siendo necesario caracterizar la situación. Al respecto, Posada y Villa (2006), argumentan que es importante determinar si la razón de cambio en el enunciado se encuentra de forma directa o indirecta, y si en los dos casos, esta razón es constante, se puede asociar a una función lineal, y además analizar si las magnitudes que intervienen son discretas o continuas, y si en las continuas se encuentra presente el tiempo. Trabajar solo con magnitudes discretas, para estos autores: "se corre el riesgo de omitir la interpretación de la constante como una razón de cambio y limitarse sólo a un análisis adimensional. Barajas et al. (2016), indica que, aunque facilita el tratamiento aritmético de la situación, oculta su naturaleza.

En esta propuesta, el uso de la NTIC con base en dispositivos electrónicos, juega un papel importante como herramienta de apoyo en los estudiantes para la obtención de datos experimentales de una situación real (toma de temperatura), y para el procesamiento de los mismos en el ajuste de la curva, el cual es llevado a una función lineal, permitiendo interpretar los procesos de control de temperatura. Lo anterior, es poner en contexto la función lineal a fin de que los estudiantes puedan observar su aplicación. Se plantea el diseño de una transposición didáctica de los objetos matemáticos, trasformando el saber matemático en un saber enseñado (Chevallard, 1991), mediante la contextualización del objeto matemático dentro de aplicaciones reales y concretas.

Llevar un objeto matemático a un entorno real, es un factor que puede ser motivador en los estudiantes, en cuanto a cómo y para qué usar las matemáticas. Por tanto, el objetivo de este trabajo es introducir con la ayuda de las NTIC como mediadoras de la enseñanza y aprendizaje, conceptos y aplicaciones en matemáticas que forman parte del sector industrial, para que los estudiantes puedan modelar fenómenos de trasferencia de calor en termocuplas, haciendo uso de la función lineal y afín para describir el comportamiento de sus variables y también predecir conductas de las mismas en el entorno de la instrumentación y control industrial.

Metodología

Se trató de una investigación de enfoque cuantitativo, diseño de campo, aplicada a una población de 26 estudiantes de la asignatura Cálculo Diferencial, con edades comprendidas entre los 17 a los 20 años, cursantes del primer semestre en el área de Técnica Profesional en Instrumentación y Control de una universidad colombiana. La metodología propuesta se desarrolló en 4 fases, las cuales se explican a continuación.

Fase 1: Diseño de la primera etapa didáctica. Esta fase se fundamenta en las competencias y habilidades que el estudiante debe poseer para encaminarse en la comprensión del fenómeno físico de transferencia de energía (calor), y en la función lineal y afín (representación como línea recta). Esta primera fase se dividió en dos secciones:

- En la primera sección se realizó un pretest de ideas previas con el fin de recolectar información relacionada con el proceso de transformación de la energía, y de los conocimientos que los estudiantes deben poseer en cuanto a la línea recta. Las ideas previas fueron en formato de preguntas abiertas, con las cuales se indagó sobre los conceptos de energía, procesos de transformación de la misma, y sobre la variable temperatura. En lo concerniente a los conocimientos matemáticos de la línea recta, consistió en una serie de preguntas de tipo abiertas, y otras destinadas a encontrar o dar solución a ejercicios de contexto, en los cuales se involucra la temperatura vs tiempo, y el voltaje vs. tiempo.
- La segunda sección consistió en realizar una serie de actividades como ubicar puntos en el plano cartesiano y dar las coordenadas de los puntos (operación inversa), esto con el fin de explorar las habilidades de los estudiantes y comenzar el proceso de construcción de los conceptos matemáticos de la función lineal y afín.

Fase 2: Diseño de la primera experiencia didáctica para la modelización del fenómeno físico. Esta primera experiencia didáctica se basó en actividades que siguen el modelo Cuvima (Cuevas y Villamizar, 2017), con el fin de poder introducir en los estudiantes los conceptos alusivos a una transformación de energía, a fin de que puedan construir un modelo matemático interpretativo del fenómeno físico. La aplicación del modelo Cuvima en el tema de la transformación de energía (calórica a eléctrica) se aprecia en la Figura 1.

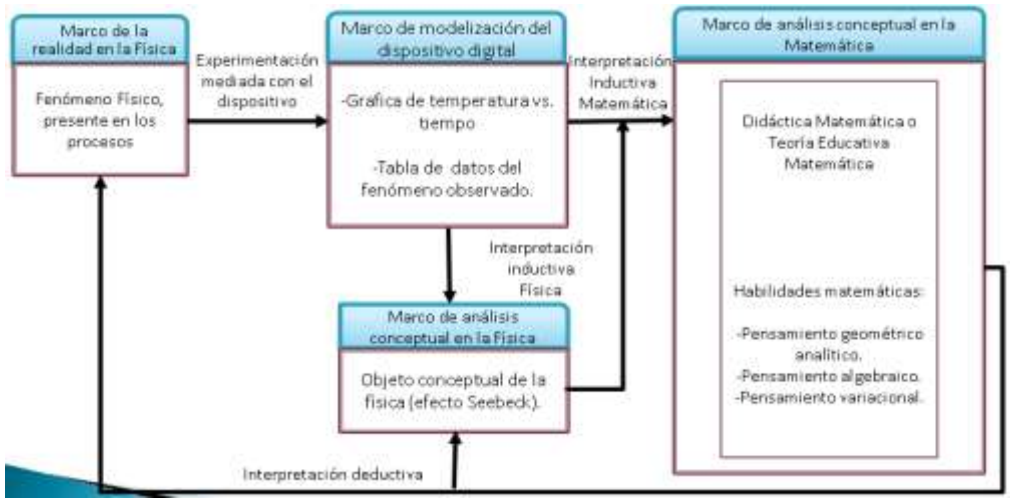


Figura 1. Adaptación del modelo Cuvima en el fenómeno de transferencia de calor.

Para ello se diseñó una serie de actividades que los estudiantes debieron resolver con la supervisión del docente. En el primer marco de la Figura 11 (*marco de la realidad en la física*), la experiencia comienza midiendo la temperatura del artefacto productor de calor, para lo cual los estudiantes harán uso de un termopar tipo K, el cual es un transductor encargado de tomar la energía calorífica y transformarla en voltaje (milivoltios). Para el segundo marco, (*marco de modelización del dispositivo digital*), se usó el termopar conectado al amplificador (AD595); sus datos son tomados por el Arduino y enviados al Smartphone o el computador, los cuales son visualizados en parejas (temperatura vs. voltaje). Los datos son tabulados y posteriormente llevados a una hoja de cálculo en GeoGebra para realizar su linealización y de esta forma obtener la representación gráfica del fenómeno físico.

El proceso de toma de temperatura directamente del termopar, haciendo uso de un dispositivo como lo puede ser un multímetro, no es una tarea fácil, debido a que a temperaturas pequeñas el dato que muestra el dispositivo, es demasiado pequeño, generando en el observador dudas y, en ocasiones, se pueda interpretar como alguna especie de ruido o inestabilidad del multímetro. Por tal motivo, se procede a la amplificación de este valor. Es trabajo del docente discutir estos fenómenos, y si lo ve conveniente, puede realizar el experimento de la toma directa de temperatura en el termopar.

Para el tercer marco de la Figura 11 (*marco de análisis en la física*), se exploran conceptos alusivos en la física, se indaga sobre la importancia de este termopar en esta experiencia y la necesidad de amplificar estos datos para facilitar su tratamiento después de la experimentación (*marco de modelización del dispositivo digital*). Es necesario que el profesor genere la discusión sobre estos resultados y con esto la interpretación del fenómeno físico (*interpretación inductiva en la física*).

Para el cuarto marco, (*marco de análisis conceptual en la Matemática),* se plantea una secuencia didáctica. En ésta, los estudiantes son guiados a crear un modelo matemático que permita la interpretación del fenómeno físico (*interpretación inductiva en la matemática*); estas actividades inician con la identificación de los ejes y su variable, punto de corte de la recta con el eje **y**. En la Figura 2, se presenta el modelo Cuvima modificado y adaptado para la presente investigación.

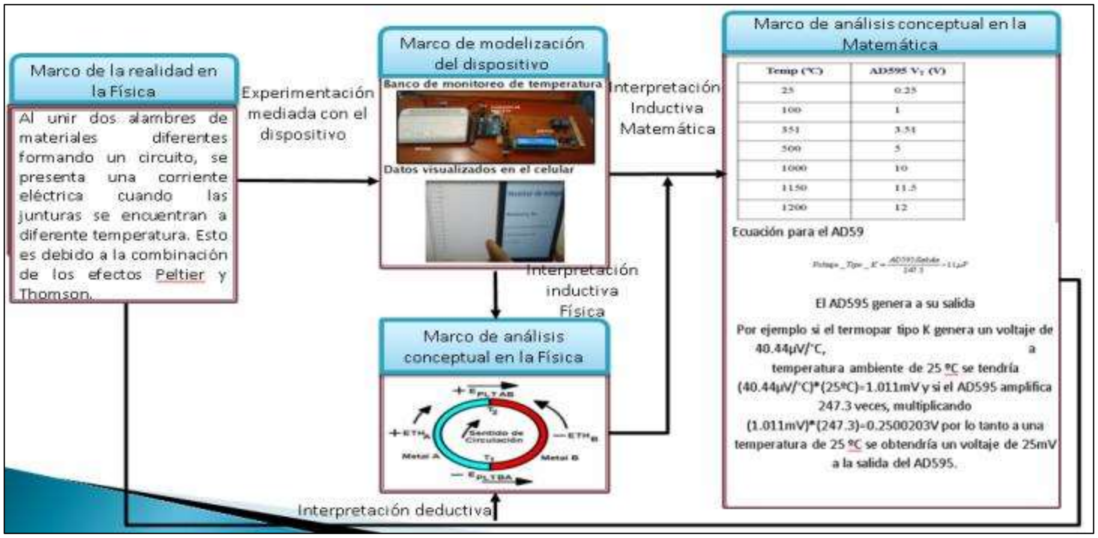


Figura 2. Modelo Cuvima para la interpretación inductiva-deductiva de la transferencia de energía. (Modificada de Cuevas, Villamizar y Martínez; 2017).

Dada la dificultad que se presenta al querer tomar la medida de voltaje directamente al termopar, es necesario el uso del AD595 para la amplificación y la compensación por la pérdida de las uniones de materiales. Con este dispositivo electrónico la función pasa de ser lineal a ser afín (a 0 ° C se tiene 2.72 mv). Los estudiantes tienen que calcular la pendiente (función afín). En este punto no se les dará la ecuación, a fin de que ellos de forma inductiva comprendan que para una función afín, la pendiente se calcula: (y2-y1)/(x2-x1). Este resultado será comparado con la ecuación de la recta dada por el GeoGebra.

Además, se busca que los estudiantes hagan uso de las tablas ideales del termopar, en las cuales buscarán el dato de voltaje asociado a cada dato de temperatura y pueden compararlo experimental con lo teórico; de esta forma se tendrá certeza de que el modelo matemático se puede usar para comprender e interpretar los conceptos físico del fenómeno (*interpretación deductiva en la física*).

Cuando se hace uso solo de las tablas ideales del termopar (temperatura vs. voltaje), cuya pendiente es 40.44μV/°C aproximadamente, la representación gráfica es lineal, ya que para 0°C se tiene 0 voltios. Al igual que se analizó en las actividades anteriores en la hoja de cálculo, pero con los datos amplificados, se espera que los estudiantes interpreten y comprendan cómo se calcula la pendiente cuando una función es lineal y cuando es afín.

En la ecuación del AD595: salida_AD595= (Voltaje_Termopar+11µv)*247.3, los estudiantes deberán realizar el despeje de la misma, identificar las variables dependiente e independiente, el punto de corte con el eje **y**, se espera que comprendan que el Voltaje_Termopar es el voltaje que se encuentra en la tabla ideal del termopar, para lo cual se multiplica el factor de 40.44µV/º C por cada dato de temperatura para hallar el dato de voltaje, deduciendo que este factor, al ser multiplicado por el 247.3 (factor de amplificación), resulta siendo la pendiente de la ecuación del AD595.

El objetivo de esta experiencia es que los estudiantes de forma inductiva, comprendan que por medio de la función lineal y afín se pueden modelar procesos de transformación de energía, haciendo uso del termopar como elemento transductor. Según Duval (2004), para alcanzar una correcta interpretación de un concepto matemático, se debe hacer uso y comprensión de diferentes formas de representación e interactuar dentro de las mismas, y además reforzar los procesos de realizar las operaciones inversas, que concluyan de las gráficas halladas y las asocien con las diferentes variables.

Fase 3: Diseño de la segunda experiencia didáctica para la modelización del fenómeno físico. Esta fase se desarrolla con el objetivo de que los estudiantes refuercen los conocimientos adquiridos de la transformación de energía y su modelo matemático, y que además puedan observar como este fenómeno físico es variante en el tiempo y puede ser lineal ascendente, con una pendiente constante, si la fuente de calor que se está midiendo también es constante. El docente debe estar atento de que el elemento de calor no esté siendo afectado por algún agente externo, como lo puede ser el viento, ya que puede hacer que varié el calor aplicado al dispositivo (termopar) usado para medir la variable.

La experiencia didáctica es muy similar a la primera y se usan los mismos dispositivos tecnológicos. La diferencia principal radica en que las variables tomadas serán tiempo y temperatura (*marco de la realidad en la física*). Estos datos serán tabulados y llevados al GeoGebra, para la realización de la representación gráfica (*marco de modelización del dispositivo digital*).

Las actividades estarán centradas en la interpretación del modelo matemático (*marco de análisis en la matemática*). Los estudiantes podrán interactuar en el GeoGebra con los deslizadores (m y b), los cuales irán moviendo respectivamente. Con esto se espera que los estudiantes conceptualicen los conceptos de pendiente y punto de corte (eje *y*), y a su vez estén comparando con la ecuación de la recta y=mx+b y puedan concluir lo que sucede cuando se mueve el deslizador m (pendiente), y lo que sucede cuando se mueve el deslizador b (corte con el eje **y**).

Asimismo, haciendo uso de los deslizadores, ajustarán la recta con los datos de tiempo y temperatura (x, y), los cuales estarán representados en puntos en el plano cartesiano; deberán identificar la pendiente y el punto de corte con el eje **y**. Con el fin de que puedan predecir datos futuros, deberán hacer uso de su pensamiento variacional y poder dar datos de temperatura y tiempos, partiendo de unas condiciones iniciales. En la última actividad se espera, que los estudiantes puedan identificar que la función lineal y afín, se puede usar para modelizar otros fenómenos físicos.

Fase 4: Diseño del postest de actividades. Se busca explorar y corroborar los conceptos adquiridos alusivos a la interpretación del modelo matemático, con la aplicación de las experiencias didácticas y la solución de las actividades. Las actividades correspondientes al postest, parten de una representación gráfica, en la cual los estudiantes deben hallar la ecuación de la recta. Seguidamente realizarán la operación inversa, partiendo de una ecuación de la forma Ax+By=C la cual deben despejar y darla de la forma y=mx+b. Además, deben seleccionar la pendiente y el punto de corte con el eje **y**, y realizar la representación gráfica. Por último, se les presenta una tabla de datos, con la cual deben encontrar la ecuación de la recta y graficarla Se espera que con estas actividades, se refuercen las habilidades y las formas de interactuar dentro de los diferentes registros de representación.

Resultados

1. Resultados del pretest de ideas previas sobre la transformación de la energía y conocimientos previos matemáticos.

Esta primera fase de actividades se realizó de forma individual a los 26 estudiantes. En la Figura 3 se muestran los resultados relacionados a la transformación de la energía y en la Figura 4, lo concerniente a los conocimientos previos matemáticos.

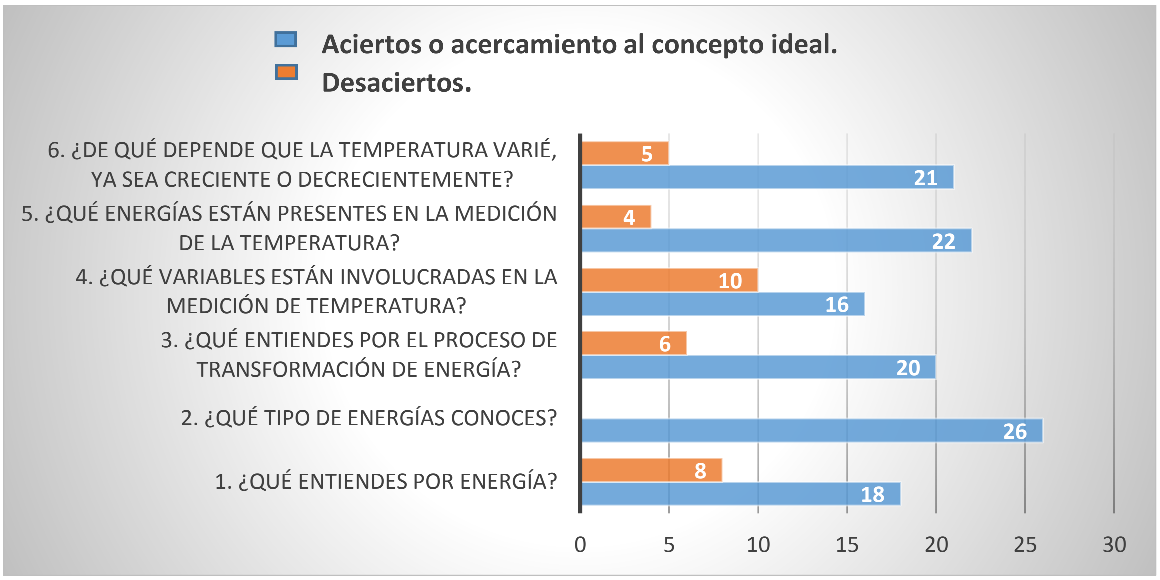


Figura 3. Resultados de las respuestas a las ideas previas sobre la transformación de la energía.

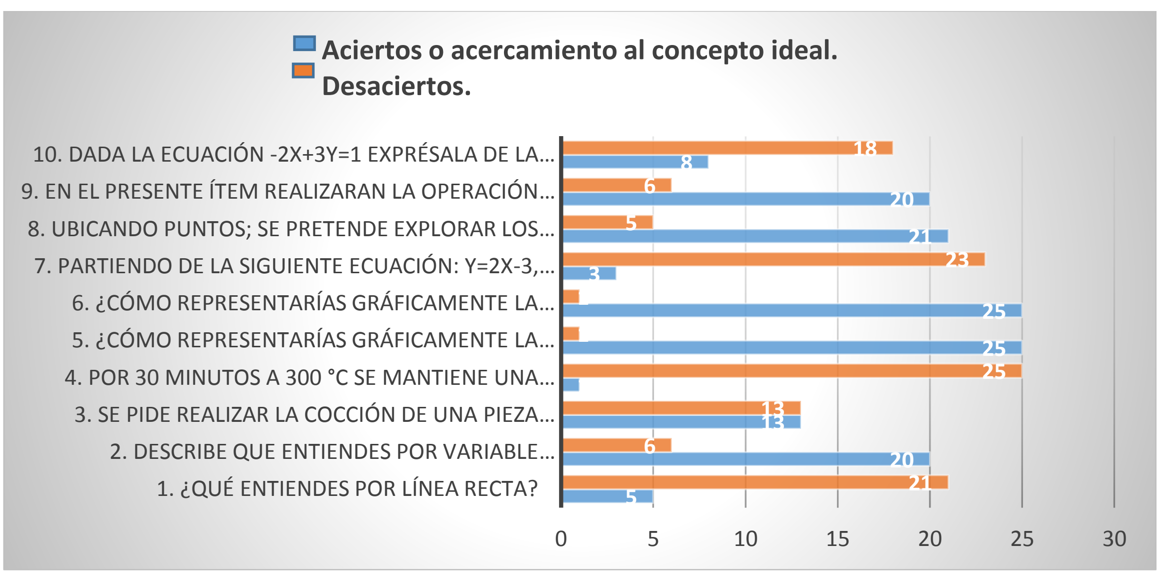


Figura 4. Resultados de las respuestas de los conocimientos previos matemáticos.

En cuanto a los resultados de la Figura 3, se tiene:

- 18 estudiantes respondieron acertadamente o estuvieron muy cerca del concepto ideal, según los cual interpretaron la energía como la capacidad de un cuerpo de producir una acción. 8 estudiantes estuvieron muy lejos de una correcta apreciación y tomaron la energía como una especie de trabajo o fuerza.
- El 100% de los estudiantes demostraron tener conocimiento por lo menos un tipo de energía. La gran mayoría tuvo en cuenta la energía térmica y la eléctrica.
- 20 estudiantes tuvieron un acercamiento al concepto de proceso de transformación de la energía. En muchos de los casos ejemplificaron cómo cambiar de energía calorífica a energía eléctrica. 6 estudiantes no respondieron satisfactoriamente, incluso 3 de ellos dejaron en blanco.
- 16 estudiantes asociaron por lo menos una variable que se encuentra presente en el proceso de medición de temperatura: temperatura, voltaje, u otra. 0 estudiantes mencionaron algunas variables, pero ninguna relacionada con la pregunta.
- Cuando se indaga sobre las energías que se encuentran presentes en la medición de la temperatura, 22 estudiantes contestaron acertadamente y por lo menos nombraron dos tipos. Los otros 4 nombraron algunos tipos, pero no tienen nada que ver en dicho proceso.
- 21 estudiantes dieron una definición correcta con respecto al comportamiento creciente y decreciente de la temperatura. Asociaron que esto se debe al tiempo en que se exponga el instrumento medidor al calor, la intensidad del calor; algunos mencionaron que los factores ambientales pueden influir. Los restantes 5 estudiantes estuvieron lejos de un concepto valido.

En cuanto a los resultados de la Figura 4, destaca que:

- 5 estudiantes tuvieron un acercamiento al concepto de línea recta. Concluyeron por ejemplo la distancia más corta entre dos puntos, comparando estos con los demás. Se decidió registrarlos como aciertos o acercamiento al concepto ideal, ya que los otros 21 estudiantes dieron concepciones muy distantes, como que es una línea que se utiliza para hacer mediciones rectas.
- 20 estudiantes contestaron algo similar a que la variable dependiente depende de otras variables para que varíe, y que la independiente no depende de ninguna, pero no asociaron estas variables a la ecuación de la línea recta (x, y).
- De los 13 estudiantes que tuvieron un acercamiento al concepto, solo uno acertó qué era la pendiente. Los demás concluyeron de forma muy similar en cuanto a que por cada minuto la temperatura se incrementaba 5 grados. Los otros 13 estudiantes estuvieron en desacierto, ya que muchos lo asumieron como la variable de la función, incluso algunos no contestaron.
- Solo 1 estudiante halló la pendiente: 10° C/min. Los demás estudiantes dieron conceptos errados y la gran mayoría no contestó algo.
- 25 estudiantes usaron la línea recta para representar el suceso como lo evidencia. La Figura 5 ubica los puntos adecuadamente, mantuvieron la escala para cada eje, el estudiante restante solo ubico los puntos en el plano cartesiano, como se muestra en la Figura 6.

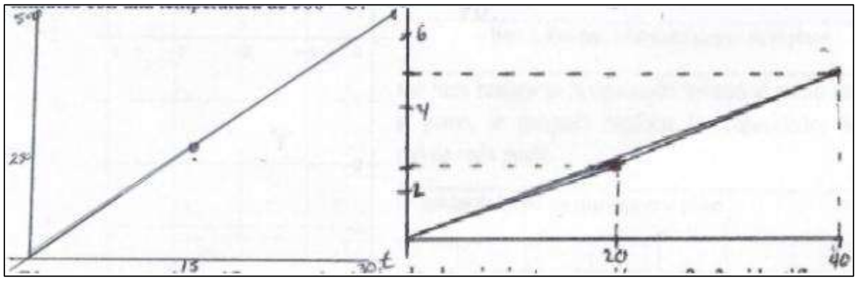


Figura 5. Uso de la línea recta como forma de representación.

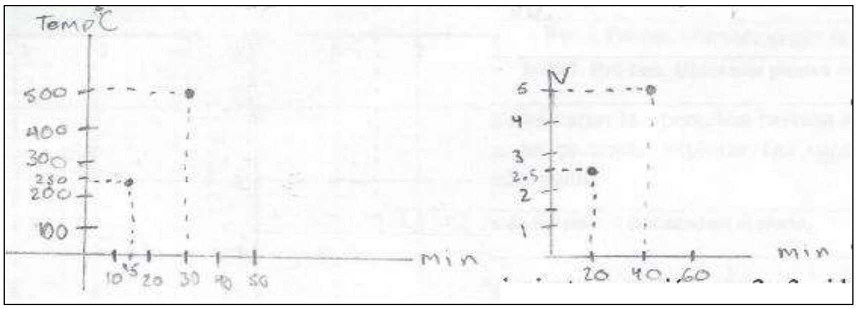
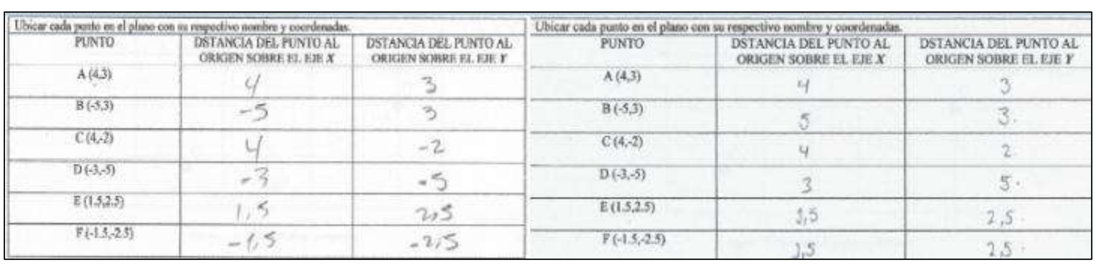


Figura 6. Inadecuada forma de representar una línea recta.

- Solo 3 estudiantes tuvieron aciertos y solo 1 de ellos halló la pendiente, la variable dependiente y la independiente adecuadamente. Los otros 2 solo hallaron las dos variables. Los 23 estudiantes dieron ideas inadecuadas.
- 21 estudiantes presentaron conocimientos y habilidades en reconocer la abscisa y la ordenada de cada punto y la ubicación del mismo. 5 estudiantes presentaron inconvenientes con la ubicación de estos elementos, y no tuvieron en cuenta los signos. 3 de ellos confundieron las coordenadas de los mismos, como se muestra en la Figura 7.



Ubicar cada punto en el plano con su respectivo nombre y coordenadas.

PUNTO	DISTANCIA DEL PUNTO AL ORIGEN SOBRE EL EJE *X*	DISTANCIA DEL PUNTO AL ORIGEN SOBRE EL EJE *Y*
A (4,3)	4	3
B (-5,3)	-5	3
C (4,-2)	4	-2
D (-3,-5)	-3	-5
E (1.5,2.5)	1,5	2,5
F (-1.5,-2.5)	-1,5	-2,5

Ubicar cada punto en el plano con su respectivo nombre y coordenadas.

PUNTO	DISTANCIA DEL PUNTO AL ORIGEN SOBRE EL EJE *X*	DISTANCIA DEL PUNTO AL ORIGEN SOBRE EL EJE *Y*
A (4,3)	4	3
B (-5,3)	5	3.
C (4,-2)	4	2
D (-3,-5)	3	5.
E (1.5,2.5)	1,5	2,5
F (-1.5,-2.5)	1,5	2,5

Figura 7. En el cuadro de la izquierda se observa la correcta apreciación de las variables con sus respectivos signos, en el cuadro de la derecha existe una inadecuada asignación de signos en las coordenadas de algunos puntos.

- Partiendo de puntos ya ubicados en el plano, 20 estudiantes realizaron la actividad satisfactoriamente. Los otros 6 presentaron inconvenientes, sobre todo con puntos cuyas coordenadas no eran números enteros, tal y como se muestra en la Figura 8.

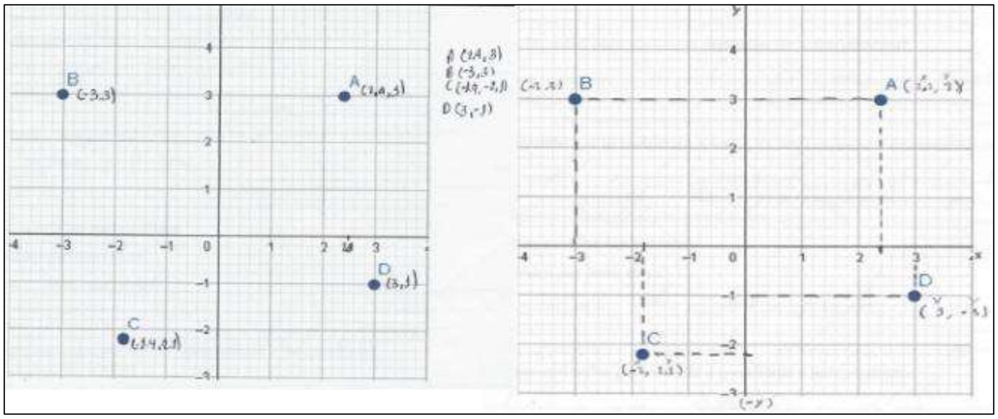


Figura 8. A la izquierda puntos con sus correctas coordenadas, a la derecha puntos con algunas coordenadas erróneas.

- Haciendo uso de la ecuación de una línea recta (-2x+3y=1), se debía despejar y darla de la forma y=mx+b. Al respecto, solo 8 estudiantes realizaron la operación correcta; los demás 18 estudiantes presentaron dificultades en realizar los despejes o no identificaron la pendiente m y el punto de corte con el eje **y**.

2. Resultados de la primera etapa didáctica.

Con los 26 estudiantes se realizaron grupos de 2 para un total de 13 grupos, los cuales participaron en esta primera etapa didáctica (toma de datos de temperatura y voltaje), y cuyos resultados se evidencian en la Figura9.

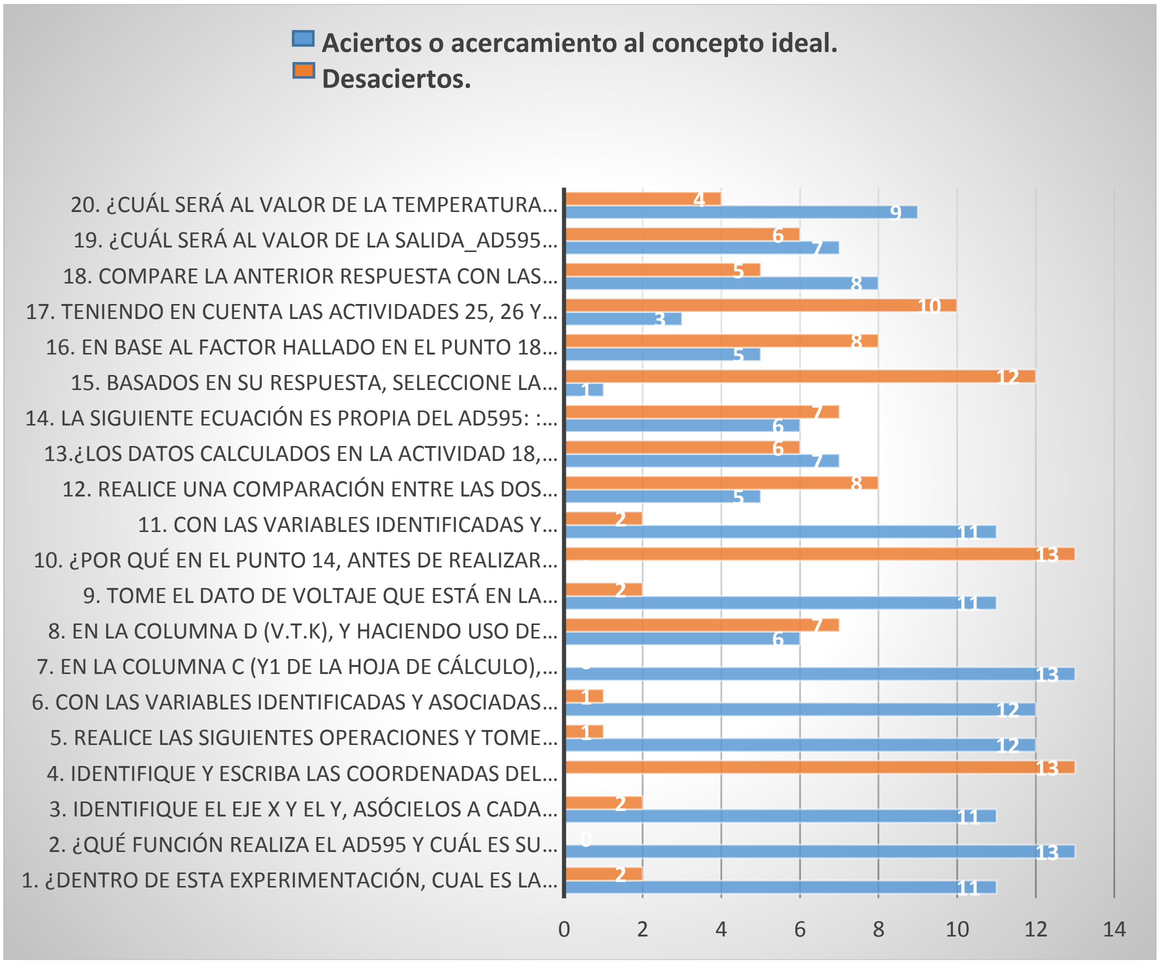


Figura 9. Resultados de la primera experiencia didáctica (Temperatura vs. Voltaje).

En cuanto a los resultados de la Figura 9, se tiene que:

- 11 grupos contestaron satisfactoriamente, identificando el termopar como un dispositivo transductor que transforma la energía calorífica en eléctrica.
- Respecto a la función del AD595, los 13 grupos lo identificaron como el amplificador de instrumentación y cuya función principal es la amplificación de los datos entregados por el termopar, además de la compensación que se hace por las uniones de materiales.
- 11 grupos tuvieron acierto, identificaron el eje **x** y lo asociaron a la variable temperatura. De igual manera, el eje **y** lo asociaron con la variable voltaje.
- La función es afín, ya que para 0° centígrado existen 2.72 m. Al respecto, los 13 grupos asumieron que las coordenadas o corte con el eje **y**, eran (0,0), ya que a simple vista la recta pasa por ese punto (solo tuvieron en cuenta la representación gráfica, dejando a un lado la algebráica).
- 12 grupos realizaron la operación correctamente y concluyeron que los datos eran iguales, pero no asumieron que esta constante corresponde a la pendiente de la presente recta. El otro grupo no realizó satisfactoriamente el presente ítem.
- Luego de identificar la función de la recta dada por el GeoGebra (modelización del proceso, y=mx+b) y compararla con el dato hallado en el punto anterior (0.01 que corresponde a la pendiente de la recta); 12 grupos encontraron la similitud del dato con el de la función,

aunque esto representó una tarea muy sencilla, pero se les dificultó en identificar que ese dato corresponde a la pendiente de la función.

- Los13 grupos realizaron la actividad de remplazar los datos de temperatura (x) adecuadamente. El objetivo es que remplazaran estos datos tomados con el Smartphone en la función dada por el GeoGebra y encontraran los valores de la variable dependiente.
- Haciendo uso de las tablas reales del termopar, 6 grupos argumentaron después de realizar la comparación de las columnas, que en esta nueva columna sus datos son más pequeños debido a que no están amplificados. Los otros 7 grupos concluyeron solo en la decir que los datos eran más pequeños o que no había similitud con otra columna.
- Al manejar Temperatura vs. V.T.K), 11 grupos tuvieron aciertos, pero a la pendiente la llaman la constante. Tienen dificultades en identificarla la pendiente de la función por su nombre. Los otros 2 grupos tomaron los datos de las columnas equivocadas.
- Ningún grupo argumentó que para hallar la pendiente cuando la función es lineal, solo es necesario tomar las coordenadas de un punto, ya que la línea recta pasa por el punto (0,0).
- Haciendo uso del GeoGebra (modelización del proceso), 11 grupos identificaron la función (Temperatura vs. V.T.K), la compararon con el dato de pendiente hallado en el punto 9 y a ese dato lo reconocen solo como una constante.
- Se realizó una comparación de las dos rectas: la primera es con el uso del AD595 (datos del termopar amplificados), y la segunda con los datos de la tabla real del termopar (datos del termopar sin amplificar). En este punto solo 5 grupos definieron que las dos rectas son diferentes, ya que una representa los datos del termopar amplificados, y la otra son los datos de temperatura, pero sin amplificar. Los otros 8 grupos dieron ideas inadecuadas y asumieron que las dos rectas eran iguales o tenían mucha similitud.
- Los estudiantes no asumen el nombre real para la pendiente y siempre la toman como una constante. 7 grupos la sumieron como tal y los demás 6 grupos dieron conceptos erróneos como que es el inicio de la recta.
- Respecto a la ecuación propia del AD595, los estudiantes tenían que realzar el despeje y seleccionar la respuesta correcta de la forma y=mx+b (salida_ AD595= 247.3*Voltaje_Termopar+2.72(mv)). Se encontró que solo 6 grupos escogieron bien, los demás seleccionaron respuestas equivocas.
- Con la ecuación del AD595 ya en su forma y=mx+b, los estudiantes tenían que identificar la variable dependiente, la variable independiente y el punto de corte con el eje **y**. Solo un grupo seleccionó la respuesta correcta: Variable independiente=Voltaje_Termopar, dependiente= salida_ AD595, punto de corte= 2.72 mv.
- El amplificador de instrumentación amplifica los datos del termopar por 247.3. El dato de pendiente y que corresponden a la ecuación de la recta de Temperatura vs. V.T.K al ser multiplicado por el 247.3, representa la pendiente de la ecuación del AD595 ≈ 0.01. Los estudiantes debían hallarlo y compararlo con la pendiente de la ecuación del amplificador. 5 grupos presentaron aciertos los otros 8 grupos expresaron ideas erróneas y no realizaron las operaciones de aproximación y redondeo correctamente.
- Remplazando el Voltaje Termopar = 0.00004*Temperatura, donde el 0.00004 representa la pendiente de la recta de Temperatura vs. V.T.K (punto 9); la ecuación quedaría salida_ AD595= 0.01*Temperatura+2.72. Solo 3 grupos seleccionaron la respuesta correcta.
- Se debía realizar la comparación del resultado anterior con las dos líneas del GeoGebra y concluir con cual tenía semejanza. 8 grupos concluyeron que con la recta L1. Los otros 5 grupos asumieron erróneamente que con la recta L2.

- Haciendo uso de la ecuación salida_ AD595= 0.01*Temperatura+2.72, se busca encontrar el valor de la salida_AD595 para una temperatura de 200 ° C. 7 grupos hallaron satisfactoriamente la respuesta: 2.0072 v. Los demás grupos realizaron la operación inadecuadamente.
- Se utilizó la ecuación anterior pero esta vez para calcular la temperatura para 3 voltios, cuyo resultado son 300° C. 9 grupos presentaron adecuadamente la respuesta.
-

3. Resultados de la segunda etapa didáctica.

En esta segunda experiencia (toma de datos de tiempo y temperatura), participaron los mismos 26 estudiantes y de igual forma se organizaron en grupos de 2 para un total de 13 grupos. En la Figura 10, se encuentran plasmados los resultados de esta actividad.

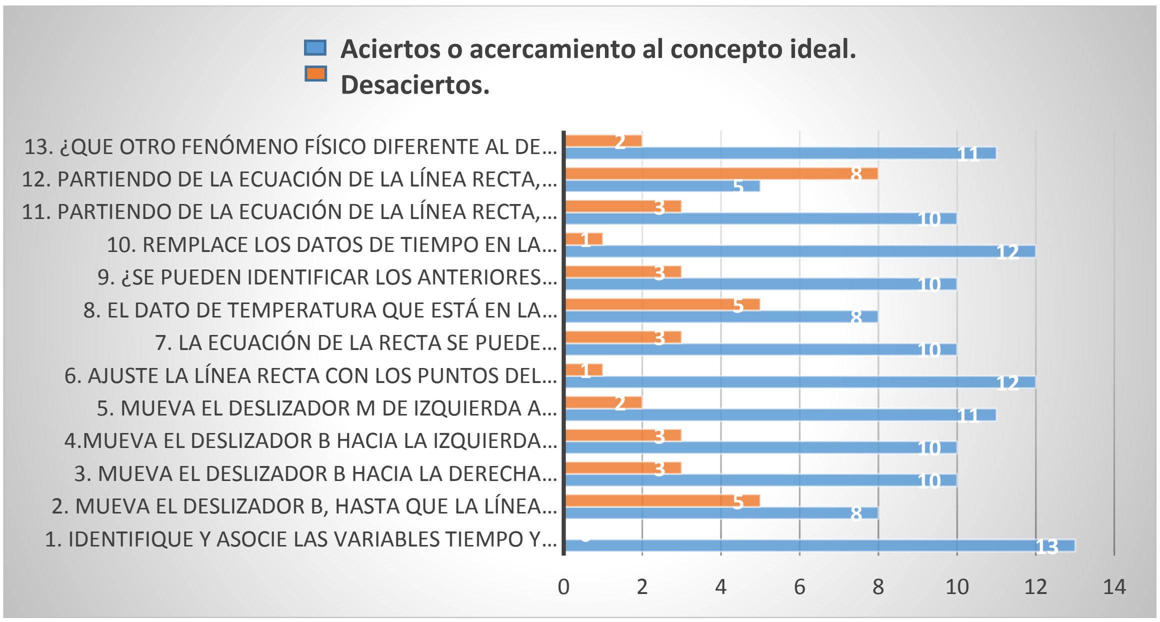


Figura 10. Resultados de la segunda experiencia didáctica (Tiempo vs. Temperatura).

Respecto a los resultados de la Figura 10, se tiene que:

- Los 13 grupos identificaron y asociaron el eje **x** con la variable independiente tiempo y de igual manera al eje **y** con la variable dependiente temperatura.
- 8 grupos ubicaron e hicieron pasar la recta por el punto (0,0) y asumieron que para una x=0 existe una y=0. Los demás grupos concluyeron que el hecho de que la recta pase por ese punto significa que es el comienzo de la misma.
- Con el fin de que los estudiantes comprendieran que representa el punto de corte de la recta con el eje **y**, los estudiantes debían mover el deslizador hacia la derecha, reconocer la ecuación de la misma e identificar tanto en el deslizador como en la ecuación el punto de corte **b**. 10 grupos realizaron la actividad satisfactoriamente y reconocieron la **b** como el punto donde para un tiempo de 0 segundos existe un valor diferente de temperatura mayor a 0.
- 10 grupos realizaron la actividad correctamente y ubicaron la recta por puntos que estaban por debajo del origen (0,0) y asumieron que para tiempos de 0 segundos existían temperaturas por debajo de los 0° centígrados. Los demás grupos concluyeron diciendo que la recta disminuía.}

- 11 grupos reconocieron que a medida que se iba moviendo el deslizador m la recta se iba inclinando y asumieron que la constante que acompañaba la variable independiente **x,** es la pendiente de la recta. Los grupos restantes se limitaron solo a tomar nota de diferentes ecuaciones de la recta.
- Partiendo de la experiencia didáctica de la toma de datos de Tiempo vs. Temperatura y después de ubicar estos puntos en el plano, se debía ajustar los deslizadores y con esto hacer coincidir la recta con los presentes puntos. 12 grupos concluyeron efectivamente afirmando que el proceso tiene un comportamiento lineal y que para un tiempo de 0 segundos existe una temperatura aproximadamente a la temperatura ambiente, el grupo faltante no realizaron el ajuste.
- Posterior al ajuste manual del proceso (Tiempo vs. Temperatura), 10 grupos reconocieron que por medio de la función afín (y=mx+b) se puede modelizar este fenómeno e identificaron con propiedad la pendiente **m** y el punto de corte con el eje **y** (b). Los otros 3 grupos presentaron datos erróneos.
- Partiendo de la hoja de cálculo del GeoGebra (Tiempo vs. Temperatura), debían calcular la pendiente de la función afín. 8 grupos realizaron exitosamente la actividad y reconocieron que esta constante representa la pendiente. Los demás 5 grupos a pesar de que hallaron bien los datos no identificaron que se trataba de la pendiente.
- 10 grupos además de reconocer que el dato calculado en el punto anterior corresponde a la pendiente, realizaron la comparación con la función afín (y=mx+b) y concluyeron que esta representa la **m** (pendiente). Algunos grupos siguen con problemas al momento de identificarla y a pesar de que saben que es una constante no la llaman por su nombre real, de hecho, se esperaba que basados en este punto y después de realizar la comparación de los datos con la función del GeoGebra, corrigieran el punto anterior.
- Solo un grupo no realizó la actividad correctamente; los demás encontraron la similitud de la nueva columna con la de temperatura de la hoja de cálculo (GeoGebra).
- Haciendo uso de la función afín (Tiempo vs. Temperatura), se buscaba que los estudiantes encontraran datos futuros de temperatura para diferentes tiempos. 10 grupos realizaron la actividad sin ningún inconveniente; los otros 3 grupos presentaron dificultad sobre todo con las unidades y las aproximaciones.
- A pesar de que es muy similar al anterior, su diferencia está en que se debe calcular datos futuros de tiempo partiendo de datos de temperatura (contrario al anterior). Solo 5 grupos realizaron el despeje de la variable independiente (tiempo) correctamente y calcularon efectivamente los datos. Los demás grupos tuvieron dificultad en el despeje de la ecuación.
- Los estudiantes debían exponer otros fenómenos los cuales se puedan modelizar haciendo uso de la función lineal y afín. 11 grupos definieron algunos como fenómenos en los que existe fuerzas, presiones y caudales constantes.

4. Resultados del postest. Se evidencia un cambio conceptual comparado con el pretest de conocimientos previos matemáticos. Como en las anteriores actividades se formaron 13 grupos. En el postest se realizaron 3 actividades. La primera consistió en que, partiendo de la línea recta solo con los puntos ubicados, pero sin sus coordenadas, se debía hallar la ecuación de la misma. En la segunda actividad debían desarrollar la operación inversa, dada la ecuación realizar la representación gráfica. En el tercer punto, dada una tabla de valores, hallar la ecuación y realizar la gráfica. Al respecto, se encontraron los siguientes resultados:

- La solución en cuanto a y, es y= x-1. 9 grupos seleccionaron la respuesta correcta, los grupos restantes presentaron dificultad con los signos, según se muestra en la Figura 11.

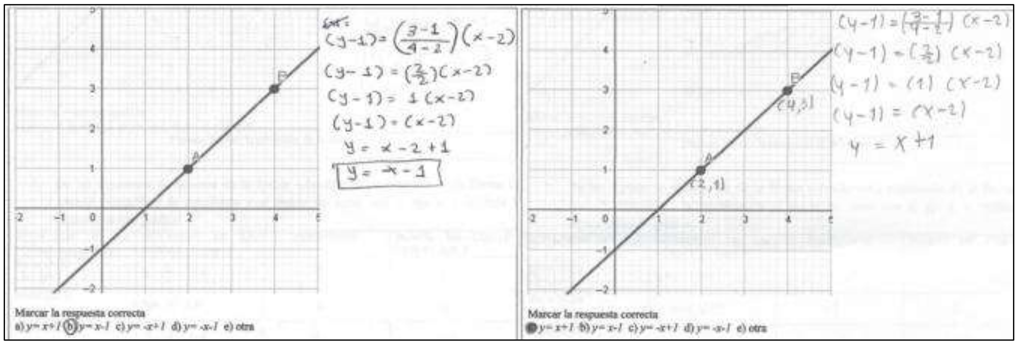


Figura 21. A la izquierda se presenta la solución correcta y a la derecha la incorrecta.

- La siguiente solución es y= -x. 8 grupos seleccionaron la respuesta correcta. Los 5 grupos restantes presentaron dificultad ya que en el denominador debían de hacer la resta de números negativos y esto les genero confusión, como se muestra en la Figura 12.

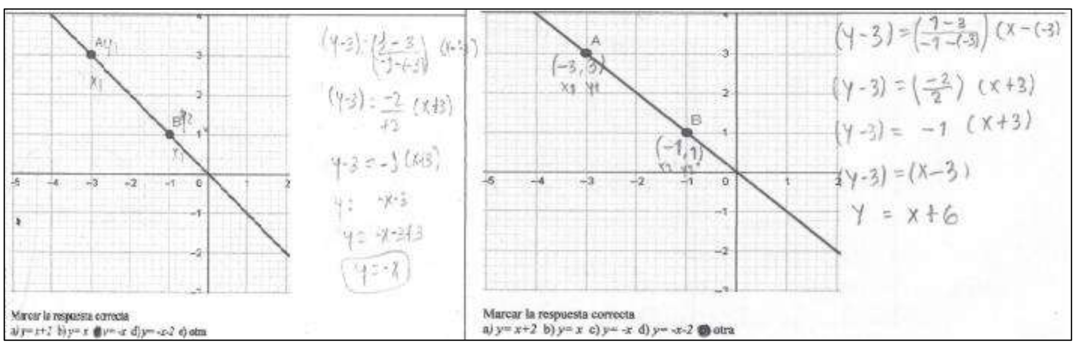


Figura 32. A la izquierda se presenta la solución correcta y a la derecha la incorrecta.

- La siguiente solución es y= x+1. 10 grupos seleccionaron la respuesta correcta, en los grupos restantes se evidenciaron problemas al despejar la ecuación, como se muestra en la Figura 13.

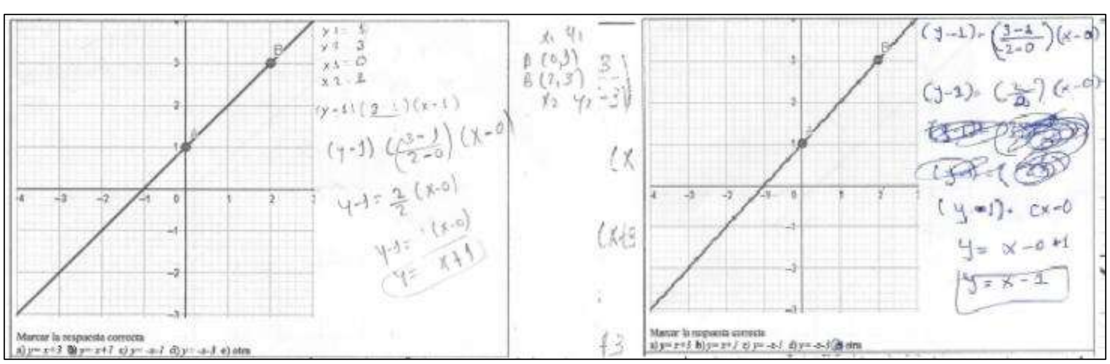


Figura 43. A la izquierda se presenta la solución correcta y a la derecha la incorrecta.

- Para la ecuación de la forma y=mx+b, y= (2/3)x+1/3 cuya pendiente es 2/3 y el punto de corte con el eje **y** es 1/3. 9 grupos seleccionaron la respuesta correcta, los grupos restantes presentaron dificultad y hallaron ecuaciones como: y= (2/3)x+1, como se muestra en la Figura 14.

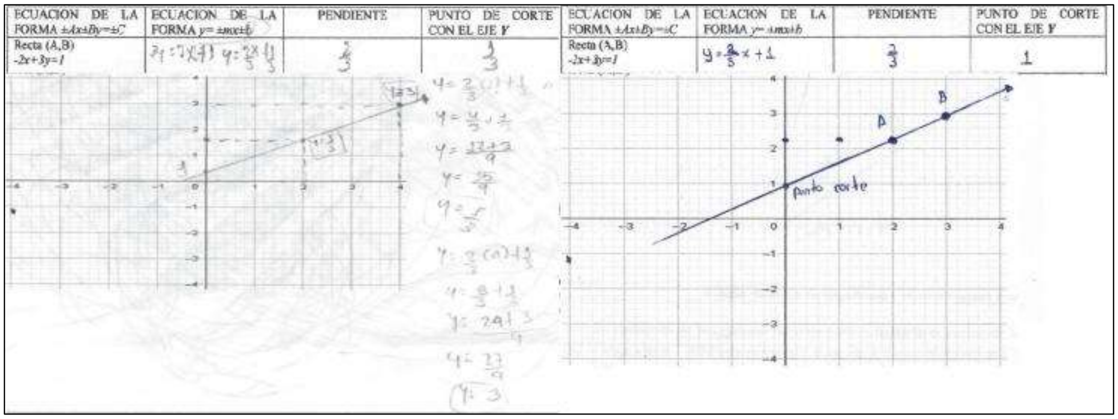


Figura 14. A la izquierda se presenta la solución correcta y a la derecha la incorrecta.

- La ecuación de la forma *y=mx+b* es *y= x* cuya pendiente es *1* y pasa por el origen (0,0). 12 grupos seleccionaron la respuesta correcta, el grupo faltante no realizó la actividad, como se muestra en la Figura 15.

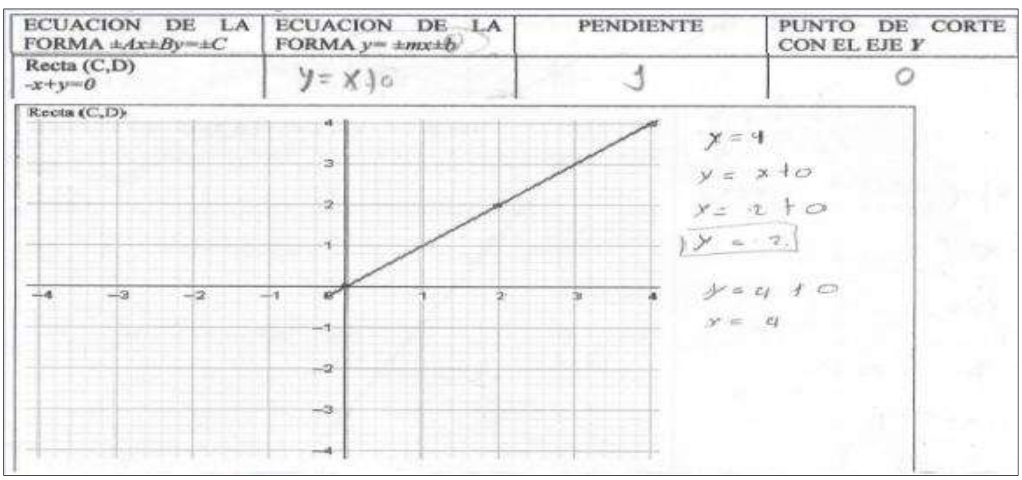


Figura 15. Solución correcta, recta y=x.

- En la ecuación de la forma y=mx+b, y= -(3/4)x+1, cuya pendiente es -(3/4) y el punto de corte con el eje **y** es 1. Los 13 grupos presentaron dificultades al momento de despejar la ecuación, según se muestra en la Figura 16.

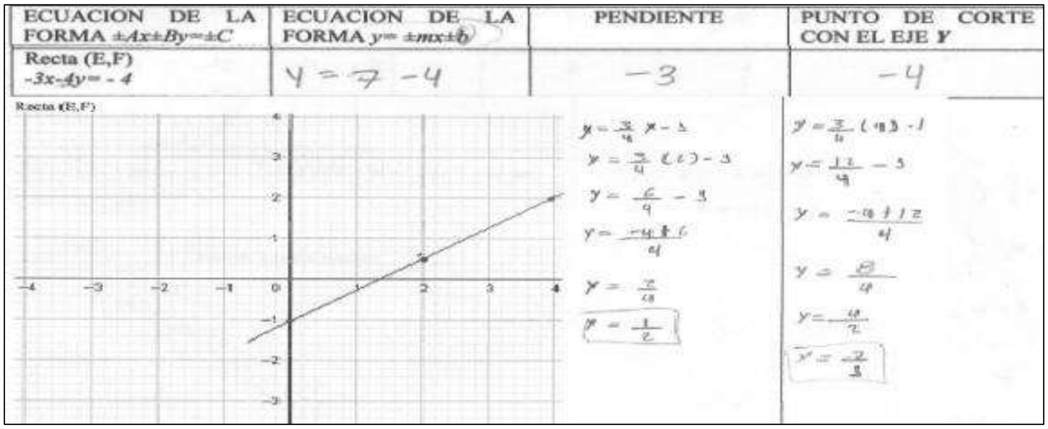


Figura 16. Solución incorrecta.

- Partiendo de una tabla de valores, los estudiantes debían hallar la ecuación de la recta y la representación gráfica. Respecto a este punto, 10 grupos hallaron correctamente la ecuación (y= 2x-2), su respectiva gráfica, la pendiente y el punto de corte con el eje **y** (m= 2 y b= -2), según se presenta en la Figura 17.

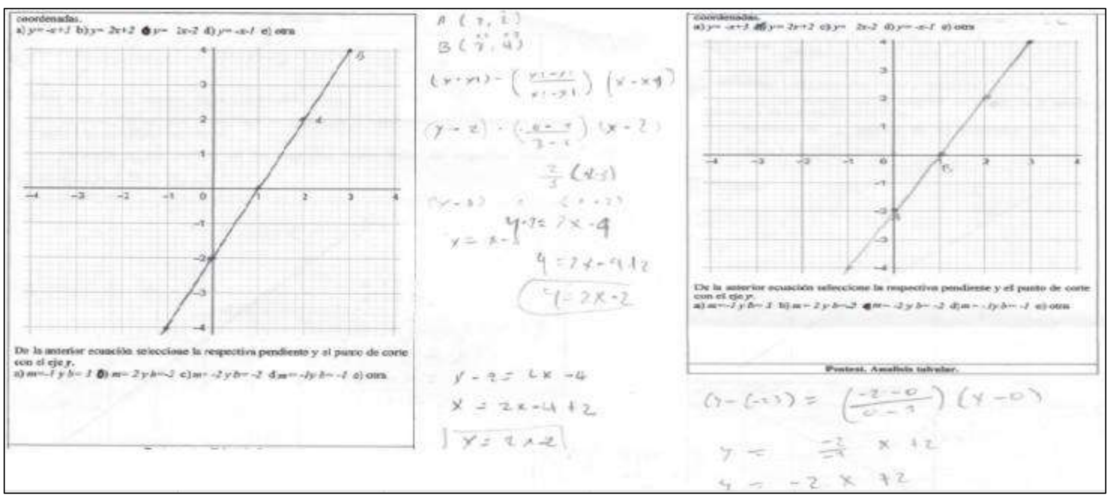


Figura17. A la izquierda se presenta la solución correcta y a la derecha la incorrecta.

Discusión

Se propuso como objetivo utilizar las NTIC para el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo en la educación superior, sometiendo el proceso de enseñanza a una transposición didáctica, pasando de la didáctica tradicional al uso de herramientas para el modelado matemático como el Cuvima, con el apoyo de dispositivos electrónicos y otros programas de apoyo para la tabulación y graficación tales como el GeoGebra. Como lo plantean Villena y Rivas (2019), en torno a la integración de la tecnología en la enseñanza del cálculo, este proceso de enseñanza es dinámico y debe lograrse la integración de cuatro vertientes: alumno, profesor, conocimiento y tecnología, siendo éstos un desafío en la educación superior en la actualidad.

La transposición didáctica buscó movilizar a los estudiantes de un aprendizaje estático predeterminado de las matemáticas, a uno significativo contextualizado, en el cual, de acuerdo con Cerda, Pérez, Casa y Ortega (2017), juegan un rol fundamental variables contextuales o socio cognitivas asociadas a la resolución de problemas de la realidad. Al someter a los 26 estudiantes a las actividades didácticas para la enseñanza de la función lineal y afín, se encontró una mayor motivación hacia el aprendizaje, a la vez que mejores resultados que los obtenidos en el pretest. Las evidencias en el contexto mundial indican que incorporar las TIC y las herramientas de apoyo en la enseñanza de las matemáticas, logra mejorar los resultados del aprendizaje (Arteaga, Medina y del Sol, 2019).

Para estos autores, por ejemplo, el GeoGebra "…no solo permite resolver de manera rápida y segura los más variados y diversos problemas … sino también, porque es una herramienta que permite estimular y desarrollar la creatividad de los alumnos, al permitirle descubrir y construir los conocimientos..." (Arteaga, Medina y del Sol, 2019, p.1). Al respecto, los resultados de los estudiantes en las dos fases de implementación didáctica, demostraron que, pese a las fallas cometidas, hubo mejora en los aciertos y non tanto en los resultados, sino en el proceso de desarrollo de las actividades. Aunque se presentaron dificultades en el despeje de ecuaciones, resta de números negativos, graficación, escritura de ecuaciones, entre otros propios del cálculo tradicional, hubo un empuje mayor en comprender cómo estas ecuaciones estaban relacionadas con situaciones del entorno, con fenómenos de la vida humana explicable desde las matemáticas, lo cual es el objetivo ontológico central de la transposición didáctica realizada.

Al respecto, se trata de que el docente logre profundizar en el proceso y no tanto en los resultados, ya que, al comprenderse el origen y comportamiento de una ecuación, se obtendrán mayores aciertos en la búsqueda de respuestas (Carvajal y Fonseca, 2019). En efecto, tal y como se evidenció en el estudio, Grisales (2018), comenta que el uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas despierta la intuición y el interés de relacionar fenómenos, y es la TIC el punto de anclaje en el proceso, ya que las mismas les son significativas al estudiante, contrario a lo que han sido las matemáticas. Los resultados del presente estudio demostraron mayor dominio de los contenidos del cálculo, y del uso de la función lineal y afín, para la explicación de procesos térmicos industriales. Ello ratifica la importancia de que el estudiante deba estar en continua actividad académica conceptual para el logro de desarrollo de habilidades matemáticas y poder alcanzar un meta aprendizaje.

Conclusiones

Se realiza una transposición didáctica a través de actividades mediadas con las NTIC, con el objetivo de apoyar y promover la enseñanza de la función lineal y afín, siendo necesario enmarcar las actividades en el modelo didáctico y metodológico Cuvima con el apoyo del GeoGebra, para la modelización matemática de situaciones reales en procesos industriales de origen térmico, relacionados con el campo de formación de los estudiantes sujetos de estudio. Los resultados permiten evidenciar cambios conceptuales en los estudiantes en el área de contexto real como en el tema de función lineal y afín, acercándolos a un aprendizaje significativo. Se diseñó una estrategia didáctica precedida por un proceso diagnóstico de capacidades a través de un pretest.

La estrategia didáctica se dividió en dos etapas: toma y análisis de temperatura y voltaje, y toma y análisis de tiempo y temperatura. Los estudiantes demostraron mejora en su habilidad técnica para el diseño de circuitos e interpretación de los conceptos asociados al fenómeno físico; identificaron pendiente y el punto de corte con el eje **y**, reconociendo a la función afín como el modelo. Las actividades didácticas propuestas para uso de las distintas representaciones sobre un concepto, se constituyeron en un medio para confrontar a los estudiantes con sus ideas previas y éstas a su vez fueron modificadas a través del proceso de modelización matemática.

Con esta estrategia se apartó al estudiante de una enseñanza tradicional, en la cual se limitaban a repetir algoritmos y hacer uso de un aprendizaje memorístico. Este avance se alcanzó adicionando herramientas con las cuales pudieron hacer parte de la construcción e interiorización de los conceptos y centrarlos como ejes principales de los procesos educativos. El empleo de tecnologías las cuales están muy cercanas a los estudiantes, además de generar interés y motivación, sirvió como agente mediador en busca de alcanzar y reforzar los conocimientos.

Se concluye que la estrategia de la enseñanza de la función lineal y afín con apoyo en las TIC, sumerge al estudiante a un proceso de análisis y desarrollo de conexiones de diseño de procesos mentales, que le hace comprender la utilidad de la matemática en la explicación de los fenómenos circundantes. Al respecto, se logró mejora en la interpretación y articulación entre diversos registros de representación de la función lineal y afín, aunque los estudiantes presentan dificultad en procedimientos básicos de solución de ecuaciones, lo cual además demuestra debilidades en la cadena de formación curricular del área.

En síntesis, la metodología Cuvima, la cual hace uso de dispositivos tecnológicos como elementos mediadores en los procesos de enseñanza y aprendizajes, permitió que los estudiantes alcanzaran un cambio conceptual respecto a sus ideas previas. Ambas herramientas mejoran la interpretación y articulación entre diversos registros de representación de la función lineal y afín. No por esto, se puede afirmar que se solventaron los problemas de base en el manejo del cálculo, en torno a procedimientos básicos de solución de ecuaciones, lo cual debe ser revisado en los diseños curriculares.

Esta realidad encontrada, plantea posibles rutas de investigación y/o nuevos problemas en el contexto curricular. En efecto, se demuestra que la enseñanza tradicional arrastra problemas de comprensión del cálculo, al estar centrada en los resultados y no en el proceso comprensivo de las matemáticas como explicativas de los fenómenos universales (Cuesta, Deulofeu y Méndez, 2009). Al respecto, se requiere que la formación en el nivel superior técnico o profesional, permita desarrollar el conocimiento científico y tecnológico de manera que los estudiantes adquieran altas capacidades matemáticas y científicas para explicar y enfrentar las exigencias de un mundo cada vez más competitivo y globalizado (Grisales, 2018).

Particularmente, como lo explican Daza y Garza (2018), la educación matemática posee un reto fundamental, y es la formación de estudiantes con mayor capacidad de reflexión y análisis, estando imbuidos cada vez más en la tecnología, sin hacer de esta una herramienta para el desarrollo del conocimiento. A tal efecto, tanto el docente como los estudiantes deben someterse a procesos de desarrollo cognitivo que permitan explotar sus potenciales en el cálculo y su utilidad, realizándose un enlace inminentemente necesario entre la pedagogía y la tecnología, haciendo un uso asertivo de las herramientas tecnológicas disponibles.

En este contexto, debe afianzarse la investigación en cuanto a las dificultades que afrontan los estudiantes en el área, siendo esto responsabilidad del docente en su rol de guía de los procesos pedagógicos, haciendo prevalecer la investigación educativa. No se tratará solo de incorporar las tecnologías al currículo, sino de analizar las necesidades de integración tecnológica para emprender los procesos de transposición didáctica en la enseñanza de las matemáticas, identificando los aspectos teóricos, tecnológicos y procedimentales que deben conocerse, asumirse y resolverse en las instituciones educativas (Ministerio de Educación Nacional, 2014).

En este avance en el proceso de enseñanza de las matemáticas, el uso de las TIC es un reto y desafío; como lo plantea Hernández (2019), el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas tiene un impacto positivo en los estudiantes, debiéndose articular estos recursos en los currículos de formación desde las competencias comunicativas y tecnológicas, no solo en los estudiantes sino también en los docentes quienes deben transformar los métodos tradicionales de enseñanza de esta área.

Referencias bibliográficas

Arteaga, E., Medina, J. y del Sol, J. (2019). El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado, 15* (70), 102-108. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&nrm=iso

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (2003). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Barajas, C., Fulano, B., Ríos, W. y Salazar, L. (2016). *Función constante, lineal y afín*. [Tesis de Maestría]. Bogotá: Universidad de los Andes.

Carvajal, A. (2013). *Una Propuesta de enseñanza de lugar geométrico, el caso de la línea recta***.** [Tesis de Maestría]. México: Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Carvajal, C. y Fonseca, J. (2019). Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable mediante la resolución de problemas para profesores de matemática en formación inicial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), 177-185. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/14042/1/Alfaro2019Propuesta.pdf

Cerda, G., Pérez, C., Casa, J. y Ortega, R. (2017). Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: La necesidad de un análisis multidisciplinar. *Psychology, Society, & Education, 9*(1), 1-10. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6360203.pdf

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Cuesta, A., Deulofeu, J. y Méndez, M. (2009). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Educación Matemática, 22*(3), 5-21. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a2.pdf

Cuevas, C. y Villamizar, F. (2017). El modelo Cuvima: una propuesta para la comprensión de los conceptos físicos y matemáticos. II Encuentro Internacional en Educación Matemática. Cúcuta: Universidad Francisco de Paula Santander. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/12769/1/Cuevas2017El.pdf

Cuevas, C., Villamizar, F. y Martínez, A. (2017). Actividades didácticas para el tono como cualidad del sonido, en cursos de física del nivel básico, mediadas por la tecnología digital. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *35*(3), 129-150. Recuperado de: https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2017v35n3/edlc_a2017v35n3p129.pdf

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y tecnología. *El Cálculo y su Enseñanza, 1*(1), 45-59. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=1&index_web=7&index_mgzne

Daza, G. y Garza, B. (2018). Actitudes hacia el cálculo diferencial e integral: caracterización de estudiantes mexicanos del nivel medio superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 279-302. Recuperado de: https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a14

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle.

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado, 14*(2), 198-214. Recuperado de: https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Hernández, E. (2019). Retos y oportunidades en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. *Docere, 20*(1), 21-24. Recuperado de: https://revistas.uaa.mx/index.php/docere/article/view/2210/2048

Hernández, J. (2009). *Sistema de monitoreo y control de encendido de un horno basado en un control de potencia tipo integral*. [Tesis de Pregrado]. México: Universidad tecnológica de la Mixteca.

Hernández, R. (2017). Impacto de las TIC en la educación: retos y perspectivas. P*ropósitos y Representaciones, 5*(1), 325-347. Recuperado de: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2017.v5n1.149

Hitt, F. (2017). El aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *Eco Matemático. Scientific Journals of Mathematics, 8*(S1), 6-15. Recuperado de: https://revistas.ufps.edu.co/index.php/ecomatematico/article/view/1374/1347

Iafrancesco, G. (2016). Propuesta de modelo holístico para la evaluación integral y de los aprendizajes en una escuela transformadora. *Revista PACA, 8*(1), 34-50. Recuperado de: https://journalusco.edu.co/index.php/paca/article/view/2042/3193

Janvier C. (1996) Modeling and the Initiation into Algebra. In: Bernarz N., Kieran C., Lee L. (eds) Approaches to Algebra. Mathematics Education Library, vol 18. Springer, Dordrecht. Recuperado de: https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_17

Ministerio de Educación Nacional (2014). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Bogotá. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

Posada, B. y Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia & Universidad de Antioquia (Ed.), Módulo 2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico, pp.127-163. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/277861965_El_razonamiento_algebraico_y_la_modelacion_matematica

Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8 y 9 grados de educación básica.* [Tesis de Maestría]. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/12943/1/1186875.2013.pdf.

Sánchez, D. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula* [Tesis de Maestría]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (Mathematical Association of America Notes, 25(1), pp. 25- 58.

Villena, M. y Rivas, N. Impacto del uso de la tecnología en el proceso de enseñanza- aprendizaje del cálculo integral (2019). *Conrado, 15*(68), pp. 297-307. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000300297

Zúñiga, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos en un curso de cálculo 1.* [Tesis de Maestría]. México: Universidad Internacional. Recuperado de: file:///C:/Users/usuario/Downloads/un-estudio-acerca-de-la-construccion-del-concepto-de-funcion-visualizacion-en-alumnos-de-un-curso-de-calculo-i.pdf