

# ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

## GUÍA ACADÉMICA

José Rafael Cáceres Rubio - Jhan Piero Rojas Suárez  
Javier Alfonso Cárdenas Gutiérrez



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Vigilada Mineducación





**ANÁLISIS  
ESTRUCTURAL I  
GUÍA ACADÉMICA**

JOSÉ RAFAEL CÁCERES RUBIO  
JHAN PIERO ROJAS SUÁREZ  
JAVIER ALFONSO  
CÁRDENAS GUTIÉRREZ

*UNIVERSIDAD  
FRANCISCO DE PAULA SANTANDER*

Cáceres Rubio, José Rafael

Análisis Estructural. I : guía académica / José Rafael Cáceres Rubio, Jhan Piero Rojas Suárez, Javier Alfonso Cárdenas Gutiérrez. -- 1a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones : Universidad Francisco de Paula Santander, 2019.

283 p. -- (Ingeniería y salud en el trabajo. Ingeniería)

Incluye datos biográficos de los autores en la pasta. -- Contiene bibliografía.

ISBN 978-958-8489-90-2

1. Teoría de las estructuras 2. Estática gráfica I. Rojas Suárez, Jhan Piero II. Cárdenas Gutiérrez, Javier Alfonso III. Título

IV. Serie

CDD: 624.171 ed. 23

CO-BoBN- a1044338

---



**Colección:** Ingeniería y salud en el trabajo

**Área:** Ingeniería



**Universidad Francisco  
de Paula Santander**  
Vigilada Mineducación

- ▶ José Rafael Cáceres Rubio
- ▶ Jhan Piero Rojas Suárez
- ▶ Javier Alfonso Cárdenas Gutiérrez

© Ecoe Ediciones Limitada.  
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 248 14 49  
Bogotá, Colombia

© Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Avenida Gran Colombia  
No. 12E-96 Barrio Colsag  
San José de Cúcuta - Colombia  
Teléfono (057)(7) 5776655

**Primera edición:** Bogotá, julio de 2019

**ISBN:** 978-958-8489-90-2

Coordinación editorial: Angélica García Reyes  
Corrección de estilo: Juan Mikan  
Diagramación: Magda Barrero  
Carátula: Wilson Marulanda Muñoz  
Impresión: DGP Editores  
Calle 63 # 70 D -34

*Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio  
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.*

*Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados*

# CONTENIDO

<b>PREFACIO</b> .....	XIII
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS</b> .....	1
1.1. Equilibrio en cuerpo rígido .....	1
1.2. Cálculo de incógnitas y grado de indeterminación .....	2
1.3. Tipos de apoyo o soportes .....	3
1.3.1. Articulado de primer orden .....	3
1.3.2. Articulado de segundo orden .....	3
1.3.3. Empotrado .....	4
1.3.4. Articulación .....	4
1.4. Ejemplo de grado de indeterminación en vigas .....	4
1.5. Reacciones .....	5
1.6. Diagramas de cortante y momento flector en vigas y pórticos .....	11
1.6.1. Cortantes .....	12
1.6.2. Momentos.....	13
1.7. Ejercicios resueltos: diagramas de cortante y momentos.....	14
1.7.1. Ejemplo 1.1 .....	14
1.7.2. Ejemplo 1.2.....	20
1.7.3. Ejemplo 1.3.....	25
1.7.4. Ejemplo 1.4 .....	34
1.7.5. Ejemplo 1.5.....	49
1.8. Ejercicios propuestos .....	63

<b>CAPÍTULO 2: GIROS Y DEFLEXIONES EN VIGAS Y PÓRTICOS ISOSTÁTICOS ...</b>	<b>69</b>
2.1. Introducción .....	69
2.2. Método de doble integración .....	69
2.2.1. Ejemplo 2.1 .....	71
2.1.2. Ejemplo 2.2 .....	79
2.2.3. Ejemplo 2.3 .....	83
2.3. Giros y deflexiones por métodos geométricos .....	91
2.3.1. Teoremas del área-momento .....	91
2.3.2. Ejercicios resueltos: área-momento .....	95
2.3.3. Método de la viga conjugada .....	143
2.3.4. Ejercicios resueltos: viga conjugada .....	145
2.4. Principio de superposición .....	167
2.5. Giros y deflexiones por métodos de energía.....	168
2.5.1. Método del trabajo virtual .....	168
2.5.2. Ejercicios resueltos: trabajo virtual .....	170
2.5.3. Primer teorema de Castigliano .....	194
2.5.4. Ejercicios resueltos: primer teorema de Castigliano .....	195
2.6. Ejercicios propuestos .....	212
<b>CAPÍTULO 3: MÉTODOS DE ANÁLISIS PARA ESTRUCTURAS</b>	
<b>HIPERESTÁTICAS .....</b>	<b>217</b>
3.1. Introducción a las estructuras hiperestáticas .....	217
3.2. Aplicación del principio de superposición.....	218
3.2.1. Ejemplo de principio de superposición .....	218
3.3. Segundo teorema de Castigliano .....	230
3.3.1. Ejercicio: segundo teorema de Castigliano .....	231
3.4. Vigas con momentos de empotramiento .....	237
3.5. Método de los tres momentos.....	240
3.5.1. Ejercicio: método de los tres momentos.....	241
3.6. Método de pendiente-deflexión .....	251
3.6.1. Ejercicio 1: método de pendiente-deflexión .....	255
3.6.2. Ejercicio 2: método de pendiente-deflexión .....	262
3.7. Ejercicios propuestos .....	280
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>283</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.1.	Apoyo articulado de primer orden .....	3
FIGURA 1.2.	Apoyo articulado de segundo orden .....	4
FIGURA 1.3.	Empotramiento .....	4
FIGURA 1.4.	Articulación .....	4
FIGURA 1.5.	Carga distribuida rectangular.....	6
FIGURA 1.6.	Carga distribuida triangula.....	6
FIGURA 1.7.	Carga distribuida trapezoidal.....	7
FIGURA 1.8.	Carga distribuida en términos de una función .....	7
FIGURA 1.9.	Ejemplo para determinar reacciones .....	8
FIGURA 1.10.	Ejemplo: resultantes y su ubicación .....	9
FIGURA 1.11.	Ejemplo: descomposición de una fuerza.....	10
FIGURA 1.12.	Ejemplo: cantidad de cortes.....	12
FIGURA 1.13.	Cortantes positivos .....	12
FIGURA 1.14.	Cortantes negativos.....	13
FIGURA 1.15.	Momentos positivos.....	13
FIGURA 1.16.	Momentos negativos.....	13
FIGURA 1.17.	Viga del ejemplo 1.1.....	14
FIGURA 1.18.	Resultantes de las cargas de la viga del ejemplo 1.1.....	14
FIGURA 1.19.	Corte 1 de la viga del ejemplo 1.1 .....	16
FIGURA 1.20.	Corte 2 de la viga del ejemplo 1.1 .....	17
FIGURA 1.21.	Corte 3 de la viga del ejemplo 1.1 .....	18
FIGURA 1.22.	Diagramas de cortante y momento de la viga del ejemplo 1.1..	19
FIGURA 1.23.	Posible deformada de la viga del ejemplo 1.1.....	20
FIGURA 1.24.	Viga del ejemplo 1.2.....	20
FIGURA 1.25.	Resultantes de las cargas de la viga del ejemplo 1.2.....	21
FIGURA 1.26.	Corte 1 de la viga del ejemplo 1.2 .....	22
FIGURA 1.27.	Corte 2 de la viga del ejemplo 1.2 .....	23
FIGURA 1.28.	Diagramas de cortante y momento de la viga del ejemplo 1.2..	25
FIGURA 1.29.	Posible deformada de la viga del ejemplo 1.2.....	25
FIGURA 1.30.	Viga del ejemplo 1.3.....	26
FIGURA 1.31.	Resultantes de las cargas de la viga del ejemplo 1.3.....	26
FIGURA 1.32.	Corte 1 de la viga del ejemplo 1.3 .....	27
FIGURA 1.33.	Corte 2 de la viga del ejemplo 1.3 .....	29
FIGURA 1.34.	Corte 3 de la viga del ejemplo 1.3 .....	30
FIGURA 1.35.	Corte 4 de la viga del ejemplo 1.3 .....	32
FIGURA 1.36.	Diagramas de cortante y momento de la viga del ejemplo 1.3..	33
FIGURA 1.37.	Posible deformada de la viga del ejemplo 1.3.....	34
FIGURA 1.38.	Pórtico del ejemplo 1.4.....	34
FIGURA 1.39.	Resultantes de las cargas del pórtico del ejemplo 1.4.....	35



FIGURA 1.40.	Barra A-B del pórtico del ejemplo 1.4.....	36
FIGURA 1.41.	Barra D-E del pórtico del ejemplo 1.4.....	37
FIGURA 1.42.	Nudo D del pórtico del ejemplo 1.4.....	39
FIGURA 1.43.	Barra C-D del pórtico del ejemplo.....	40
FIGURA 1.44.	Nudo C del pórtico del ejemplo 1.4.....	41
FIGURA 1.45.	Barra B-C del pórtico del ejemplo 1.4.....	42
FIGURA 1.46.	Nudo B del pórtico del ejemplo 1.4.....	43
FIGURA 1.47.	Equilibrio del pórtico del ejemplo 1.4.....	44
FIGURA 1.48.	Corte 1 del pórtico del ejemplo 1.4.....	44
FIGURA 1.49.	Corte 2 del pórtico del ejemplo 1.4.....	45
FIGURA 1.50.	Corte 3 del pórtico del ejemplo 1.4.....	46
FIGURA 1.51.	Corte 4 del pórtico del ejemplo 1.4.....	47
FIGURA 1.52.	Diagrama de momentos del pórtico del ejemplo 1.4.....	48
FIGURA 1.53.	Posible deformada del pórtico del ejemplo 1.4.....	48
FIGURA 1.54.	Pórtico del ejemplo 1.5.....	49
FIGURA 1.55.	Resultantes de las cargas del pórtico del ejemplo 1.5.....	50
FIGURA 1.56.	Barra A-B del pórtico del ejemplo 1.5.....	51
FIGURA 1.57.	Barra C-D del pórtico del ejemplo 1.5.....	52
FIGURA 1.58.	Barra E-B del pórtico del ejemplo 1.5.....	53
FIGURA 1.59.	Nudo C del pórtico del ejemplo 1.5.....	55
FIGURA 1.60.	Barra B-C del pórtico del ejemplo 1.5.....	56
FIGURA 1.61.	Nudo B del pórtico del ejemplo 1.5.....	57
FIGURA 1.62.	Equilibrio del pórtico del ejemplo 1.5.....	58
FIGURA 1.63.	Corte 1 del pórtico del ejemplo 1.5.....	58
FIGURA 1.64.	Corte 2 del pórtico del ejemplo 1.5.....	59
FIGURA 1.65.	Corte 3 del pórtico del ejemplo 1.5.....	59
FIGURA 1.66.	Corte 4 del pórtico del ejemplo 1.5.....	60
FIGURA 1.67.	Corte 5 del pórtico del ejemplo 1.5.....	61
FIGURA 1.68.	Diagrama de momentos del pórtico del ejemplo 1.5.....	62
FIGURA 1.69.	Posible deformada del pórtico del ejemplo 1.5.....	63
FIGURA 1.70.	Ejercicio propuesto 1.....	63
FIGURA 1.71.	Ejercicio propuesto 2.....	64
FIGURA 1.72.	Ejercicio propuesto 3.....	64
FIGURA 1.73.	Ejercicio propuesto 4.....	65
FIGURA 1.74.	Ejercicio propuesto 5.....	65
FIGURA 1.75.	Ejercicio propuesto 6.....	66
FIGURA 1.76.	Ejercicio propuesto 7.....	66
FIGURA 1.77.	Ejercicio propuesto 8.....	67
FIGURA 1.78.	Ejercicio propuesto 9.....	67
FIGURA 1.79.	Ejercicio propuesto 10.....	68
FIGURA 2.1.	Viga del ejemplo 2.1.....	71
FIGURA 2.2.	Viga del ejemplo 2.2.....	79

FIGURA 2.3.	Viga del ejemplo 2.3.....	83
FIGURA 2.4.	Demostración del primer teorema del área-momentos.....	92
FIGURA 2.5.	Demostración del segundo teorema del área-momentos .....	93
FIGURA 2.6.	Viga del ejemplo 3.1.....	95
FIGURA 2.7.	Posible deformada de la viga del ejemplo 3.1.....	95
FIGURA 2.8.	Tangente en B de la viga del ejemplo 3.1.....	96
FIGURA 2.9	Triángulo inscrito entre la viga, la tangente $\tau(C/B)$ y de la viga del ejemplo 3.1 .....	97
FIGURA 2.10.	Tangente en B hacia A de la viga del ejemplo 3.1. ....	99
FIGURA 2.11.	Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.1.....	100
FIGURA 2.12.	Tangente en B hacia x de la viga del ejemplo 3.1 .....	102
FIGURA 2.13.	Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.1.....	102
FIGURA 2.14.	Viga del ejemplo 3.2.....	103
FIGURA 2.15.	Posible deformada de la viga del ejemplo 3.2.....	103
FIGURA 2.16.	Tangente en A de la viga del ejemplo 3.2 .....	104
FIGURA 2.17.	Viga del ejemplo 3.3.....	106
FIGURA 2.18.	Posible elástica de la viga del ejemplo 3.3 .....	106
FIGURA 2.19.	Tangente de B hacia C en la viga del ejemplo 3.3 .....	107
FIGURA 2.20.	Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3.....	108
FIGURA 2.21.	Tangente de B hacia A en la viga del ejemplo 3.3 .....	110
FIGURA 2.22.	Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3.....	111
FIGURA 2.23.	Tangente de C hacia B en la viga del ejemplo 3.3 .....	112
FIGURA 2.24.	Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3.....	113
FIGURA 2.25.	Tangente de B hacia x en la viga del ejemplo 3.3 .....	114
FIGURA 2.26.	Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3.....	115
FIGURA 2.27.	Pórtico del ejemplo 3.4.....	116
FIGURA 2.28.	Posible deformada del pórtico del ejemplo 3.4 .....	117
FIGURA 2.29.	Tangente en A hacia B en el pórtico del ejemplo 3.4.....	120
FIGURA 2.30.	Tangente en B hacia C en el pórtico del ejemplo 3.4.....	122
FIGURA 2.31.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.4.....	123
FIGURA 2.32.	Tangente en C hacia D en el pórtico del ejemplo 3.4 .....	124
FIGURA 2.33.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.4 .....	125
FIGURA 2.34.	Tangente en D hacia E en el pórtico del ejemplo 3.4.....	127
FIGURA 2.35.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.4 .....	128
FIGURA 2.36.	Pórtico del ejemplo 3.5.....	130
FIGURA 2.37.	Posible deformada del pórtico del ejemplo 3.5 .....	131
FIGURA 2.38.	Tangente en B hacia C en el pórtico del ejemplo 3.5.....	132
FIGURA 2.39.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5 .....	133
FIGURA 2.40.	Tangente en D hacia C en el pórtico del ejemplo 3.5 .....	136
FIGURA 2.41.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5 .....	137
FIGURA 2.42.	Tangente en B hacia E en el pórtico del ejemplo 3.5 .....	139
FIGURA 2.43.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5 .....	140

FIGURA 2.44.	Tangente en B hacia A en el pórtico del ejemplo 3.5.....	141
FIGURA 2.45.	Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5 .....	142
FIGURA 2.46.	Viga del ejemplo 4.1 .....	145
FIGURA 2.47.	Diagrama de momentos de la viga del ejemplo 4.1 .....	145
FIGURA 2.48.	Viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1 .....	146
FIGURA 2.49.	Viga conjugada separada por efecto de la articulación de la viga del ejemplo 4.1.....	146
FIGURA 2.50.	Resultantes y reacciones de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1 .....	149
FIGURA 2.51.	Corte en A de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1 .....	149
FIGURA 2.52.	Corte en B de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1 .....	150
FIGURA 2.53.	Corte en x de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.1.....	151
FIGURA 2.54.	Corte en C de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1 .....	153
FIGURA 2.55.	Viga del ejemplo 4.2.....	153
FIGURA 2.56.	Diagrama de momentos de la viga del ejemplo 4.2 .....	154
FIGURA 2.57.	Viga conjugada de la viga del ejemplo 4.2 .....	154
FIGURA 2.58.	Viga conjugada con las resultantes y reacciones de la viga del ejemplo 4.2.....	154
FIGURA 2.59.	Corte en B de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.2 .....	155
FIGURA 2.60.	Viga del ejemplo 4.3.....	157
FIGURA 2.61.	Diagrama de momentos de la viga del ejemplo 4.3 .....	157
FIGURA 2.62.	Viga conjugada de la viga del ejemplo 4.3 .....	157
FIGURA 2.63.	Viga conjugada separada por efecto de la articulación de la viga del ejemplo 4.3 .....	158
FIGURA 2.64.	Resultantes de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3 .....	162
FIGURA 2.65.	Corte en A de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3.....	162
FIGURA 2.66.	Corte en B de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3 .....	163
FIGURA 2.68.	Corte en D de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3.....	164
FIGURA 2.69.	Corte en X de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3.....	165
FIGURA 2.70.	Ejemplo de superposición.....	167
FIGURA 2.71.	Simplificación del ejercicio por medio del principio de superposición .....	168
FIGURA 2.72.	Viga del ejemplo 5.1.....	170
FIGURA 2.73.	Viga virtual de la viga de ejemplo 5.1 .....	170
FIGURA 2.74.	Reacciones de la viga virtual de la viga del ejemplo 5.1 .....	171
FIGURA 2.75.	Primer corte de la viga virtual del ejemplo 5.1.....	171
FIGURA 2.76.	Segundo corte de la viga virtual del ejemplo 5.1.....	172
FIGURA 2.77.	Viga del ejemplo.....	173
FIGURA 2.78.	Viga virtual de la viga del ejemplo 5.2.....	174
FIGURA 2.79.	Reacciones de la viga virtual del ejemplo 5.2 .....	174
FIGURA 2.80.	Corte de viga virtual del ejemplo 5.2.....	175
FIGURA 2.81.	Pórtico del ejemplo 5.3 .....	176

FIGURA 2.82.	Modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	177
FIGURA 2.83.	Reacciones del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	178
FIGURA 2.84.	Equilibrio del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	179
FIGURA 2.85.	Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	179
FIGURA 2.86.	Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	180
FIGURA 2.87.	Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	180
FIGURA 2.88.	Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	181
FIGURA 2.89.	Modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	183
FIGURA 2.90.	Reacciones del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	183
FIGURA 2.91.	Equilibrio del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	184
FIGURA 2.92.	Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	184
FIGURA 2.93.	Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	185
FIGURA 2.94.	Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	185
FIGURA 2.95.	Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3.....	186
FIGURA 2.96.	Pórtico del ejemplo 5.4.....	188
FIGURA 2.97.	Modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4.....	189
FIGURA 2.98.	Reacciones del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4.....	190
FIGURA 2.99.	Equilibrio del modelo virtual del pórtico del ejemplo.....	190
FIGURA 2.100.	Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4.....	191
FIGURA 2.101.	Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4.....	191
FIGURA 2.102.	Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4.....	192
FIGURA 2.103.	Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4.....	192
FIGURA 2.104.	Pórtico del ejemplo 6.1.....	195
FIGURA 2.105.	Modelo con las redundantes del pórtico del ejemplo 6.1.....	196
FIGURA 2.106.	Equilibrio del pórtico del ejemplo 6.1.....	197
FIGURA 2.107.	Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1.....	198
FIGURA 2.108.	Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1.....	199
FIGURA 2.109.	Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1.....	200
FIGURA 2.110.	Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1.....	200
FIGURA 2.111.	Pórtico del ejemplo 6.2.....	203
FIGURA 2.112.	Modelo con las redundantes del pórtico del ejemplo 6.2.....	203
FIGURA 2.113.	Equilibrio del pórtico del ejemplo 6.2.....	205
FIGURA 2.114.	Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2.....	205
FIGURA 2.115.	Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2.....	206
FIGURA 2.116.	Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2.....	207
FIGURA 2.117.	Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2.....	208
FIGURA 2.118.	Corte 5 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2.....	209
FIGURA 2.119.	Ejercicio propuesto 1.....	212
FIGURA 2.120.	Ejercicio propuesto 2.....	212
FIGURA 2.121.	Ejercicio propuesto 3.....	213
FIGURA 2.122.	Ejercicio propuesto 4.....	213
FIGURA 2.123.	Ejercicio propuesto 5.....	214

FIGURA 2.124.	Ejercicio propuesto 6 .....	214
FIGURA 2.125.	Ejercicio propuesto 7 .....	215
FIGURA 2.126.	Ejercicio propuesto 8 .....	215
FIGURA 2.127.	Ejercicio propuesto 9 .....	216
FIGURA 2.128.	Ejercicio propuesto 10 .....	216
FIGURA 3.1.	Ejemplos de estructuras hiperestáticas.....	218
FIGURA 3.2.	Ejemplo de principio de superposición.....	218
FIGURA 3.3.	Viga 1. Ejemplo de principio de superposición .....	220
FIGURA 3.4.	Viga 2. Ejemplo de principio de superposición .....	220
FIGURA 3.5.	Viga 3. Ejemplo de principio de superposición .....	220
FIGURA 3.6.	Viga 1. Determinación de incógnitas $B_{y1}$ y $C_{y1}$ .....	220
FIGURA 3.7.	Primer corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición ....	221
FIGURA 3.8.	Segundo corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición .	221
FIGURA 3.9.	Tercer corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición .....	222
FIGURA 3.10.	Cuarto corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición ....	222
FIGURA 3.11.	Viga 2. Determinación de incógnitas $B_{y2}$ y $C_{y2}$ .....	223
FIGURA 3.12.	Primer corte viga 2. Ejemplo de principio de superposición ....	223
FIGURA 3.13.	Segundo corte viga 2. Ejemplo de principio de superposición .	224
FIGURA 3.14.	Tercer corte viga 2. Ejemplo de principio de superposición .....	224
FIGURA 3.15.	Viga 3. Determinación de incógnitas $B_{y3}$ y $C_{y3}$ .....	225
FIGURA 3.16.	Primer corte viga 3. Ejemplo de principio de superposición ....	225
FIGURA 3.17.	Segundo corte viga 3. Ejemplo de principio de superposición .	226
FIGURA 3.18.	Tercer corte viga 3. Ejemplo de principio de superposición .....	226
FIGURA 3.19.	Reacciones del ejemplo de principio de superposición .....	230
FIGURA 3.20.	Ejercicio de segundo teorema de Castigliano.....	231
FIGURA 3.21.	Ejercicio ubicando las redundantes segundo teorema de Castigliano .....	231
FIGURA 3.22.	Ejercicio con reacciones ubicadas. Segundo teorema de Castigliano .....	232
FIGURA 3.23.	Primer corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano.....	232
FIGURA 3.24.	Segundo corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano.....	233
FIGURA 3.25.	Tercer corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano.....	233
FIGURA 3.26.	Cuarto corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano.....	234
FIGURA 3.27.	Reacciones del ejercicio de segundo teorema de Castigliano ...	237
FIGURA 3.28.	Teorema de los tres momentos.....	240
FIGURA 3.29.	Deducción gráfica de ecuación del método de los tres momentos.....	241
FIGURA 3.30.	Ejercicio del método de los tres momentos .....	242
FIGURA 3.31.	Ejercicio del método de los tres momentos con extensión del elemento en los empotramientos .....	242
FIGURA 3.32.	Ejercicio del método de los tres momentos: tramo 0-A-B.....	242
FIGURA 3.33.	Ejercicio del método de los tres momentos: tramo A-B-C.....	243

FIGURA 3.34.	Ejercicio del método de los tres momentos: tramo B-C-D .....	244
FIGURA 3.35.	Ejercicio del método de los tres momentos: tramo C-D-E .....	245
FIGURA 3.36.	Ejercicio del método de los tres momentos: tramo D-E-O .....	245
FIGURA 3.37.	Ejercicio del método de los tres momentos: viga 1.....	247
FIGURA 3.38.	Ejercicio del método de los tres momentos: corte 1: 0 a 4 m ....	247
FIGURA 3.39.	Ejercicio del método de los tres momentos: viga 2.....	248
FIGURA 3.40.	Ejercicio del método de los tres momentos: corte 2: 0 a 5 m ....	248
FIGURA 3.41.	Ejercicio del método de los tres momentos: viga 3.....	249
FIGURA 3.42.	Ejercicio del método de los tres momentos: corte 3: 0 a 6 m ....	249
FIGURA 3.43.	Ejercicio del método de los tres momentos: viga 4.....	250
FIGURA 3.44.	Ejercicio del método de los tres momentos: corte 4: 0 a 3 m ....	250
FIGURA 3.45.	Ejercicio del método de los tres momentos: corte 5: 3 m a 5 m ..	250
FIGURA 3.46.	Reacciones del ejercicio del método de los tres momentos.....	251
FIGURA 3.47.	Diagrama de momentos del ejercicio del método de los tres momentos .....	251
FIGURA 3.48.	Deducción del método de pendiente-deflexión.....	252
FIGURA 3.49.	Efecto de las cargas sobre el elemento .....	252
FIGURA 3.50.	Efecto del giro en el nudo inicial.....	253
FIGURA 3.51.	Efecto del giro en el nudo final.....	253
FIGURA 3.52.	Efecto del desplazamiento relativo .....	253
FIGURA 3.53.	Ejercicio 1 del método de pendiente-deflexión.....	256
FIGURA 3.54.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo A-B .....	256
FIGURA 3.55.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión tramo A-B separado por principio de superposición .....	257
FIGURA 3.56.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo B-C .....	257
FIGURA 3.57.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión separado por principio de superposición, tramo B-C .....	258
FIGURA 3.58.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión: equilibrio en B.....	260
FIGURA 3.59.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo A-B .....	261
FIGURA 3.60.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo B-C .....	262
FIGURA 3.61.	Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, reacciones.....	262
FIGURA 3.62.	Ejercicio 2 del método de pendiente-deflexión.....	263
FIGURA 3.63.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, tramo A-B .....	264
FIGURA 3.64.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, tramo C-D.....	264
FIGURA 3.65.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, tramo D-E.....	265
FIGURA 3.66.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en A.....	271
FIGURA 3.68.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en C.....	272
FIGURA 3.69.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en E.....	272
FIGURA 3.70.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, cortantes de una barra .....	273
FIGURA 3.71.	Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, cortante en columnas AC y BD.....	274

FIGURA 3.72. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, cortante en columnas CF y DG .....275

FIGURA 3.73. Diagrama de momentos del ejercicio 2 método de pendiente-deflexión .....279

FIGURA 3.74. Ejercicio propuesto 1 .....280

FIGURA 3.75. Ejercicio propuesto 2 .....280

FIGURA 3.76. Ejercicio propuesto 3 .....280

FIGURA 3.77. Ejercicio propuesto 4 .....281

FIGURA 3.78. Ejercicio propuesto 5 .....281

FIGURA 3.79. Ejercicio propuesto 6 .....281

FIGURA 3.80. Ejercicio propuesto 7 .....282

FIGURA 3.81. Ejercicio propuesto 8 .....282



## PREFACIO



La presente guía académica tiene como fin enseñar la solución de ejercicios de análisis estructural I, basados en los conceptos teóricos recopilados de los distintos libros existentes que siguen siendo parte fundamental de la literatura del comportamiento de las estructuras. Los ejercicios solucionados en este documento son el resultado de una compilación de las notas de clase de los profesores de la Universidad Francisco de Paula Santander (UFPS) José Rafael Cáceres Rubio, Jhan Piero Rojas Suárez y Javier Alfonso Cárdenas Gutiérrez, con la ejecución matemática práctica aplicada de José Daniel Palacios, estudiante de ingeniería civil. Como primera versión de la guía se busca fomentar en los estudiantes un interés por las estructuras enseñando de forma clara a aplicar las metodologías de análisis tradicionales. Además, se espera tener un material de apoyo propio de la UFPS para la realización de las clases de la materia Análisis Estructural I, de manera que los estudiantes cuenten con un documento que les permita tener un aprendizaje autodidacta de los temas vistos en clase y explicado por los docentes responsables de la materia. A estos últimos, a su vez, la publicación también les servirá de ayuda como una forma de estandarizar los temas pertinentes y cumplir así con el currículo establecido por el plan de estudios.





## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN A LA ESTÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS

### 1.1. Equilibrio en cuerpo rígido

Un objeto se encuentra en reposo cuando está en equilibrio. Para ello, la suma de las fuerzas y momentos que actúan sobre los elementos<sup>1</sup> debe ser igual a cero. Esto implica que tanto las fuerzas aplicadas sobre el elemento como los momentos<sup>2</sup> que se producen respecto a cualquier punto de este deben ser iguales a cero.

En la presente guía se trabajará con elementos estructurales bidimensionales, en un plano cartesiano “xy”, por lo que el equilibrio de la estructura debe satisfacer las ecuaciones básicas de la estática, las cuales son:

$$\Sigma F_x=0; \Sigma F_y=0; \Sigma M=0$$

Para realizar los procesos matemáticos requeridos, se necesitará condicionar tanto el sistema de unidades como la convención de signos a uno solo, con el fin de que

---

1 Los elementos que se trabajarán para efectos de la guía son vigas y pórticos planos.

2 Un momento se define como la tendencia a rotar por el efecto de una fuerza aplicada a cierta distancia del punto de referencia. A esta distancia se le conoce como brazo de palanca, la cual debe ser perpendicular (formando un ángulo de 90°) con relación a la fuerza aplicada.

exista una armonía en los cálculos. El sistema de unidades que se usará en todos los ejercicios resueltos y propuestos será el Sistema Internacional de Unidades (SI), el cual trabaja las unidades de longitud en metros (m), los pesos en Newton (N) — para mayor facilidad y por orden de magnitud se usarán en esta guía los kilonewton (kN), equivalentes a 1.000 N—, los giros en radianes, y la temperatura en grados Celsius (°C).

En cuanto a la convención de signos, las fuerzas tomarán el signo que tenga la dirección del vector en relación con el plano cartesiano, es decir, fuerzas positivas si van hacia arriba y hacia la derecha, y negativas si van hacia abajo y hacia la izquierda. Los momentos serán positivos si la tendencia a la rotación es antihoraria, es decir, en contra del movimiento de las manecillas del reloj, y serán negativos si por el contrario la tendencia a rotar es horaria o en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

## 1.2. Cálculo de incógnitas y grado de indeterminación

Las fuerzas tienen una serie de características con las cuales podemos identificar magnitud, dirección, sentido y línea de acción. Las reacciones en particular, al ser fuerzas externas ubicadas en los apoyos o soportes, impiden el movimiento del elemento, manteniéndolo así en reposo. Las reacciones son, en otras palabras, según la tercera ley de Newton, el efecto generado al cargar un elemento estructural; por lo tanto, pueden ser determinadas mediante las ecuaciones básicas de la estática. Sin embargo, teniendo en cuenta un teorema del álgebra, el cual dice que un sistema tendrá solución solo cuando el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones, y considerando que las ecuaciones de la estática son tres (sumatoria de fuerzas horizontales, verticales y momentos), solo se podrán determinar tres incógnitas de un elemento estructural. Así pues, la determinación de más de tres incógnitas necesita emplear ecuaciones adicionales a las de la estática. En este orden de ideas, una incógnita es la reacción, la cual se ubicará y dependerá del tipo de apoyo usado.

Para que una estructura se pueda solucionar con las ecuaciones básicas de la estática, la indeterminación de la estructura debe ser de grado cero (0), es decir, debe ser una estructura “isostática”<sup>3</sup>. Sin embargo, las estructuras más seguras son las denominadas “hiperestáticas”<sup>4</sup>, las cuales tienen un grado de indeterminación por encima de cero. Deben evitarse al máximo las estructuras inestables, las cuales tienen un grado de indeterminación por debajo de cero.

---

3 Estructura que tiene mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

4 Estructura que tiene más incógnitas que ecuaciones.

El grado de indeterminación de una estructura se halla usando la siguiente ecuación:

$$GI = R - (Ec + Ar)$$

Donde:

- GI: grado de indeterminación.  
 R: número de reacciones.  
 Ec: número de ecuaciones de la estática (3).  
 Ar: número de articulaciones.

### 1.3. Tipos de apoyo o soportes

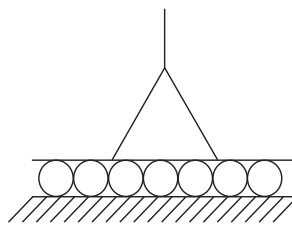
Para elementos estructurales planos o bidimensionales, existen cuatro tipos de apoyos o soportes, los cuales dependen del grado de libertad que se tenga. Esto quiere decir que solo los movimientos que restrinja tendrán reacción.

#### 1.3.1. Articulado de primer orden

Este apoyo tiene dos grados de libertad. Permite giro y desplazamiento horizontal, restringiendo así el desplazamiento vertical. Por ende, solo *tiene una reacción* en la dirección “y”.

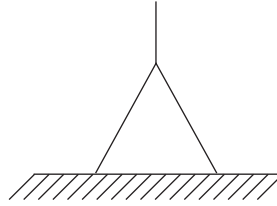
Este apoyo es vulgarmente conocido como apoyo de patín, de ruedas, y también como apoyo de rodillo.

Figura 1.1. Apoyo articulado de primer orden



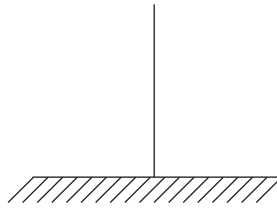
#### 1.3.2. Articulado de segundo orden

Este apoyo solo tiene un grado de libertad, permitiendo giro y restringiendo desplazamiento en cualquier dirección —vertical y horizontal—. Por ende, *tiene dos reacciones*: en la dirección “x” y en “y”.

**Figura 1.2. Apoyo articulado de segundo orden**

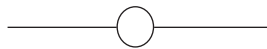
### 1.3.3. Empotrado

Ese apoyo no tiene ningún grado de libertad, es decir, impide cualquier clase de movimiento (desplazamiento y rotación). Es así como este tipo de apoyo tiene reacciones en las direcciones “x” y “y”, y además un momento como reacción. *Tiene tres reacciones.*

**Figura 1.3. Empotramiento**

### 1.3.4. Articulación


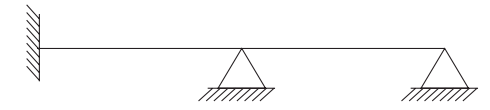

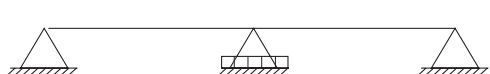
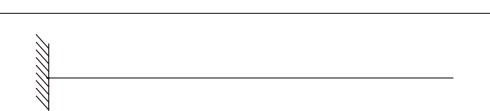

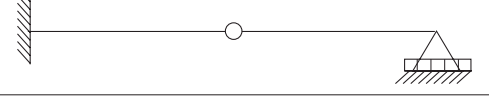
Es un soporte que no es considerado como un apoyo pero cumple la función de transmitir cargas. Además, divide un elemento estructural complejo en dos elementos más sencillos. La articulación tiene tres grados de libertad, es decir, tiene la posibilidad de moverse en cualquier dirección y además permite el giro o rotación. En consecuencia, *no tiene reacciones.*

**Figura 1.4. Articulación**

## 1.4. Ejemplo de grado de indeterminación en vigas

En la tabla 1.1 se clasifican vigas como inestable, isostática o hiperestática según el grado de determinación ( $GI = R - (Ec. + Ar.)$ ).

Tabla 1.1. Ejemplo de grado de indeterminación

Viga	R	Ec.	Ar.	Gl	Condición estática
	3	3	0	0	Isostática
	7	3	0	4	Hiperestática de 4.º grado
	2	3	0	-1	Inestable
	5	3	0	2	Hiperestática de 2.º grado
	3	3	0	0	Isostática
	6	3	0	3	Hiperestática de 3.er grado
	4	3	1	0	Isostática

## 1.5. Reacciones

Es necesario conocer los tipos de apoyos en los cuales se pretende calcular las reacciones. Para este apartado hay que especificar que solo se podrán solucionar con este método las estructuras denominadas “isostáticas”, es decir, cuyo grado de indeterminación sea cero.

Además de conocer el tipo de apoyo que tenga la estructura, también es necesario determinar las fuerzas con las cuales el elemento está cargado. Existen tres tipos de cargas: cargas puntuales, cargas distribuidas y momentos.

Las cargas puntuales son fuerzas que tienen una magnitud y un sentido y cuya influencia, además, se limita a un solo punto en específico. Las cargas distribuidas

son aquellas que están esparcidas sobre alguna zona; por lo general están distribuidas en una superficie o sobre alguna longitud. Como inicialmente se habló de que en esta guía solo se trabajarán elementos bidimensionales, las cargas distribuidas que se tendrán, por ende, son los pesos por unidad de longitud. Finalmente, los momentos son tendencias a rotar, para las cuales se debe conocer la magnitud y el sentido del giro. Hay que tener en cuenta que los momentos se dan en unidades de energía y no son una fuerza como tal.

Como las ecuaciones de la estática no hacen referencia a una sumatoria de fuerzas y momentos, no podemos trabajar directamente con las cargas distribuidas, sino que es necesario convertirlas a cargas puntuales, lo cual se hace teniendo en cuenta lo siguiente:

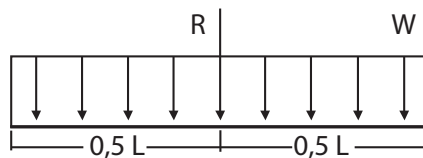
Aunque las cargas distribuidas están ejerciendo un peso longitudinal sobre un elemento, la influencia se realiza justo en el centroide por una fuerza puntual que es equivalente al área determinada por la figura geométrica que describe la distribución de la carga, la cual es conocida como resultante.

Los tipos de cargas distribuidas están dados por las siguientes distribuciones geométricas:

### ***Distribución uniforme o rectangular***

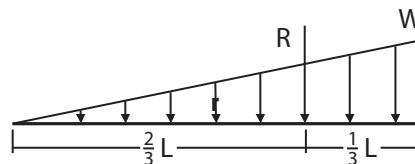
En este caso la resultante se da por la ecuación:  $R=W*L$ , y esta fuerza se ubica en la mitad de la distribución de la carga.

**Figura 1.5. Carga distribuida rectangular**



### ***Distribución creciente y/o decreciente (triangular)***

**Figura 1.6. Carga distribuida triangular**



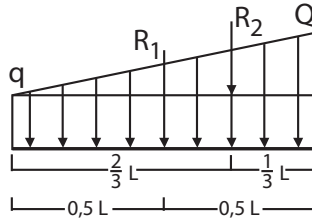
Para este tipo de distribución la resultante será:

$$R = W * L/2$$

y estará ubicada a los  $2/3$  de la longitud.

### ***Distribución creciente y/o decreciente (trapezoidal)***

**Figura 1.7. Carga distribuida trapezoidal**



Este tipo de distribución genera dos resultantes: una será de un rectángulo, y la otra estará definida por un triángulo.

$$R_1 = q * L$$

$$R_2 = (Q - q) * L/2$$

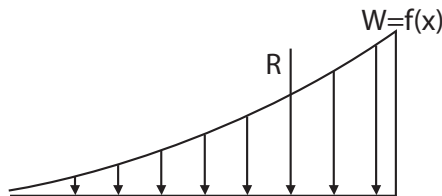
Y cada fuerza se aplicará en el respectivo centroide de la figura.

### ***Distribución en términos de una función***

Cuando se trabajan figuras con funciones, se debe determinar el área, la cual está definida por la integral bajo la curva así:

$$R = \int_a^b f(x) dx$$

**Figura 1.8. Carga distribuida en términos de una función**



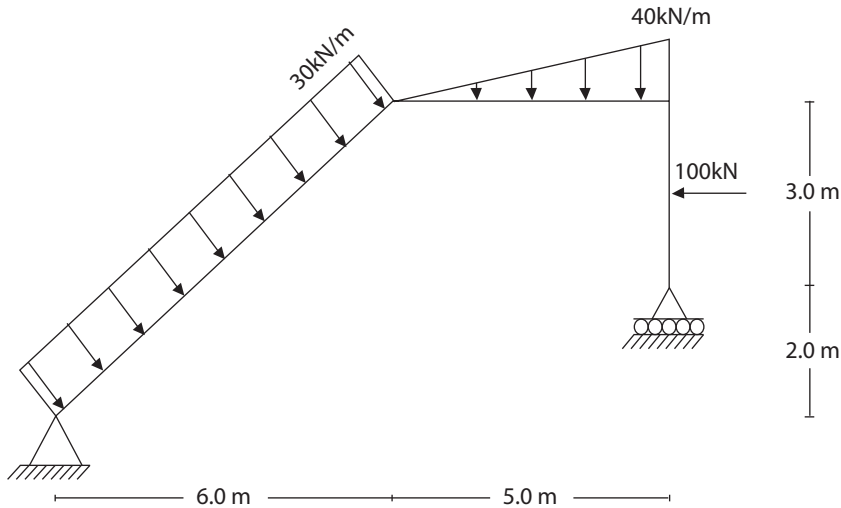


Y la fuerza se ubicará en el centroide, el cual se halla de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b [f(x) * x] dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

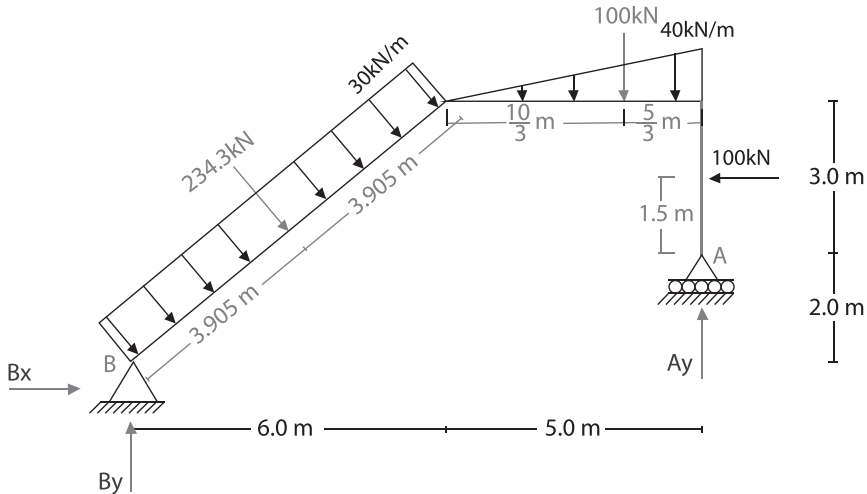
Conociendo que para aplicar las ecuaciones de la estática las estructuras solo pueden tener tres incógnitas, y que estas incógnitas se encuentran ubicadas en los apoyos y no son otra cosa que las reacciones, entonces se puede deducir que las tres incógnitas o dos de ellas se encontrarán en el mismo punto. Por lo tanto, se recomienda iniciar haciendo sumatoria de momentos en el punto donde encontremos más incógnitas, con el fin de facilitar la obtención de dichas reacciones. En el siguiente ejemplo se mostrará la forma para obtener reacciones.

**Figura 1.9. Ejemplo para determinar reacciones**



En la figura 1.9 observamos una estructura con dos apoyos y con dos cargas distribuidas: una rectangular y otra triangular. El grado de indeterminación en este caso es cero, ya que tiene tres reacciones, las cuales cumplen para las tres ecuaciones de la estática. Procedemos a determinar las cargas puntuales ejercidas por las cargas distribuidas y, además, a ubicarlas en la estructura (figura 1.10).

Figura 1.10. Ejemplo: resultantes y su ubicación



La longitud de la barra inclinada se determina por el teorema de Pitágoras. Al ser la carga perpendicular a la barra inclinada, podemos trabajarla como si estuviera en un plano inclinado.

$$\text{Longitud de la barra inclinada: } L = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7,81 \text{ m}$$

$$\text{Resultante de la carga distribuida rectangular: } R = 30 \text{ kN/m} * 7,81 \text{ m}$$

$$R=234,3 \text{ kN}$$

$$\text{Resultante de la carga distribuida triangular: } R = 40 * \frac{5}{2} = 100 \text{ kN}$$

Cada una de las fuerzas están ubicadas en el centroide geométrico de la figura.

El punto con más incógnitas es el apoyo B; por lo tanto, ahí se hará la sumatoria de momentos. Para ello se multiplica la fuerza por brazo de palanca. Este último equivale a la distancia perpendicular a la fuerza medida desde el punto donde se ubica dicha fuerza hasta el punto donde se está haciendo la sumatoria de momentos. Si este momento describe una tendencia a rotar antihoraria, será positivo; de lo contrario, será negativa.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -234,3(3,905) - 100 \left( 6 + \frac{10}{3} \right) + 100(2 + 1,5) + A_y(6 + 5) = 0$$

$$-234,3(3,905) - 100 \left( 6 + \frac{10}{3} \right) + 100(2 + 1,5) + A_y(6 + 5) = 0$$

Despejando  $A_y$  de la ecuación, tenemos:

$$A_y(6 + 5) = 234,3(3,905) + 100 \left( 6 + \frac{10}{3} \right) - 100(2 + 1,5)$$

$$A_y = \frac{234,3(3,905) + 100 \left( 6 + \frac{10}{3} \right) - 100(2 + 1,5)}{(6 + 5)}$$

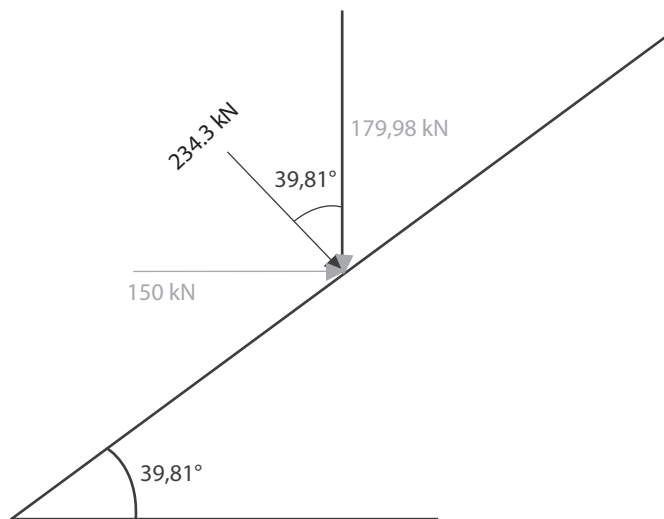
$$A_y = 136,21 \text{ kN } \uparrow$$

El hecho de que la fuerza  $A_y$  nos hubiera dado positiva indica que la manera en la que se supuso es correcta.

Ahora, ya que conocemos una de las incógnitas de fuerzas verticales, hacemos sumatoria de fuerzas en "y". Sin embargo, como todas las cargas no están de forma vertical, se debe primero descomponer la fuerza inclinada.

El ángulo lo podemos conocer por trigonometría:  $\vartheta = \tan^{-1} \left( \frac{5}{6} \right) = 39,81^\circ$

**Figura 1.11. Ejemplo: descomposición de una fuerza**



La componente de la fuerza que es adyacente al ángulo será:

$$F_y = 234,3 \cdot \cos(39,81^\circ)$$

$$F_y = 179,98 \text{ kN}$$

Y la otra componente será:  $F_x = 234,3 \cdot \sin(39,81^\circ) = 150 \text{ kN}$

Como ya no existen fuerzas inclinadas, podemos proceder a realizar las sumatorias de fuerzas para determinar las reacciones faltantes:

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y + B_y - 179,98 - 100 = 0$$

$$A_y + B_y - 179,98 - 100 = 0$$

Sustituyendo  $A_y = 136,21$  kN en la ecuación, tenemos:

$$136,21 + B_y - 179,98 - 100 = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, tenemos:

$$B_y = 179,98 + 100 - 136,21$$

$$B_y = 143,77 \text{ kN } \uparrow$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 150 + B_x - 100 = 0$$

$$150 + B_x - 100 = 0$$

Despejando  $B_x$  de la ecuación, tenemos:

$$B_x = 100 - 150$$

$$B_x = -50 \text{ kN}$$

Como nos dio negativo, indica que la fuerza estaba mal supuesta al inicio. Para corregir solo debemos cambiar la dirección de la reacción:

$$B_x = 50 \text{ kN } \leftarrow$$

En resumen, las reacciones de la estructura son:

$$B_x = 50 \text{ kN } \leftarrow; B_y = 143,77 \text{ kN } \uparrow; A_y = 136,21 \text{ kN } \uparrow$$

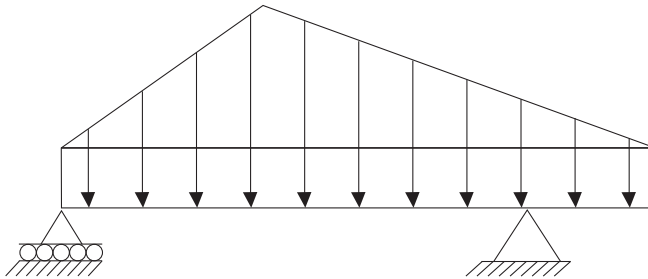
## 1.6. Diagramas de cortante y momento flector en vigas y pórticos

Para realizar los diagramas de cortante y momento flector se procede a ejecutar cortes. Estos se hacen internamente en cada barra (de nudo a nudo) y en cada cambio de carga. De tal manera, los diagramas representan la distribución de las fuerzas de cortante y los momentos flectores a lo largo de un elemento (viga o columna).

Como ya se señaló, los cortes se realizan en cada cambio de carga. En el caso de elementos con cargas distribuidas, el corte se hará donde exista un cambio brusco de carga. Cabe recordar que, como se conoció en el literal 1.5 de la presente guía,

existen cargas que son gradualmente variadas, las cuales no producen corte a menos que esta variación sea interrumpida por un cambio abrupto.

**Figura 1.12. Ejemplo: cantidad de cortes**



Para una mejor comprensión, se dispondrá del ejemplo ilustrado en la figura 1.12. En este caso se logra apreciar una viga que está cargada de forma distribuida trapezoidal, pero que hasta cierto punto cambia de ser creciente a ser decreciente, lo cual nos genera un corte. Además, el apoyo articulado de segundo grado está ubicado en un lugar distinto al extremo de la viga, por lo que este apoyo (al hallar la reacción sería una fuerza al puntual) nos genera otro corte. De tal manera, se puede concluir que la viga tiene tres cortes debido a que al final de un elemento, por obligación, se debe cortar para generar los diagramas de toda la barra.

### 1.6.1. Cortantes

Los cortantes equivalen a las fuerzas que actúan perpendiculares al elemento. Por lo tanto, en el diagrama de cortantes se pretende mostrar la distribución de esas fuerzas. De forma general y para esta guía, se trabajará con la convención de signos que se observa en la figura 1.13.

**Figura 1.13. Cortantes positivos**



Si la fuerza está en dirección hacia arriba a la izquierda, el cortante es positivo; de igual manera, será positivo si la fuerza a la derecha está hacia abajo. En el caso contrario (figura 1.14), dichos cortantes serán negativos.

**Figura 1.14. Cortantes negativos**

Las ecuaciones de los cortantes deben variar según la longitud del elemento y pueden ir expresadas, con la variación de la longitud, hacia la derecha o hacia la izquierda, o una combinación de ambas direcciones. Cabe tener en cuenta que para el diagrama se requiere una variación de los cortantes para todo el elemento sin importar la dirección tomada. Ahora bien, es preciso considerar que hay métodos que se usaran más adelante que exigen que las ecuaciones sean congruentes y por lo tanto vayan en la misma dirección.

### 1.6.2. Momentos

Al igual que los cortantes, el diagrama de momentos equivale a una distribución de los momentos que se presentan en un elemento. Las ecuaciones en este caso están en términos de la longitud y se pueden hacer los cortes en cualquier dirección, especificando cuál es y teniendo en cuenta que hay métodos que solo permiten el uso de una sola dirección. En la figura 1.15 se muestra la convención de signos para el diagrama de momentos.

**Figura 1.15. Momentos positivos**

Los momentos serán positivos si a la izquierda es horario, y a la derecha, antihorario. De lo contrario (figura 1.16), serán negativos.

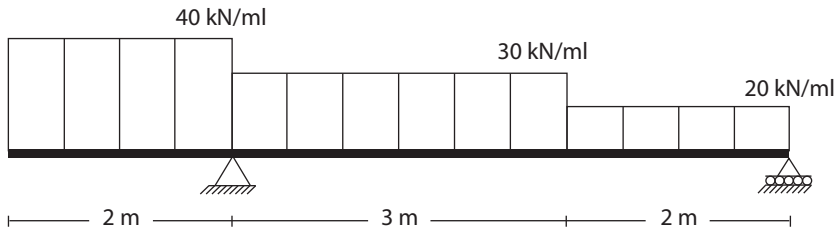
**Figura 1.16. Momentos negativos**

## 1.7. Ejercicios resueltos: diagramas de cortante y momentos

### 1.7.1. Ejemplo 1.1

Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la viga ilustrada en la figura 1.17.

Figura 1.17. Viga del ejemplo 1.1.



- Grado de indeterminación:

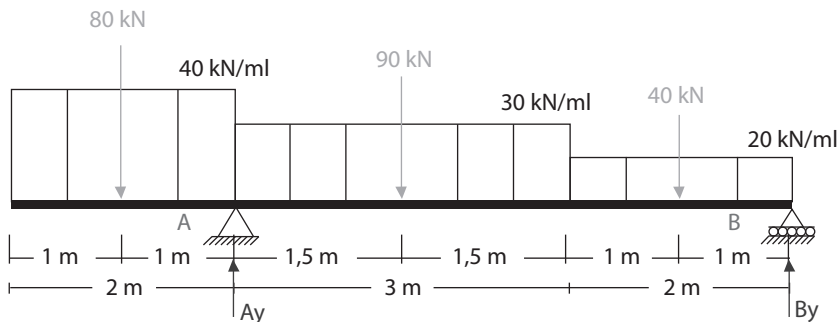
$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 2 - (2 + 0) = 0$$

*Isostático.*

- Resultantes de cargas: primero pasamos las cargas distribuidas a cargas puntuales. Esto se hace multiplicando el valor de la carga distribuida por la distancia que esta abarca. Este dato se ubica en el centroide. Además, en los apoyos se supone la dirección de las fuerzas restrictivas.

Figura 1.18. Resultantes de las cargas de la viga del ejemplo 1.1.



- Reacciones en los apoyos: se determinan las reacciones haciendo sumatoria de fuerzas verticales o en "y" de tal manera que estas sean iguales a cero, y se hace sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas sobre algún

punto de la viga (por lo general, se hace sobre alguno de los apoyos). Luego se soluciona el sistema de ecuaciones  $2 \times 2$ .

- » Sumatoria de momentos: para determinar un momento se multiplica la magnitud de la fuerza por la distancia perpendicular desde la fuerza hasta el punto sobre el cual se está haciendo la sumatoria. Luego se suman todos los momentos y, dependiendo de la dirección y sentido, tomará su respectivo signo: positivo si tiende a rotar de forma antihoraria, y negativo si tiende a rotar de forma horaria:

$$+\sum M_A = (80\text{kN} \cdot 1\text{m}) - (90\text{kN} \cdot 1,5\text{m}) - (40\text{kN} \cdot 4\text{m}) + 5B_y = 0$$

$$(80\text{kN} \cdot 1\text{m}) - (90\text{kN} \cdot 1,5\text{m}) - (40\text{kN} \cdot 4\text{m}) + 5B_y = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, tenemos:

$$B_y = 43\text{kN} \uparrow$$

- » Sumatoria de fuerzas: en el caso de las vigas que solo tienen fuerzas verticales, solo se hará sumatoria de fuerzas en “y” ya que las fuerzas en “x” se cancelarán debido a que no hay cargas en esa dirección.
- » La suma solo será de las cargas resultantes (fuerzas puntuales halladas de las cargas distribuidas) y las reacciones (fuerzas sobre los apoyos debido a la tercera ley de Newton). Se debe tener en cuenta que si la fuerza se aplica hacia arriba, será positiva, y si la fuerza se aplica hacia abajo, será negativa.

$$+\sum F_y = A_y + B_y - 80\text{kN} - 90\text{kN} - 40\text{kN} = 0$$

$$A_y + B_y - 80\text{kN} - 90\text{kN} - 40\text{kN} = 0$$

Reemplazamos  $B_y$  con el dato que nos dio anteriormente:  $B_y = 43\text{kN} \uparrow$ :

$$A_y + 43\text{kN} - 80\text{kN} - 90\text{kN} - 40\text{kN} = 0$$

Despejando  $A_y$  de la ecuación, tenemos:  $A_y = 167\text{kN} \uparrow$

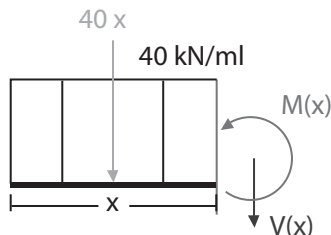
**Nota:** si al despejar las incógnitas de las ecuaciones nos dan positivas, nos indicará que asumimos la dirección de la fuerza de reacción correctamente. Si por el contrario estas fuerzas nos dan negativas, indicará que se asumió incorrectamente la dirección; por lo tanto, solo se tendrá que invertir la dirección.

- » Cortes: los cortes se realizarán dependiendo los cambios de carga que haya, es decir, justo antes que haya un cambio de carga se corta y se sacan las ecuaciones. Para trabajar los métodos tradicionales de Análisis Estructural I se necesita que exista compatibilidad entre las ecuaciones. Para eso la base “x” iniciará siempre desde el inicio de la viga.



**Nota:** los cortes se pueden hacer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda; lo importante es que todos se hagan en la misma dirección.

**Figura 1.19. Corte 1 de la viga del ejemplo 1.1**



Corte 1:  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow$

Se halla la fuerza resultante nuevamente debido a que la base cambió a “x”. La resultante R será la multiplicación de la carga distribuida por la base o distancia que abarca esa carga:

$$R = 40 x$$

Para hallar la *variación de la fuerza cortante*, se realizará la sumatoria de fuerzas en “y” (positivas si van hacia arriba y negativas si van hacia abajo):

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= -V(x) - 40 x = 0 \\ V(x) + 40 x &= 0 \end{aligned}$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$V(x) = -40 x \text{ (Ec.1.1.1)}$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 0 y 2 m de la viga.

Para hallar la *variación de los momentos*, se realizará la sumatoria de momentos producidos por las fuerzas de la viga, justo sobre el corte (positivo si el sentido respecto al corte es antihorario, y negativo si es horario):

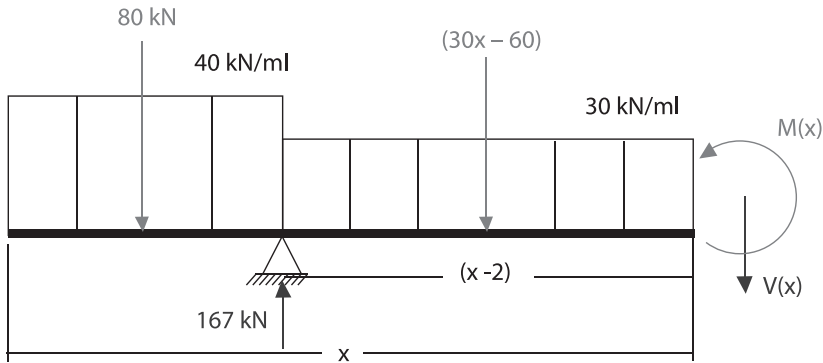
$$\begin{aligned} +\curvearrowright \Sigma M &= M(x) + 20 x^2 = 0 \\ M(x) + 20 x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x) = -20 x^2 \text{ (Ec.1.1.2)}$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 0 y 2 m de la viga.

Figura 1.20. Corte 2 de la viga del ejemplo 1.1



Corte 2:  $2 \leq x \leq 5 \rightarrow$

Se halla la fuerza resultante  $R$  nuevamente. La fuerza resultante que quedará en términos de “ $x$ ” será la que tenga base no conocida. Para la distribución de  $40 \text{ kN/ml}$ , la base es  $2 \text{ m}$ , por lo que dará un valor numérico:

$$R = 30 * (x - 2)$$

$$R = 30x - 60$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(x) - 80 - 30x + 60 + 167 = 0$$

$$V(x) = -80 - 30x + 60 + 167$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$V(x) = -30x + 147 \text{ (Ec. 1.1.3)}$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias  $2 \text{ m}$  y  $5 \text{ m}$  de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M = M(x) - 167(x-2) + 80(x-1) + (30x-60)(0,5x-1) = 0$$

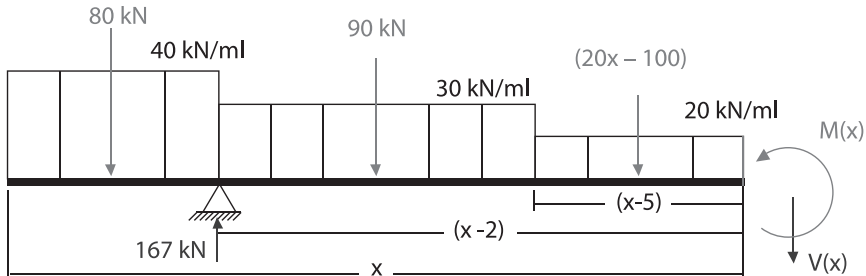
$$M(x) - 167x + 334 + 80x - 80 + 15x^2 - 30x - 30x + 60 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x) = -15x^2 + 147x - 314 \text{ (Ec. 1.1.4)}$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias  $2 \text{ m}$  y  $5 \text{ m}$  de la viga.

Figura 1.21. Corte 3 de la viga del ejemplo 1.1



Corte 3:  $5 \leq x \leq 7 \rightarrow$

Se halla la fuerza resultante R de nuevo:

$$R = 20 \cdot (x - 5)$$

$$R = 20x - 100$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(x) + 167 - 80 - 90 - 20x + 100 = 0$$

$$V(x) = 167 - 80 - 90 - 20x + 100$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$V(x) = -20x + 97 \quad (\text{Ec. 1.1.5})$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 5 m y 7 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M = M(x) - 167(x-2) + 80(x-1) + 90(x-3,5) + (20x-100)(0,5x-2,5) = 0$$

$$M(x) - 167x + 334 + 80x - 80 + 90x - 315 + 10x^2 - 50x - 50x + 250 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x) = -10x^2 + 97x - 189 \quad (\text{Ec. 1.1.6})$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 5 m y 7 m de la viga.

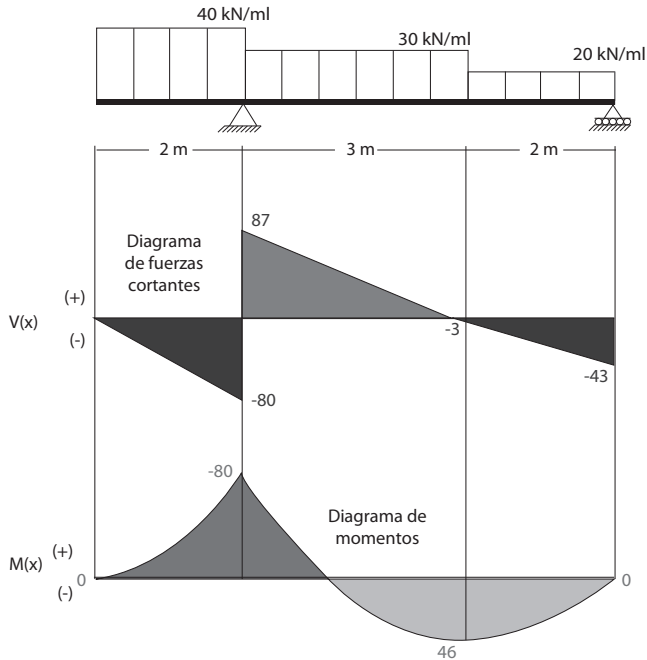
En el diagrama de momentos debe haber continuidad. Es decir, con los límites de los cortes tiene que dar el mismo momento (esto solo varía cuando tenemos momentos intermedios), y el momento al inicio y al final de la viga es cero, a

menos que exista empotramiento o un momento en el extremo; en este caso tal valor variará.

X	V(x) (kN)	M(x) (kNm)
0	0	0
1	-40	-20
2	-80	-80
2	87	-80
3	57	8
4	27	34
5	-3	46
5	-3	46
6	-23	33
7	-43	0

El diagrama de momentos se dibujará invertido, es decir, valores negativos arriba y positivos abajo. Esto se hace debido a que, en la zona donde exista diagrama de momentos, el elemento estará sometido a tensión, y en donde no haya, estará a compresión. De esta manera se podrá deducir la curvatura que tomará la deformada del elemento.

**Figura 1.22. Diagramas de cortante y momento de la viga del ejemplo 1.1.**



La zona inicial estará a tensión arriba y compresión abajo, y la zona final por el contrario estará a tensión abajo y compresión arriba.

Observamos que entre los 2 m y 5 m la gráfica pasa por cero. Eso indica que en ese punto está el cambio de curvatura de la viga, es decir, pasa de ser convexa a ser cóncava. Para hallar esa distancia igualamos la Ec. 1.1.4 a cero:

$$M(x)=0$$

$$-15x^2 + 147x - 314 = 0$$

Despejando  $x$  de la ecuación, tenemos dos valores:

$$x_1 = 6,65 \text{ m} \text{ y } x_2 = 3,14 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia es  $x=3,14 \text{ m}$  ya que está en el intervalo  $2 \leq x \leq 5$ . Así pues, la viga será convexa de 0 m a 3,14 m y será cóncava de 3,14 m a 7 m.

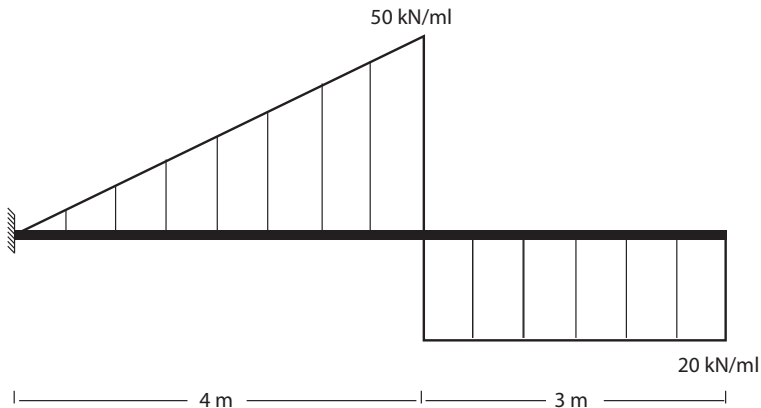
**Figura 1.23. Posible deformada de la viga del ejemplo 1.1**



### 1.7.2. Ejemplo 1.2

Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la viga de la figura 1.24.

**Figura 1.24. Viga del ejemplo 1.2**



- Grado de indeterminación:

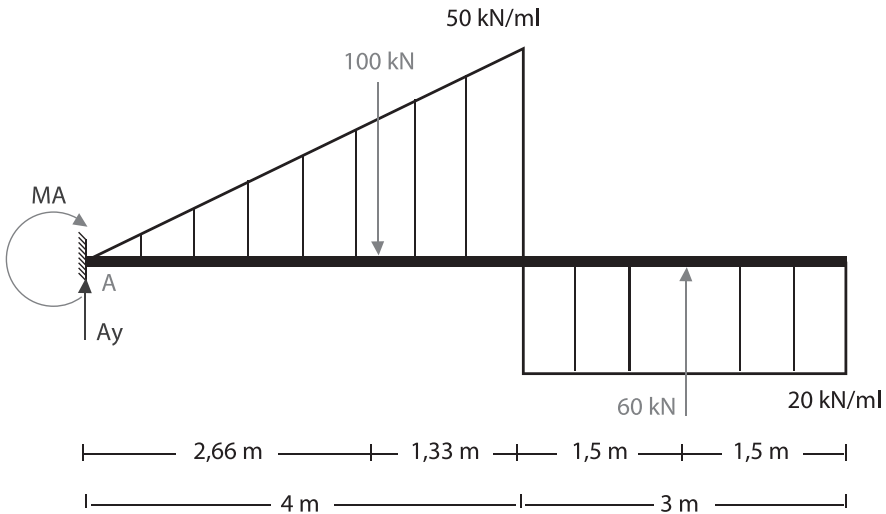
$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 2 - (2 + 0) = 0$$

*Isostático.*

- Resultantes de cargas: primero pasamos las cargas distribuidas a cargas puntuales y ubicamos las fuerzas en el centroide. Además, en los apoyos se supone la dirección de las fuerzas restrictivas.

**Figura 1.25. Resultantes de las cargas de la viga del ejemplo 1.2**



- Reacciones en los apoyos: se determinan las reacciones haciendo sumatoria de fuerzas verticales o en “y” de tal manera que estas sean iguales a cero, y se hace sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas sobre algún punto de la viga (por lo general se hace sobre alguno de los apoyos). Luego se soluciona el sistema de ecuaciones 2 x 2.

*Sumatoria de momentos* positivos antihorarios o en contra del movimiento de las manecillas del reloj:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = -(100 \text{ kN} * 2,66 \text{ m}) + (60 \text{ kN} * 5,5 \text{ m}) - M_A = 0$$

$$-266,66 \text{ kNm} + 330 \text{ kNm} - M_A = 0$$

Despejando  $M_A$  de la ecuación, tenemos:

$$M_A = 63,333 \text{ kNm} \cup$$

Para la sumatoria de fuerzas solo existen fuerzas verticales; por lo tanto, se hará en “y”, positivas en dirección hacia arriba:

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 100 \text{ kN} + 60 \text{ kN} = 0$$

$$A_y - 100 \text{ kN} + 60 \text{ kN} = 0$$

Despejando  $A_y$  de la ecuación, tenemos:

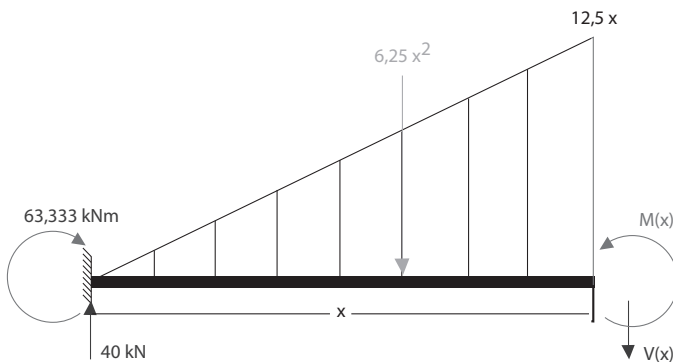
$$A_y = 40 \text{ kN} \uparrow$$

- Cortes: se realizarán dependiendo de los cambios de carga que haya, es decir, justo antes que haya un cambio de carga se corta y se sacan las ecuaciones.

Corte 1:  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

Se halla la fuerza resultante  $R$  nuevamente debido a que la base cambió a "x". Para esto se hace relación de triángulos:

**Figura 1.26. Corte 1 de la viga del ejemplo 1.2**



$$\frac{50}{4} = \frac{y}{x}$$

$$y = 12,5 x$$

Esto indica que la carga distribuida en forma de triángulo y en términos de  $x$  es de  $y = 12,5 x$ .

Hallando la resultante, obtenemos (recordar que la resultante es el área de dicha figura):

$$R = \frac{(12,5 x) * (x)}{2}$$

$$R = 6,25 x^2$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(x) - 6,25 x^2 + 40 = 0$$

$$-V(x) - 6,25 x^2 + 40 = 0$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$V(x) = -6,25 x^2 + 40 \quad (\text{Ec. 1.2.1})$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 0 m y 4 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M = M(x) - 63,333 + (6,25 x^2) * (x/3) - 40 x = 0$$

$$M(x) - 63,333 + 2,0833 x^3 - 40 x = 0$$

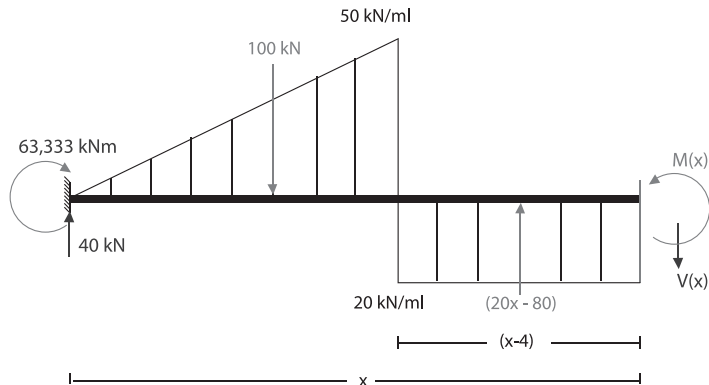
Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x) = -2,0833 x^3 + 40 x + 63,333 \quad (\text{Ec. 1.2.2})$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 0 m y 4 m de la viga.

Corte 2:  $4 \leq x \leq 7 \rightarrow$

**Figura 1.27. Corte 2 de la viga del ejemplo 1.2**



Se halla la fuerza resultante  $R$  de nuevo. Esta quedará en términos de “ $x$ ” y será la que tenga base no conocida. Para la distribución triangular de 50 kN/ml, la base es 4 m, por lo que dará un valor numérico:



$$R=20*(x-4)$$

$$R =20 x-80$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma Fy = -V(x)-100+20 x-80+40 = 0$$

$$-V(x) - 100+20 x-80+40 = 0$$

Despejando V(x) de la ecuación, tenemos:

$$V(x)=20 x-140 \text{ (Ec.1.2.3)}$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 4 m y 7 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M = M(x) - 63,333 - 40 x + 100(x - 2,66) - (20 x - 80)(0,5 x - 2) = 0$$

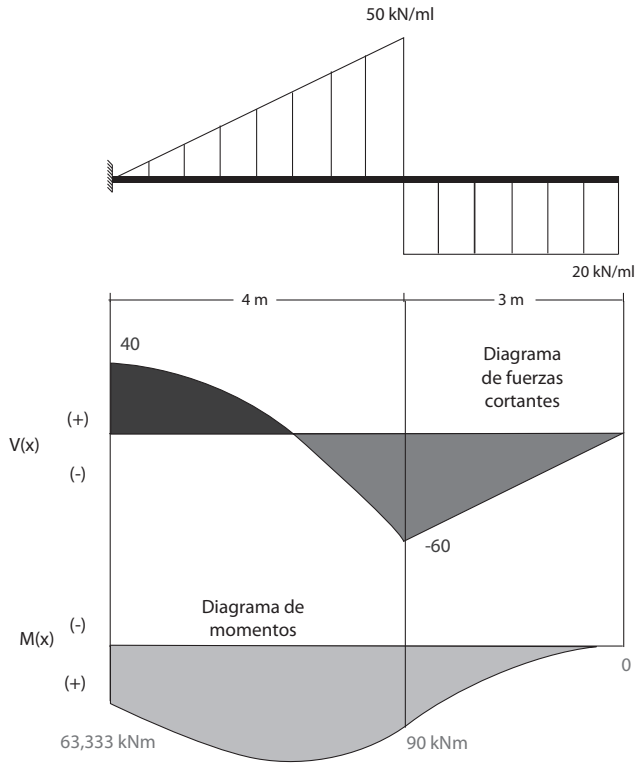
$$M(x) - 63,333 - 40 x + 100 x - 266,66 - 10 x^2 + 40 x + 40 x - 160 = 0$$

Despejando M(x) de la ecuación, tenemos:

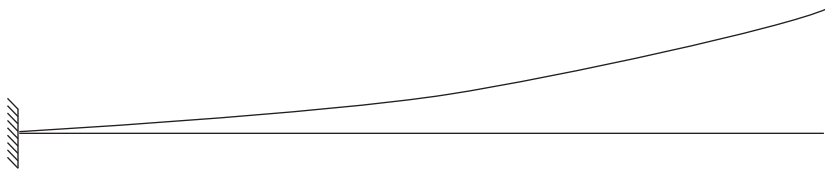
$$M(x) = 10 x^2-140 x + 490 \text{ (Ec.1.2.4)}$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 4 m y 7 m de la viga.

X	V(x) (kN)	M(x) (kNm)
0	40	63,333
1	33,75	101,25
2	15	126,667
3	-16,25	127,0842
4	-60	90
4	-60	90
5	-40	40
6	-20	10
7	0	0

**Figura 1.28. Diagramas de cortante y momento de la viga del ejemplo 1.2**

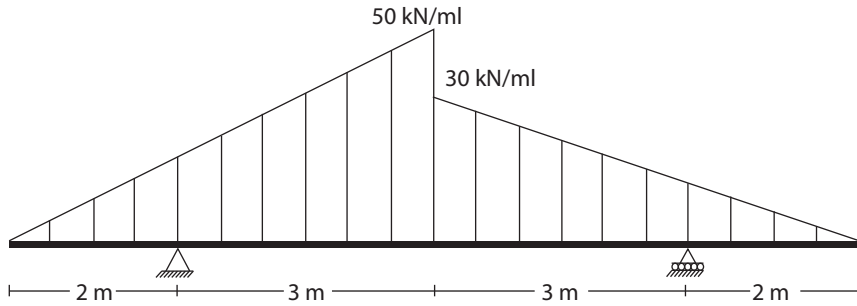
El diagrama de momentos nos ayuda a suponer la elástica o la deformación de la viga. Es decir, en la zona donde haya momentos la viga estará a tensión. Toda la viga está a compresión por encima y a tensión por debajo.

**Figura 1.29. Posible deformada de la viga del ejemplo 1.2**

### 1.7.3. Ejemplo 1.3

Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la viga de la figura 1.30.

**Figura 1.30. Viga del ejemplo 1.3**



- Grado de indeterminación:

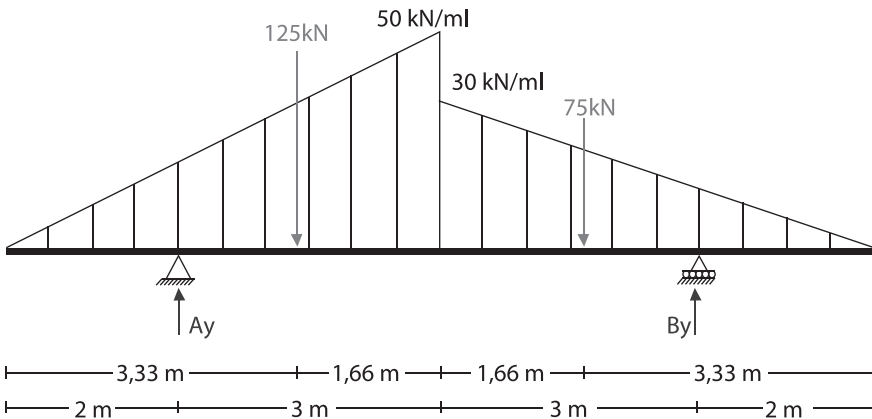
$$GI = R - (Ec + Art.)$$

$$GI = 2 - (2 + 0) = 0$$

*Isostático.*

- Resultantes de cargas: primero pasamos las cargas distribuidas a cargas puntuales y ubicamos las fuerzas en el centroide. Además, en los apoyos se supone la dirección de las fuerzas restrictivas.

**Figura 1.31. Resultantes de las cargas de la viga del ejemplo 1.3**



- Reacciones en los apoyos: se determinan las reacciones haciendo sumatoria de fuerzas verticales o en “y” de tal manera que estas sean iguales a cero, y se hace sumatoria de los momentos producidos por las fuerzas sobre algún punto de la viga (por lo general se hace sobre alguno de los apoyos). Luego se soluciona el sistema de ecuaciones 2 x 2.

Sumatoria de momentos positivos antihorarios o en contra del movimiento de las manecillas del reloj:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = -(125 \text{ kN} \cdot 1,33\text{m}) - (75 \text{ kN} \cdot 4,66\text{m}) + 6B_y = 0$$

$$-(125 \text{ kN} \cdot 1,33\text{m}) - (75 \text{ kN} \cdot 4,66\text{m}) + 6B_y = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, tenemos:

$$B_y = 86,1108 \text{ kN}\uparrow$$

Para la sumatoria de fuerzas solo existen fuerzas verticales; por lo tanto, se hará en “y”, positivas en dirección hacia arriba:

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y + 86,11008 \text{ kN} - 125 \text{ kN} - 75 \text{ kN} = 0$$

$$A_y + 86,11008 \text{ kN} - 125 \text{ kN} - 75 \text{ kN} = 0$$

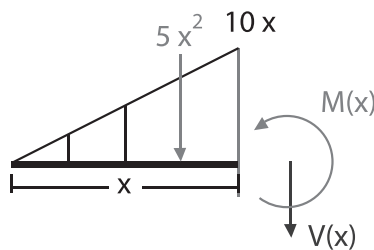
Despejando  $A_y$  de la ecuación, tenemos:  $A_y = 113,8892 \text{ kN}\uparrow$

- Cortes: se realizarán dependiendo de los cambios de carga que haya, es decir, justo antes que haya un cambio de carga se corta y se sacan las ecuaciones.

**Nota:** los cortes se pueden hacer de izquierda a derecha o de derecha a izquierda; lo importante es que todos se hagan en la misma dirección.

Corte 1:  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow$

Figura 1.32. Corte 1 de la viga del ejemplo 1.3



Se halla la fuerza resultante  $R$  nuevamente debido a que la base cambió a “x”. Para esto se hace relación de triángulos:

$$\frac{50}{5} = \frac{y}{x}$$

$$y = 10x$$

Esto indica que la carga distribuida en forma de triángulo y en términos de  $x$  es de  $y = 10 x$ .

Hallando la resultante, obtenemos (recordar que la resultante es el área de dicha figura):

$$R = \frac{(10 x) * (x)}{2}$$

$$R = 5 x^2$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma Fy = -V(x) - 5x^2 = 0$$

$$-V(x) - 5x^2 = 0$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:  $V(x) = -5x^2$  (Ec.1.3.1)

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 0 m y 2 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M = M(x) + 5x^2(0, \overline{33}x) = 0$$

$$M(x) + 5x^2(0, \overline{33}x) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

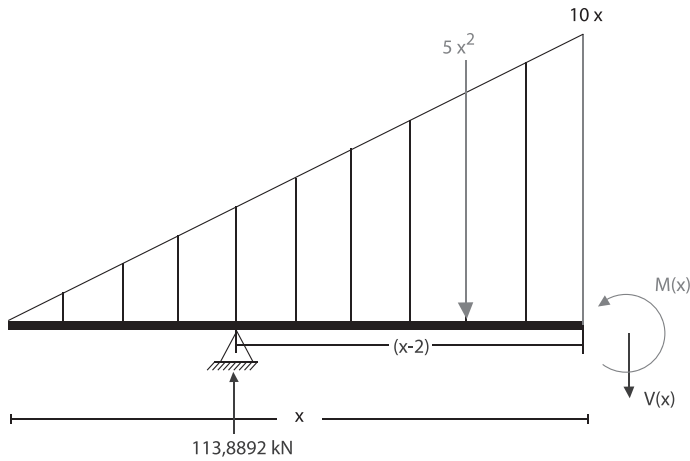
$$M(x) = -1, \overline{66}x^3 \text{ (Ec. 1.3.2)}$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 0 m y 2 m de la viga.

Corte 2:  $2 \leq x \leq 5 \rightarrow$

Se vuelve a determinar el valor de la carga distribuida en términos de la base "x". Ahora bien, como en este caso se habla de la misma relación de triángulos, entonces la resultante en términos de  $x$  será la misma dada en el corte anterior:

Figura 1.33. Corte 2 de la viga del ejemplo 1.3



$$R = 5x^2$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(x) + 113,8892 - 5x^2 = 0$$

$$-V(x) + 113,8892 - 5x^2 = 0$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$V(x) = -5x^2 + 113,8892 \quad (\text{Ec. 1.3.3})$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 2 m y 5 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M = M(x) - 113,8892(x - 2) + 5x^2(0,33x) = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M = M(x) - 113,8892x + 227,7784 + 1,66x^3 = 0$$

$$M(x) - 113,8892x + 227,7784 + 1,66x^3 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

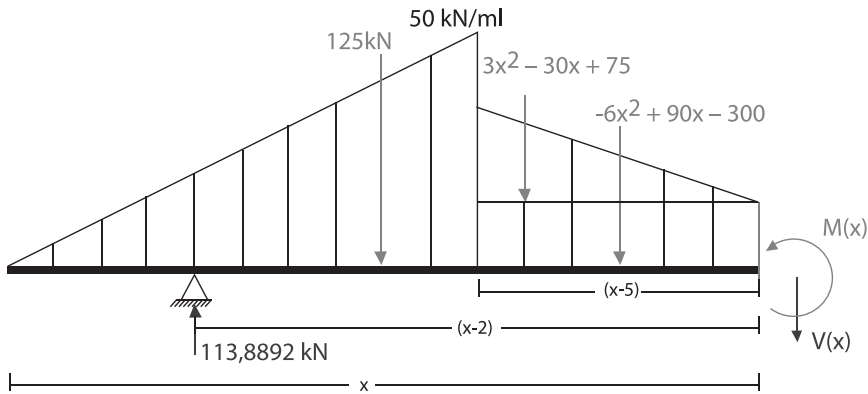
$$M(x) = -1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784 \quad (\text{Ec. 1.3.4})$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 2 m y 5 m de la viga.

Corte 3:  $5 \leq x \leq 8 \rightarrow$

Se halla la fuerza resultante R de nuevo. Esta quedará en términos de "x" y será la que tenga base no conocida. Para la distribución triangular de 50 kN/ml la base es 5 m, por lo que dará un valor numérico.

**Figura 1.34. Corte 3 de la viga del ejemplo 1.3**



En la figura 1.34 se muestra que es un trapecio donde la longitud es una incógnita. Por lo tanto, debemos hallar dos resultantes: una para el triángulo y otra para el rectángulo.

Se hace una relación de triángulos:

$$\frac{30}{5} = \frac{y}{x-5}$$

$$y = \frac{30 * (x-5)}{5}$$

$$y = 6x - 30$$

Esta será la carga triangular. Para determinar la carga rectangular a la carga total, que es  $30 \text{ kN/ml}$ , le restamos lo de la carga triangular:

$$y = 30 - (6x - 30)$$

$$y = 60 - 6x$$

Con esas cargas en términos de  $x$ , hallamos las resultantes de la siguiente manera:

$$R_{\Delta} = \frac{(6x - 30)(x - 5)}{2}$$

$$R_{\Delta} = 3x^2 - 30x + 75$$

$$R_{\Delta} = (60 - 6x)(x - 5)$$

$$R_{\Delta} = -6x^2 + 90x - 300$$

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(x) + 113,8892 - 125 - 3x^2 + 30x - 75 + 6x^2 - 90x + 300 = 0$$

$$-V(x) + 113,8892 - 125 - 3x^2 + 0x - 75 + 6x^2 - 90x + 300 = 0$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$V(x) = 3x^2 - 60x + 213,8892 \quad (\text{Ec.1.3.5})$$

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 5 m y 8 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M = M(x) - 113,8892(x - 2) + 125(x - 3, \overline{33})$$

$$+ (3x^2 - 30x + 75)(0, \overline{66}x - 3, \overline{33})$$

$$+ (-6x^2 + 90x - 300)(0,5x + 2,5) = 0$$

$$M(x) - 113,8892x + 227,7784 + 125x - 416,6625$$

$$+ 2x^3 - 10x^2 - 20x^2 + 100x + 50x - 250$$

$$- 3x^3 + 15x^2 + 45x^2 - 225x - 150x + 750 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

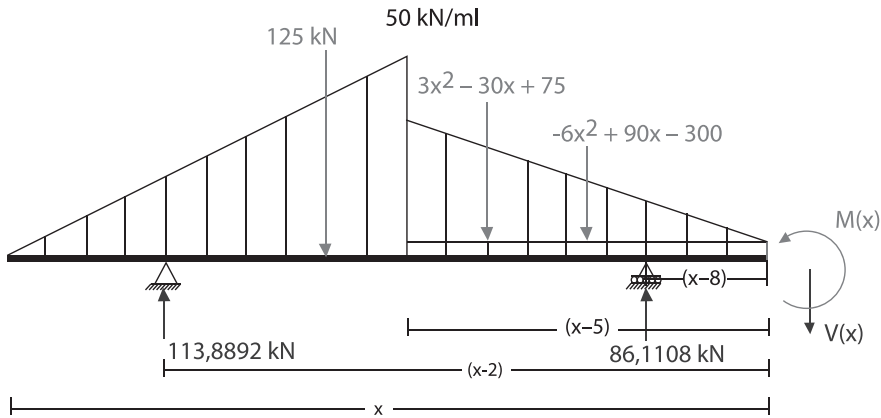
$$M(x) = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159 \quad (\text{Ec.1.3.6})$$

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 5 m y 8 m de la viga.



Corte 4:  $8 \leq x \leq 10 \rightarrow$

Figura 1.35. Corte 4 de la viga del ejemplo 1.3



En la figura 1.35 podemos observar que las condiciones de la viga son las mismas que las del corte 3, con la única excepción de que entra en este corte la fuerza ejercida por la reacción del apoyo de primer grado.

Variación de la fuerza cortante:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(x) + 113,8892 - 125 - 3x^2 + 30x - 75 + 6x^2 - 90x + 300 + 86,1108 = 0$$

$$-V(x) + 113,8892 - 125 - 3x^2 + 30x - 75 + 6x^2 - 90x + 300 + 86,1108 = 0$$

Despejando  $V(x)$  de la ecuación, tenemos:  $V(x) = 3x^2 - 60x + 300$  (Ec.1.3.7)

Esta ecuación nos da la variación de las fuerzas cortantes entre las distancias 8 m y 10 m de la viga.

Variación de los momentos:

$$\begin{aligned} +\cup \Sigma M &= M(x) - 113,8892(x - 2) + 125(x - 3,33) \\ &+ (3x^2 - 30x + 75)(0,66x - 3,33) \\ &+ (-6x^2 + 90x - 300)(0,5x + 2,5) - 86,1108(x - 8) = 0 \end{aligned}$$

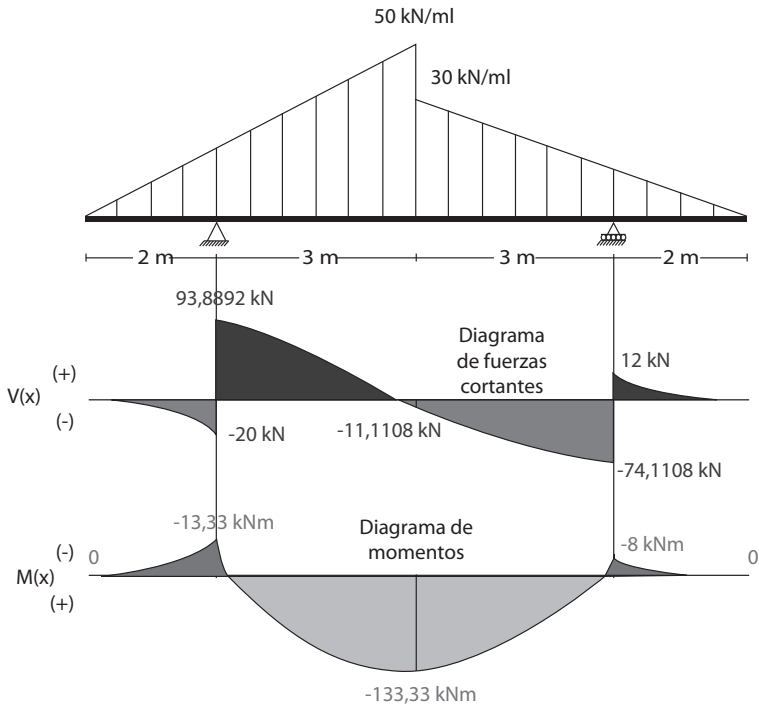
$$\begin{aligned} M(x) - 113,8892x + 227,7784 + 125x - 416,6625 \\ + 2x^3 - 10x^2 - 20x^2 + 100x + 50x - 250 - 3x^3 + 15x^2 \\ + 45x^2 - 225x - 150x + 750 - 86,1108x + 688,8864 = 0 \end{aligned}$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:  $M(x) = x^3 - 30x^2 + 300x - 1.000$  (Ec.1.3.8).

Esta ecuación nos da la variación de los momentos entre las distancias 8 m y 10 m de la viga.

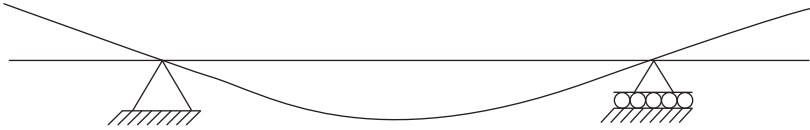
X	V(x) (kN)	M(x) (kNm)
0	0	0
1	-5	-1,6665
2	-20	-13,332
2	93,88	-13,332
3	68,88	68,89
4	33,88	121,12
5	-11,11	133,35
5	-11,11	133,35
6	-38,11	108,22
7	-59,11	59,11
8	-74,11	-8
8	12	-8
9	3	-1
10	0	0

Figura 1.36. Diagramas de cortante y momento de la viga del ejemplo 1.3



El diagrama de momentos nos ayuda a suponer la elástica o la deformación de la viga. Es decir, en la zona donde haya momentos, la viga estará a tensión, sabiendo que, dependiendo del diagrama de momentos, cambia la curvatura.

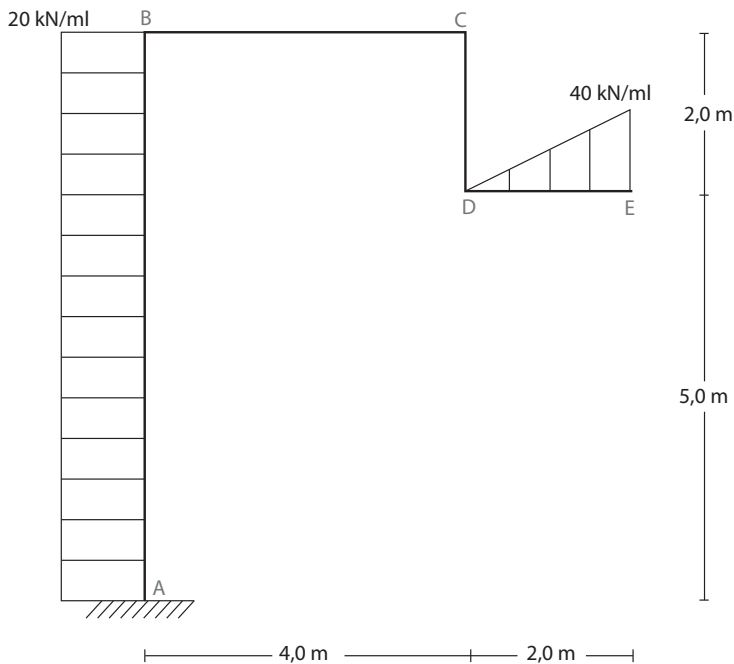
**Figura 1.37. Posible deformada de la viga del ejemplo 1.3**



### 1.7.4. Ejemplo 1.4

Realizar diagrama de momentos para el pórtico de la figura 1.38.

**Figura 1.38. Pórtico del ejemplo 1.4**



- Grado de indeterminación:

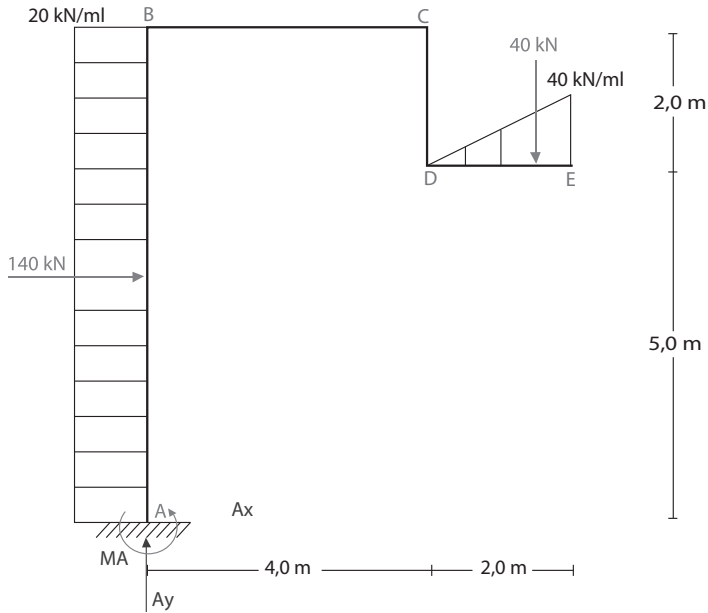
$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 3 - (3 + 0) = 0$$

*Isostático.*

- Resultantes de cargas: primero pasamos las cargas distribuidas a cargas puntuales y ubicamos las fuerzas en el centroide. Además, en los apoyos se supone la dirección de las fuerzas restrictivas.

**Figura 1.39. Resultantes de las cargas del pórtico del ejemplo 1.4**



Para este ejercicio hay que proceder a hallar las tres reacciones utilizando las tres ecuaciones básicas de la estática (sumatoria de momentos, sumatoria de fuerzas horizontales y sumatoria de fuerzas verticales), las cuales deben ser igual a cero para cumplir con el equilibrio del elemento.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 140 \text{ kN} - A_x = 0$$

$$A_x = 140 \text{ kN} \leftarrow$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 40 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = 40 \text{ kN} \uparrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = -\left(40 \text{ kN} \cdot \frac{16}{3} \text{ m}\right) - (140 \text{ kN} \cdot 3,5 \text{ m}) + M_A = 0$$

$$M_A = 703,33 \text{ kNm} \circlearrowleft$$

Para realizar el diagrama de momentos, debemos determinar las ecuaciones, y para hallar estas ecuaciones, los cortes deben estar divididos por tramos (considérese un tramo una barra de nudo a nudo). Debido a que las fuerzas están actuando en todo el elemento en conjunto, se debe primero conocer cuáles son las fuerzas internas en cada uno de los nudos, lo cual se determina haciendo equilibrios.

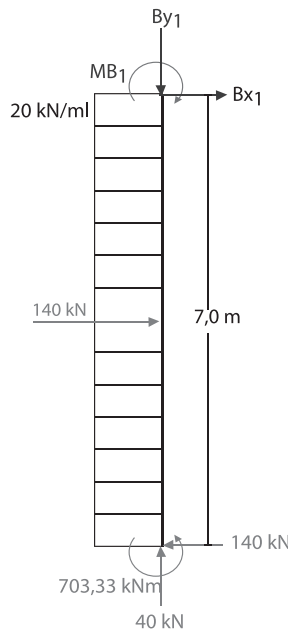
Equilibrar un pórtico consiste en determinar las fuerzas que debe haber en los extremos de las barras para que se cumplan las ecuaciones de la estática en los nodos, y de manera que además en las barras también se cumpla con las ecuaciones de la estática.

Teniendo en cuenta que un nodo puede llegar a tener máximo tres tipos de fuerzas (una horizontal, una vertical y un momento), entonces una barra atada a dos nodos tendrá por consiguiente seis fuerzas. Debido a que solo existen tres ecuaciones básicas de la estática, se puede concluir que es necesario empezar por las barras cuyo número de incógnitas sea tres.

En el pórtico del ejemplo 1.4, las barras "A-B" y "D-E" son las que tienen tres incógnitas, ya que en el extremo del voladizo no hay fuerzas ni momentos, mientras que las fuerzas del apoyo empotrado ya son datos conocidos y, por lo tanto, ya no son incógnitas.

#### *Equilibrio A-B*

**Figura 1.40. Barra A-B del pórtico del ejemplo 1.4**



En el nodo A, el cual es el apoyo empotrado, encontramos que las fuerzas son:

$$A_x = 140 \text{ kN} \leftarrow$$

$$A_y = 40 \text{ kN} \uparrow$$

$$M_A = 703,33 \text{ kNm} \curvearrowright$$

Además, la barra tiene 7 m de largo y una carga distribuida lineal de 20 kN/ml, cuya resultante es 140 kN.

Se supone una dirección de las tres fuerzas en el nodo B, y se procede a realizar las sumatorias de fuerzas y de momentos para hallar estos tres valores. Si la respuesta es positiva, se asumió correctamente la dirección; si por el contrario nos da negativa, lo que debemos hacer es invertir el signo y la dirección.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 140 - 140 + B_{x_1} = 0$$

$$B_{x_1} = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = -B_{y_1} + 40 = 0$$

$$B_{y_1} = 40 \text{ kN} \downarrow$$

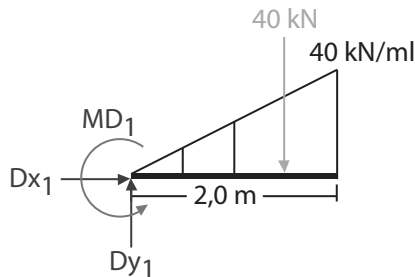
*Sumatoria de momentos:*

$$+\curvearrowright \Sigma M_B = -(140 \cdot 7) + (140 \cdot 3,5) + 703,33 - M_{B_1} = 0$$

$$M_{B_1} = 213,33 \text{ kNm} \curvearrowright$$

*Equilibrio D-E*

**Figura 1.41. Barra D-E del pórtico del ejemplo 1.4**



Como es un voladizo, las fuerzas en el extremo son cero, tanto para fuerzas como para momentos. Por lo tanto, se procede a determinar las tres incógnitas por la acción de la carga distribuida triangular, la cual tiene una resultante de 40 kN.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = D_{x_1} = 0$$

$$D_{x_1} = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = D_{y_1} - 40 = 0$$

$$D_{y_1} = 40 \text{ kN} \uparrow$$

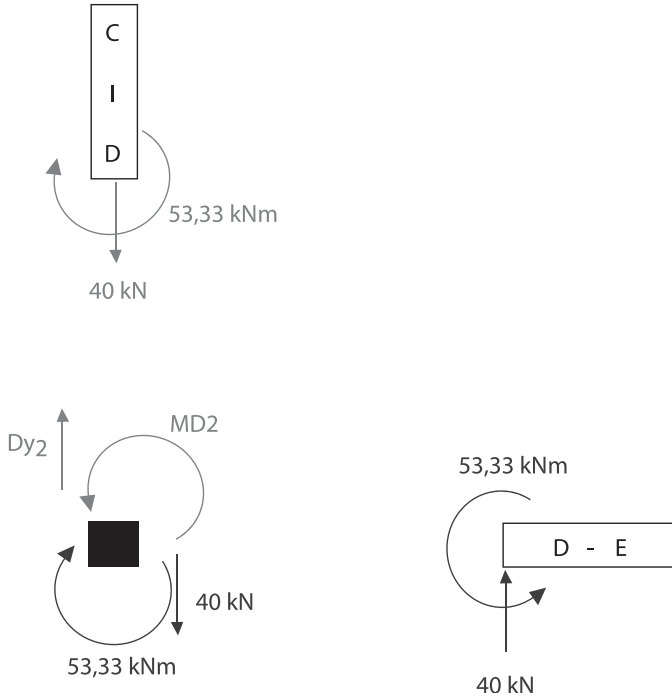
*Sumatoria de momentos:*

$$+\curvearrowright \Sigma M_D = -(40 \cdot 4/3) + M_{D1} = 0$$

$$M_{D1} = 53,33 \text{ kNm} \curvearrowright$$

Para poder realizar los equilibrios de las barras internas, las cuales tienen seis incógnitas, primero debemos hallar tres de ellas para poder determinar las otras. Esto se obtiene haciendo equilibrio en el nudo, conociendo que para que el nudo esté en tal condición deben cumplirse las ecuaciones de la estática.

Como en los nodos existen dos fuerzas y un momento por cada una de las barras que lleguen a ellos, se deberá empezar a hacer equilibrio en los nudos a los cuales solo les falte una barra por ser equilibrada. Para el ejemplo observamos que a cada nudo le llegan dos barras, lo que quiere decir que cada nudo tiene seis incógnitas. Sin embargo, a los nudos B y D solo les falta una barra por ser equilibrada, es decir, cualquiera de estos dos nudos se puede equilibrar para seguir con el equilibrio general del pórtico.

*Equilibrio en D***Figura 1.42. Nudo D del pórtico del ejemplo 1.4**

Para realizar el equilibrio en el nudo D, tomamos las fuerzas que tocan dicho nudo de la barra DE y las trasladamos al nudo. Esto se hace con el mismo signo, pero con sentido contrario, tal y como se aprecia en la figura 1.42.

Dentro del nudo se suponen dos fuerzas (una horizontal y una vertical) y un momento, y se hallan los valores con las ecuaciones básicas de la estática.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = D_{x_2} = 0$$

$$D_{x_2} = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = D_{y_2} - 40 = 0$$

$$D_{y_2} = 40 \text{ kN} \uparrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\cup \Sigma M_D = -53,33 + M_{D_2} = 0$$

$$M_{D_2} = 53,33 \text{ kNm} \cup$$

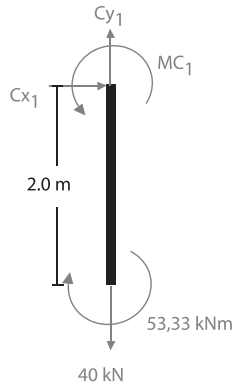


Una vez se hallaron estas fuerzas y momentos necesarios para que las sumas de fuerzas y de momentos sean iguales a cero, se procede a trasladarlas a la otra barra con el mismo signo pero con sentido contrario, tal y como se aprecia en la figura 1.42.

Para este caso ya conocemos tres de las seis incógnitas de la barra D-C, por lo que podemos equilibrarla.

### Equilibrio C-D

**Figura 1.43. Barra C-D del pórtico del ejemplo**



Se suponen las direcciones de las dos fuerzas y la del momento y se procede a determinar los valores de dichas incógnitas.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = C_{x1} = 0$$

$$C_{x1} = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = C_{y1} - 40 = 0$$

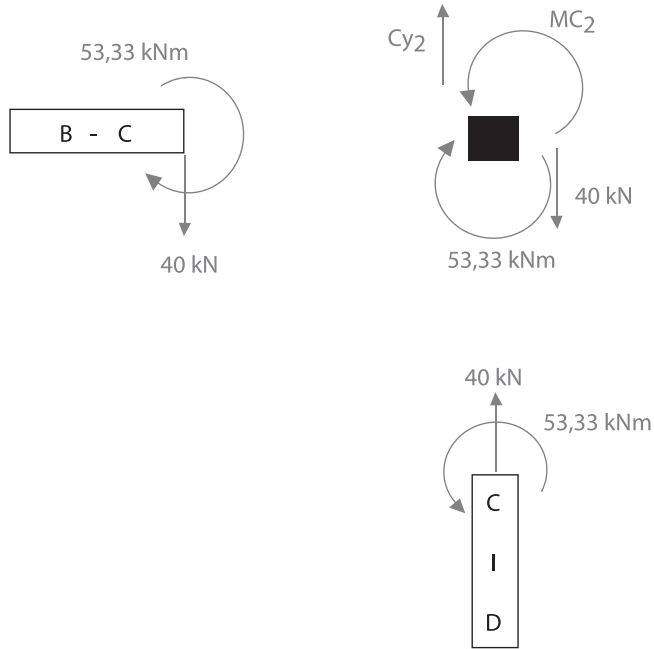
$$C_{y1} = 40 \text{ kN} \uparrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowright \Sigma M_D = -53,33 + M_{C1} = 0$$

$$M_{C1} = 53,33 \text{ kNm} \circlearrowright$$

En este caso podemos analizar que solo nos faltan por conocer las incógnitas de una de las dos barras que llegan al nudo C, por lo que se procederá a realizar el equilibrio de este.

*Equilibrio en C***Figura 1.44. Nudo C del pórtico del ejemplo 1.4**

Trasladamos los datos de la barra C-D al nudo, con el mismo signo pero con sentido contrario, y determinamos los valores con las ecuaciones básicas de la estática.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = Cx_2 = 0$$

$$Cx_2 = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = Cy_2 - 40 = 0$$

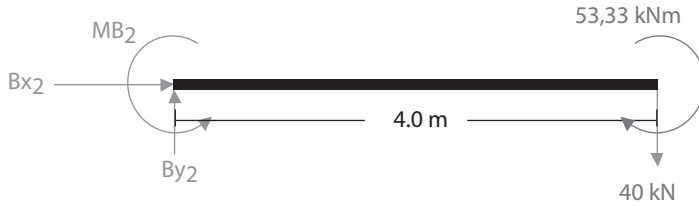
$$Cy_2 = 40 \text{ kN}\uparrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = -53,33 + M_{C_2} = 0$$

$$M_{C_2} = 53,33 \text{ kNm}\circlearrowleft$$

Luego trasladamos los datos hallados a la barra B-C, con el mismo signo pero con sentido contrario. Analizamos, además, que la barra B-C solo tiene tres incógnitas.

*Equilibrio B-C***Figura 1.45. Barra B-C del pórtico del ejemplo 1.4**

Se suponen las direcciones de las dos fuerzas y la del momento y se procede a determinar los valores de dichas incógnitas.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = Bx_2 = 0$$

$$Bx_2 = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = By_2 - 40 = 0$$

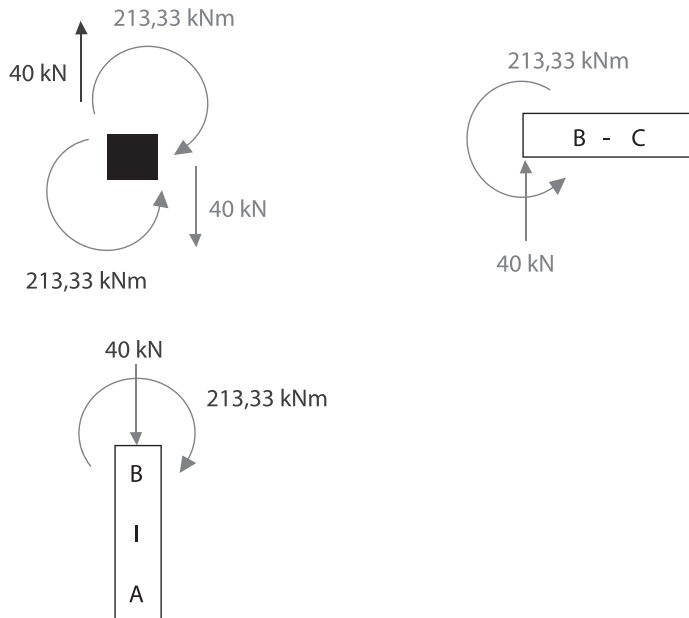
$$By_2 = 40 \text{ kN} \uparrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = -53,33 - (40 \cdot 4) + M_{B2} = 0$$

$$M_{B2} = 213,33 \text{ kNm} \circlearrowleft$$

Ya tenemos determinadas todas las fuerzas de equilibrio del pórtico en general. Así pues, se hace una comprobación sencilla, la cual consiste en hacer equilibrio en el único nudo que no hemos equilibrado. Debido a que en este nudo no hay incógnitas, se hacen las sumatorias de fuerzas y de momentos, que deben dar cero.

*Equilibrio en B***Figura 1.46. Nudo B del pórtico del ejemplo 1.4**

Tomamos los datos de la barra A-B y los de la barra B-C y los trasladamos al nudo B, con la misma dirección.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_x = 0, \text{"ok"}$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 40 - 40 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, \text{"ok"}$$

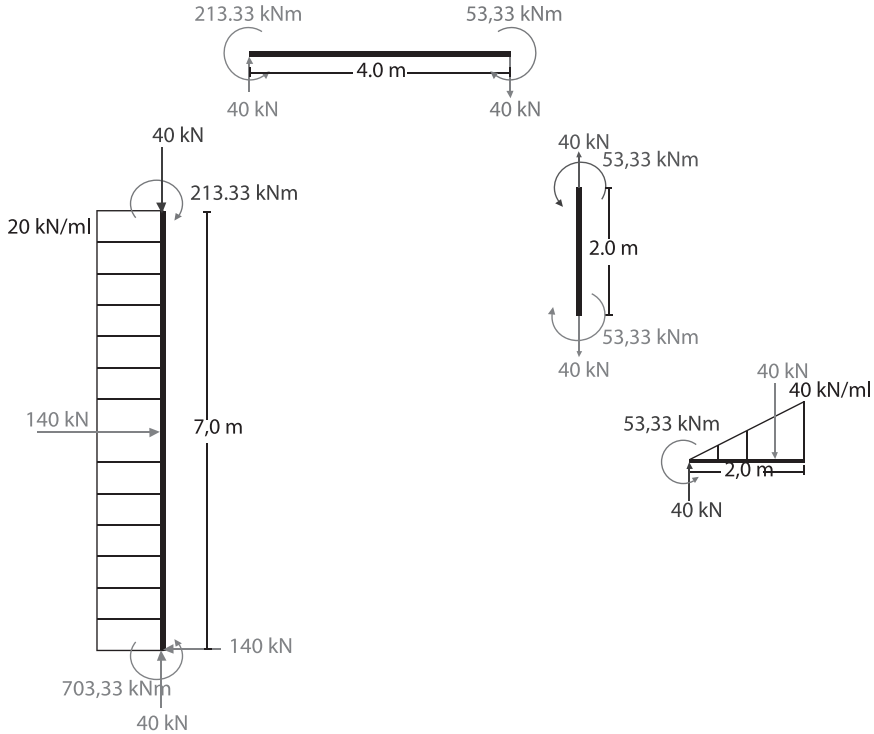
*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = -213,33 + 213,33 = 0$$

$$\Sigma M_D = 0, \text{"ok"}$$

Con el pórtico finalmente equilibrado, ya podemos proceder a determinar las ecuaciones para la realización del diagrama de momentos.

**Figura 1.47. Equilibrio del pórtico del ejemplo 1.4**

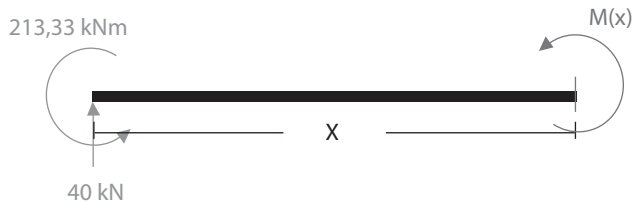


Los cortes se hacen por barra, desde cero hasta el valor de la longitud. Internamente, la barra tendrá más de un corte cuando existan cambios de cargas.

Las barras “A-B” y “D-E” tienen cargas distribuidas, pero no hay cambios bruscos dentro de ellas, mientras que las barras “B-C” y “C-D” no tienen cargas, por lo que los cortes quedan de la siguiente forma:

Corte 1 (B-C):  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

**Figura 1.48. Corte 1 del pórtico del ejemplo 1.4**



Variación de los momentos:

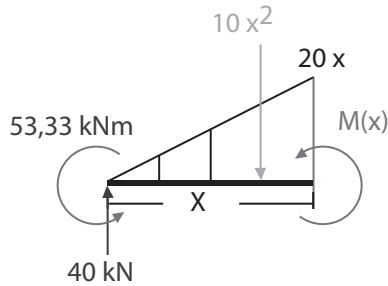
$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_1 = M(x) - 40x + 213,33 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_1 = 40x - 213,33 \text{ (Ec.1.4.1)}$$

Corte 2 (D-E):  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow$

**Figura 1.49. Corte 2 del pórtico del ejemplo 1.4**



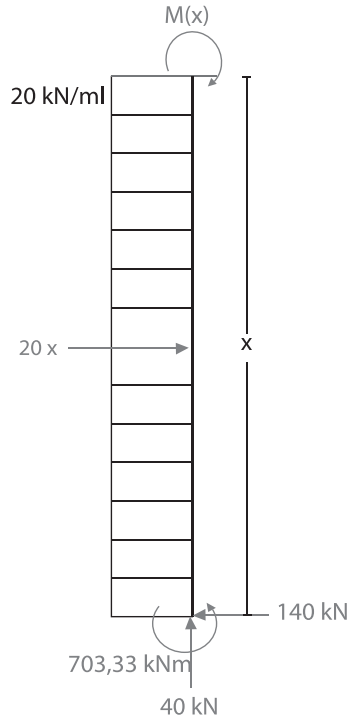
Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_2 = M(x) + 10x^2 * \left(\frac{1}{3}x\right) - 40 * (x) + 53,33$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_2 = -3,33x^3 + 40x - 53,33 \text{ (Ec.1.4.2)}$$

Corte 3 (A-B):  $0 \leq x \leq 7 \uparrow$

**Figura 1.50. Corte 3 del pórtico del ejemplo 1.4**

Variación de los momentos: en el caso de las columnas, el momento  $M(x)$  del corte será positivo; arriba horario y abajo antihorario. Lo mismo sucede en la viga, con el nudo inicial arriba y con el nudo final abajo:

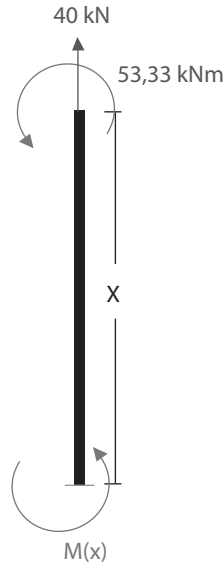
$$+\cup \sum M(x)_3 = -M(x) + 20x * \left(\frac{x}{2}\right) - 140x + 703,33 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33 \text{ (Ec. 1.4.3)}$$

Corte 4 (C-D):  $0 \leq x \leq 2$

Figura 1.51. Corte 4 del pórtico del ejemplo 1.4



Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_4 = -M(x) - 53,33 = 0$$

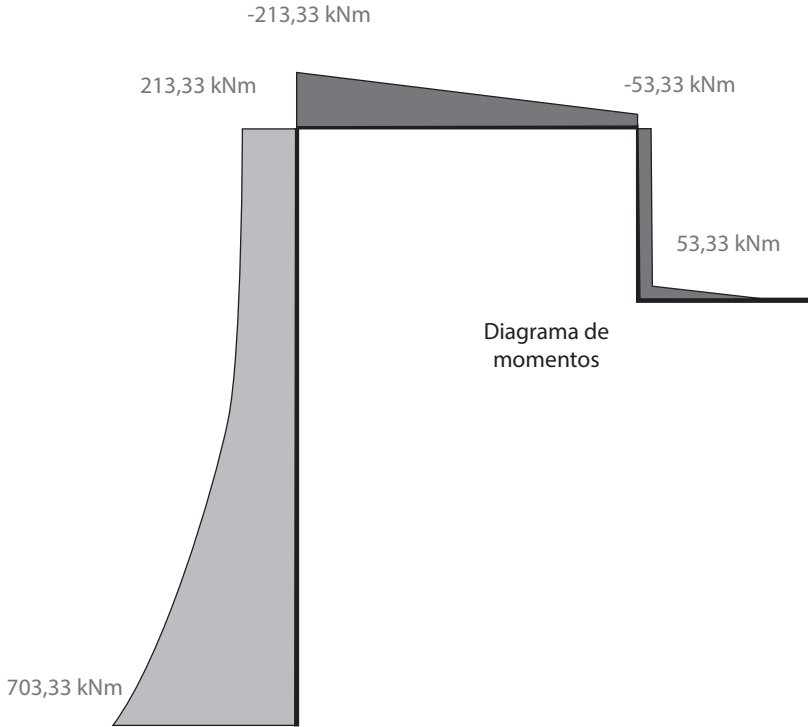
Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_4 = -53,33 \text{ (Ec.1.4.4)}$$

Se dibuja el diagrama de momentos teniendo en cuenta que en las barras horizontales (vigas) los momentos negativos van arriba, y en las barras verticales (columnas) los momentos negativos van a la derecha. Esto se debe a que el nudo inicial es arriba y el nudo final es abajo (como si la columna fuera una viga rotada  $90^\circ$  de forma horaria).

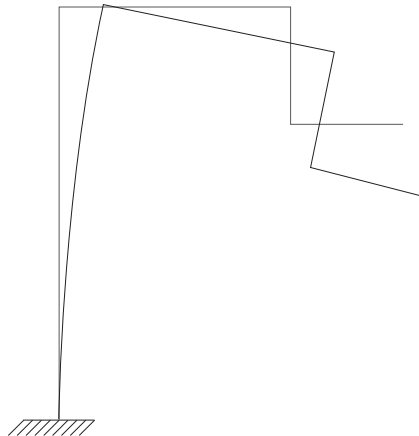


**Figura 1.52. Diagrama de momentos del pórtico del ejemplo 1.4**



El diagrama de momentos nos ayuda a suponer la elástica o la deformación del pórtico. Es decir, en la zona donde haya momentos el pórtico estará a tensión. Para este pórtico de ejemplo, la supuesta deformación será la que se muestra en la figura 1.53.

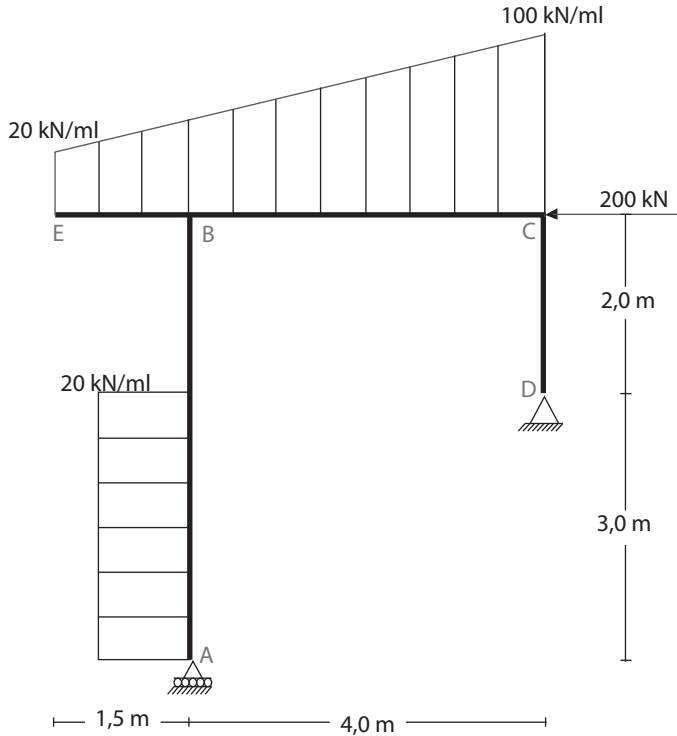
**Figura 1.53. Posible deformada del pórtico del ejemplo 1.4**



### 1.7.5. Ejemplo 1.5

Realizar diagrama de momentos para el pórtico de la figura 1.54.

Figura 1.54. Pórtico del ejemplo 1.5



- Grado de indeterminación:

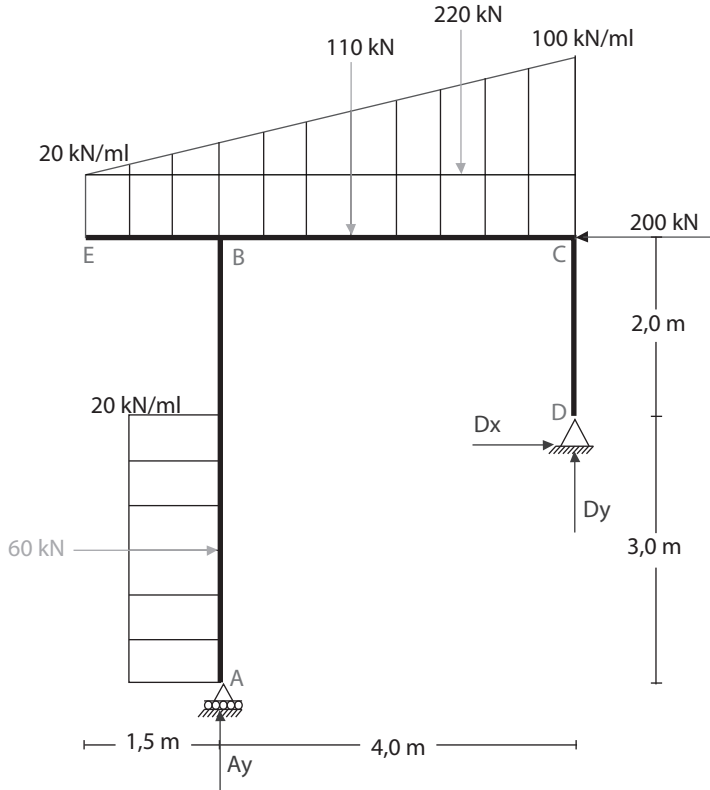
$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 3 - (3 + 0) = 0$$

*Isostático.*

- Resultantes de cargas: primero pasamos las cargas distribuidas a cargas puntuales y ubicamos las fuerzas en el centroide. Además, en los apoyos se supone la dirección de las fuerzas restrictivas.

Figura 1.55. Resultantes de las cargas del pórtico del ejemplo 1.5



Para este ejercicio hay que proceder a hallar las tres reacciones utilizando las tres ecuaciones básicas de la estática (sumatoria de momentos, sumatoria de fuerzas horizontales y sumatoria de fuerzas verticales), las cuales deben ser igual a cero para cumplir con el equilibrio del elemento.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 60 \text{ kN} - 200 \text{ kN} + D_x = 0$$

$$D_x = 140 \text{ kN} \rightarrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = -(60 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m}) - (110 \text{ kN} \cdot 1,25 \text{ m}) - (220 \text{ kN} \cdot 2,167 \text{ m}) - (140 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}) + (200 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m}) + 4D_y = 0$$

$$D_y = 31,06 \text{ kN} \uparrow$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 110 \text{ kN} - 220 \text{ kN} + 31,06 \text{ kN} = 0$$

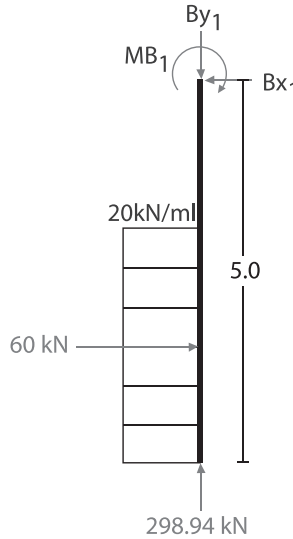
$$A_y = 298,94 \text{ kN} \uparrow$$

Para realizar el diagrama de momentos, debemos determinar las ecuaciones, y para hallar estas ecuaciones, los cortes deben estar divididos por tramos (considérese un tramo una barra de nudo a nudo). Debido a que las fuerzas están actuando en todo el elemento en conjunto, se debe primero conocer cuáles son las fuerzas internas en cada uno de los nudos, lo cual se logra haciendo equilibrios.

En el pórtico del ejemplo 1.5 las barras "A-B" y "C-D" son las que tienen tres incógnitas, ya que las dos barras tienen en uno de sus extremos un apoyo, para los cuales las incógnitas ya fueron determinadas por las ecuaciones básicas de la estática. Por lo tanto, ya se pueden equilibrar estas barras.

*Equilibrio A-B*

**Figura 1.56. Barra A-B del pórtico del ejemplo 1.5**



En el nudo A, el cual es el apoyo articulado de primer orden, encontramos que la fuerza es:

$$A_y = 298,94 \text{ kN} \uparrow$$

Además, podemos ver que dentro de la barra hay un tramo que tiene una carga distribuida de 3 m, y el resto no tiene carga. De la carga distribuida, se tiene que, al hacer la resultante, la carga puntual será de 60 kN.

Se supone una dirección de las tres fuerzas en el nodo B, y se procede a realizar las sumatorias de fuerzas y de momentos para hallar estos tres valores.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 60 + B_{x_1} = 0$$

$$B_{x_1} = 60 \text{ kN} \leftarrow$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 298,94 - B_{y_1} = 0$$

$$B_{y_1} = 298,94 \text{ kN} \downarrow$$

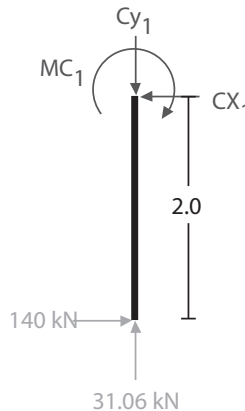
*Sumatoria de momentos:*

$$+\curvearrowright \Sigma M_B = (60 * 3,5) - M_{B_1} = 0$$

$$M_{B_1} = 210 \text{ kNm} \curvearrowright$$

*Equilibrio C-D*

**Figura 1.57. Barra C-D del pórtico del ejemplo 1.5**



En el nodo D, el cual es el apoyo articulado de segundo orden, encontramos que las fuerzas son:

$$D_x = 140 \text{ kN} \rightarrow$$

$$D_y = 31,06 \text{ kN} \uparrow$$

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 140 - C_{x_1} = 0$$

$$C_{x_1} = 140 \text{ kN} \leftarrow$$

Sumatoria de fuerzas verticales:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 31,06 - C_{y1} = 0$$

$$C_{y1} = 31,06 \text{ kN} \downarrow$$

Sumatoria de momentos:

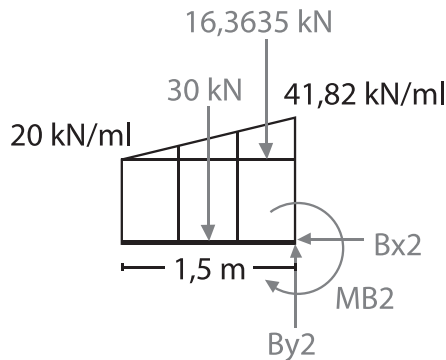
$$+\circlearrowleft \Sigma M_c = (140 \cdot 2) - M_{c1} = 0$$

$$M_{c1} = 280 \text{ kNm} \circlearrowleft$$

Otra barra a la cual le podemos hacer equilibrio inicialmente es la barra "E-B", que es un voladizo. Conociendo que en el extremo del volado no hay fuerzas, entonces ya conocemos tres de las seis incógnitas.

Equilibrio E-B

Figura 1.58. Barra E-B del pórtico del ejemplo 1.5



Como es un voladizo, las fuerzas en el extremo son cero, tanto fuerzas como momentos. Por lo tanto, se procede a determinar las tres incógnitas por la acción de la carga distribuida trapezoidal. No obstante, debido a que no conocemos cuál es la magnitud de esta carga, se deberá hacer una relación de triángulos para establecerla.

La carga empieza a crecer a partir de 20 kN/ml hasta llegar a los 100 kN/ml. Esto quiere decir que hay dos cargas: una rectangular de 20 kN/ml y otra triangular de 80 kN/ml.

Para saber cuál es la carga en la distancia 1,5 m desde el inicio se procede así:

$$\frac{80}{5,5} = \frac{y}{1,5}$$

$$y = \frac{80}{5,5} * 1,5$$

$$y = 21,82 \text{ kN/ml}$$

Esos 21,82 kN/ml equivalen a la carga triangular a esa distancia, por lo que para hallar la carga trapezoidal le sumamos la carga rectangular. Es decir, en los 1,5 m, la carga trapezoidal se distribuye empezando en 20 kN/ml y terminando en 41,82 kN/ml. Se determinan las resultantes y se resuelve.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = B_{x_2} = 0$$

$$B_{x_2} = 0$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = B_{y_2} - 30 - 16,3635 = 0$$

$$B_{y_2} = 46,3635 \text{ kN}\uparrow$$

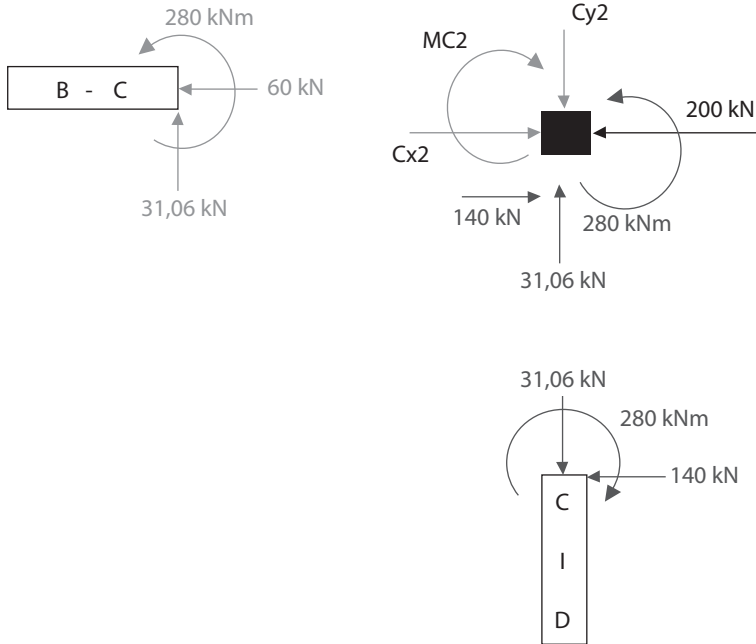
*Sumatoria de momentos:*

$$+\curvearrowright \Sigma M_B = (30 * 0,75) + (16,3635 * 0,5) - M_{B_2} = 0$$

$$M_{B_2} = 30,68 \text{ kNm}\curvearrowright$$

Para poder realizar los equilibrios de las barras internas, la cuales tienen seis incógnitas, primero debemos hallar tres de ellas para poder determinar las otras. Esto se logra haciendo equilibrio en el nudo, conociendo que para que el nudo esté en equilibrio deben cumplirse las ecuaciones de la estática.

Dos de los nudos en los cuales podemos hacer equilibrios son el nudo B y el nudo C, ya que a cada uno solo le faltan por determinar las incógnitas de una de las barras que llegan a él. Empezaremos por el nudo C:

*Equilibrio en C***Figura 1.59. Nudo C del pórtico del ejemplo 1.5**

Para realizar el equilibrio en el nudo C, tomamos las fuerzas que tocan dicho nudo de la barra C-D y las trasladamos al nudo. Esto se hace con el mismo signo, pero con sentido contrario, tal y como se aprecia en la figura 1.59.

Dentro del nudo se suponen dos fuerzas (una horizontal y una vertical) y un momento, y se hallan los valores con las ecuaciones básicas de la estática.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 140 - 200 + C_{x2} = 0$$

$$C_{x2} = 60 \text{ kN} \rightarrow$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 31,06 - C_{y2} = 0$$

$$C_{y2} = 31,06 \text{ kN} \downarrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\cup \Sigma M_C = 280 - M_{C2} = 0$$

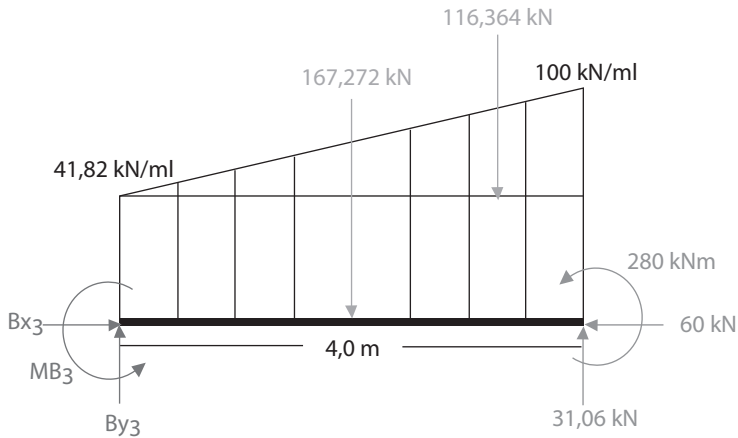
$$M_{C2} = 280 \text{ kNm} \cup$$



Una vez se hallaron estas fuerzas y momentos necesarios para que las sumas de fuerzas y de momentos sean iguales a cero, se procede a trasladarlas a la otra barra con el mismo signo, pero con sentido contrario, tal y como se aprecia en la figura 1.59. Para este caso ya conocemos tres de las seis incógnitas de la barra B-C, por lo que podemos equilibrarla.

### Equilibrio B-C

**Figura 1.60. Barra B-C del pórtico del ejemplo 1.5**



Sumatoria de fuerzas horizontales:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = B_{x_3} - 60 = 0$$

$$B_{x_3} = 60 \text{ kN} \rightarrow$$

Sumatoria de fuerzas verticales:

$$+\uparrow \Sigma F_y = B_{y_3} - 167,272 - 116,364 + 31,04 = 0$$

$$B_{y_3} = 252,576 \text{ kN} \uparrow$$

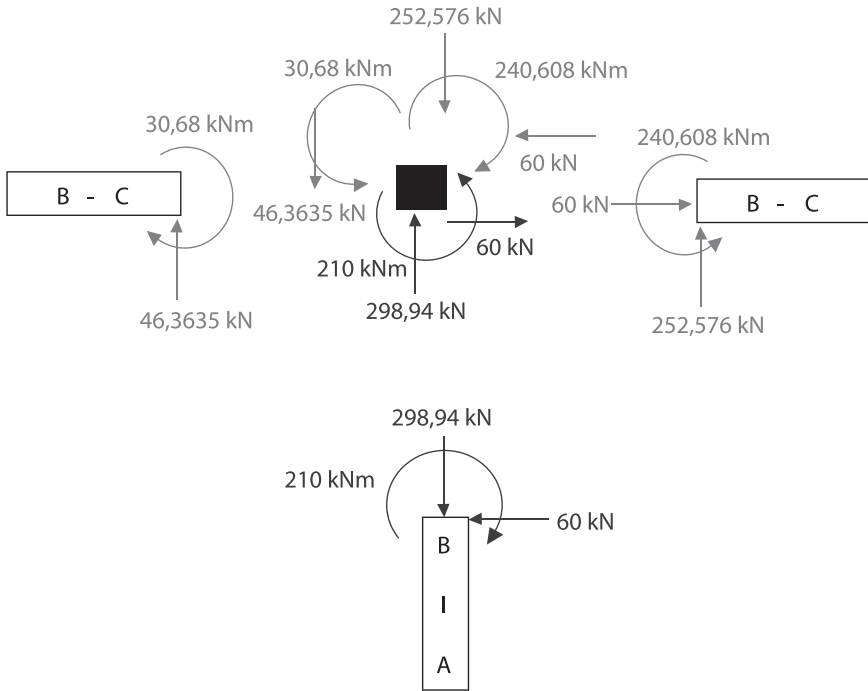
Sumatoria de momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = M_{B_3} + 280 - (167,272 \cdot 2) - (116,364 \cdot 3) + (31,06 \cdot 4) = 0$$

$$M_{B_3} = 240,608 \text{ kNm} \circlearrowleft$$

Vemos que no falta ninguna incógnita por determinar, por lo que se procede a comprobar haciendo equilibrio en el nudo B.

Figura 1.61. Nudo B del pórtico del ejemplo 1.5



Se hacen las sumatorias de fuerzas y momentos, las cuales deben dar cero.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 60 - 60 = 0$$

$$\Sigma F_x = 0, \text{"ok"}$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 298,94 - 46,3635 - 252,576 = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, \text{"ok"}$$

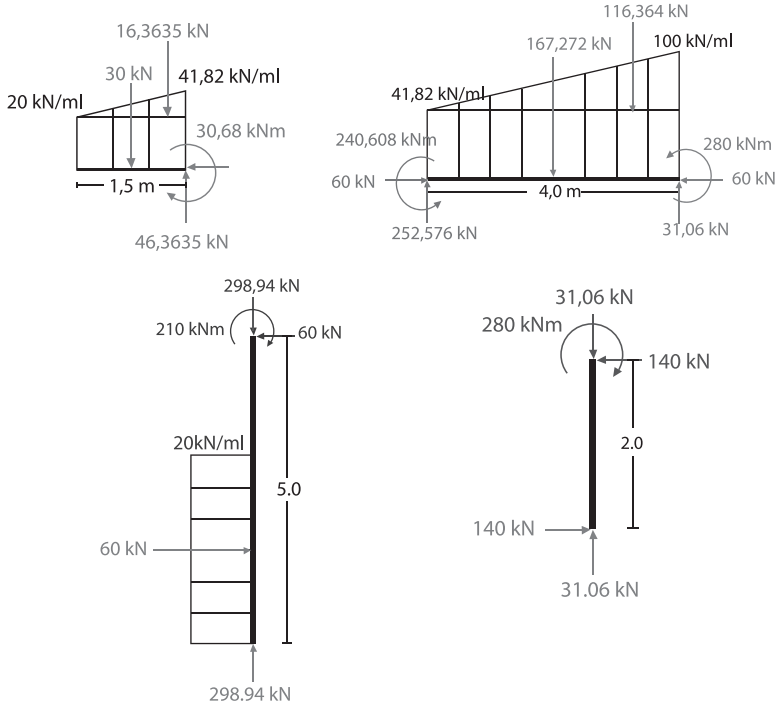
*Sumatoria de momentos:*

$$+\cup \Sigma M_B = 210 + 30,68 - 240,608 = 0$$

$$\Sigma M_B = 0, \text{"ok"}$$

Con el pórtico finalmente equilibrado, ya podemos proceder a determinar las ecuaciones para la realizar el diagrama de momentos.

**Figura 1.62. Equilibrio del pórtico del ejemplo 1.5**

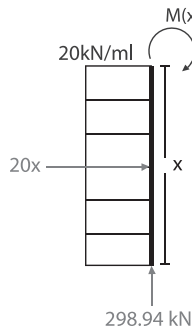


Los cortes se hacen por barra, desde cero hasta el valor de la longitud, e internamente la barra tendrá más de un corte cuando existan cambios de cargas.

La barra “A-B” tiene un cambio de carga, por lo que se tendrán que hacer dos cortes en ella. Las barras “B-C” y “D-E” tienen cargas distribuidas, pero no hay cambios bruscos dentro de ellas, y la barra “C-D” no tiene cargas, por lo que los cortes quedan de la siguiente forma:

*Corte 1 (A-B):*  $0 \leq x \leq 3 \uparrow$

**Figura 1.63. Corte 1 del pórtico del ejemplo 1.5**



Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_1 = -M(x) + 20x \cdot (0,5x) = 0$$

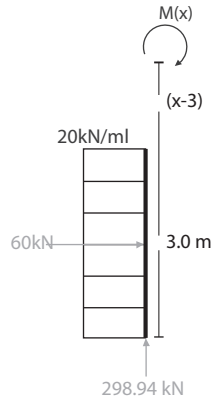
$$-M(x) + 10x^2 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_1 = 10x^2 \quad (\text{Ec.1.5.1})$$

Corte 2 (A-B):  $3 \leq x \leq 5 \uparrow$

**Figura 1.64. Corte 2 del pórtico del ejemplo 1.5**



Variación de los momentos:

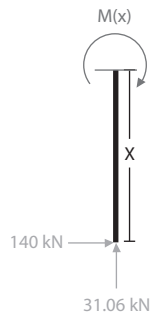
$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_2 = -M(x) + 60(x-1,5) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_2 = 60x - 90 \quad (\text{Ec.1.5.2})$$

Corte 3 (C-D):  $0 \leq x \leq 2 \uparrow$

**Figura 1.65. Corte 3 del pórtico del ejemplo 1.5**



Variación de los momentos:

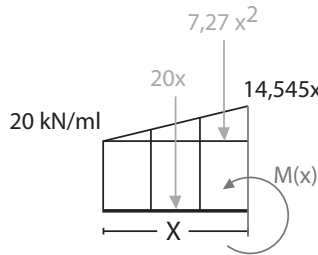
$$+\sum M(x)_3 = -M(x) - 140x = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_3 = 140x \text{ (Ec.1.5.3)}$$

Corte 4 (E-B):  $0 \leq x \leq 1,5 \rightarrow$

**Figura 1.66. Corte 4 del pórtico del ejemplo 1.5**



Haciendo relación de triángulos para determinar la variación de la carga respecto a  $x$ :

$$\frac{80}{5,5} = \frac{y}{x}$$

$$y = \frac{80}{5,5} * x$$

$$y = 14,545x$$

Hallamos la resultante:

$$R = \frac{(14,545x) * (x)}{2} = 7,27x^2: \text{ resultante del triángulo}$$

$$R = 20 * x = 20x: \text{ resultante del rectángulo}$$

Variación de los momentos:

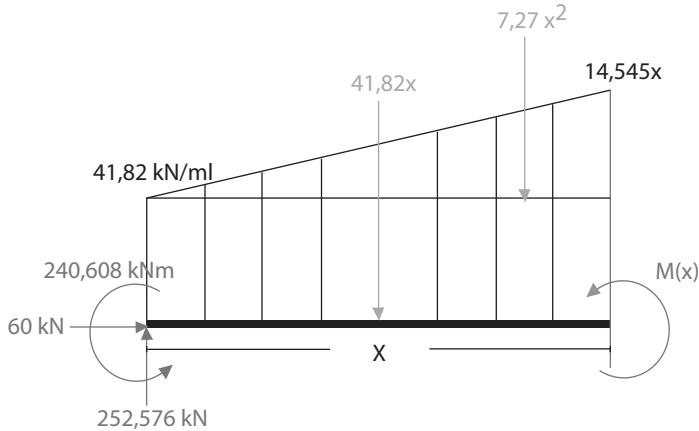
$$+\sum M(x)_4 = M(x) + 20x(0,5x) + 7,27x^2(x/3) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_4 = -2,424x^3 - 10x^2 \text{ (Ec.1.5.4)}$$

Corte 5 (B-C):  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

Figura 1.67. Corte 5 del pórtico del ejemplo 1.5



La relación de triángulos es la misma que la del corte anterior, por lo que la resultante del triángulo será la misma, mientras que la resultante del rectángulo será:

$$R = 41,82 \cdot x = 41,82x$$

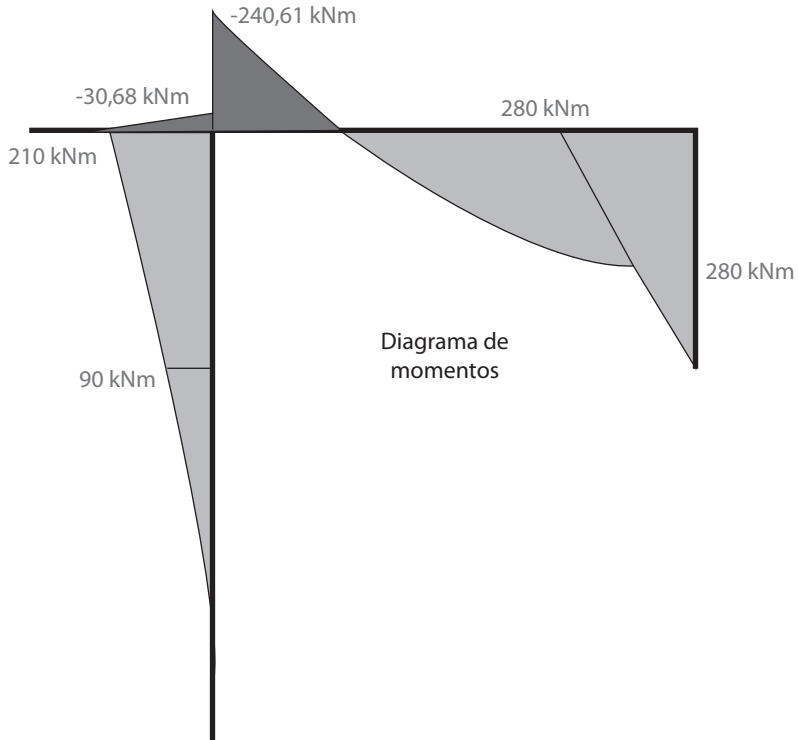
Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_5 = M(x) + 240,608 - 252,576x + 7,27x^2(x/3) + 41,82x(0,5x) = 0$$

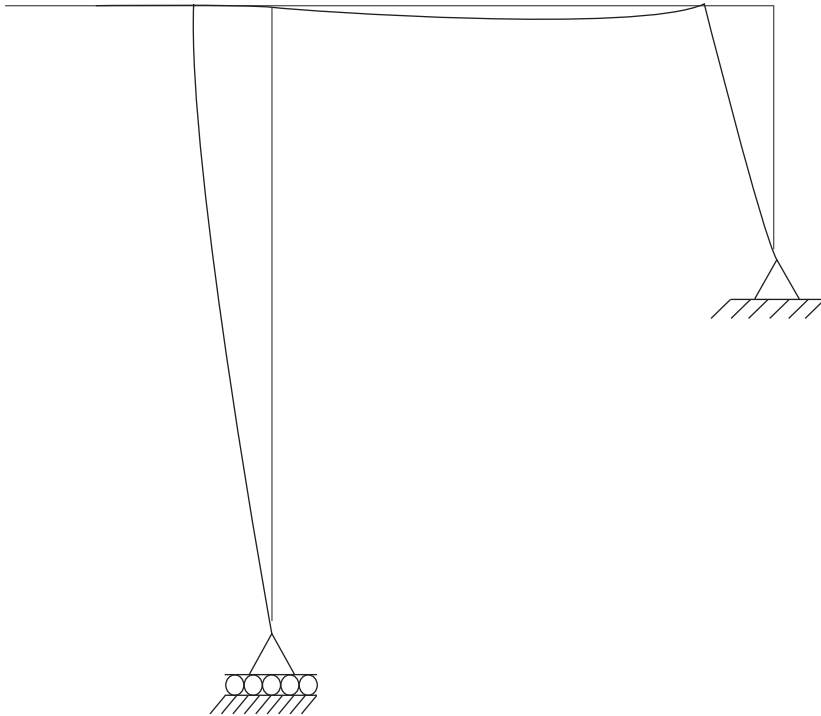
Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608 \quad (\text{Ec. 1.5.5})$$

Se dibuja el diagrama de momentos (figura 1.68).

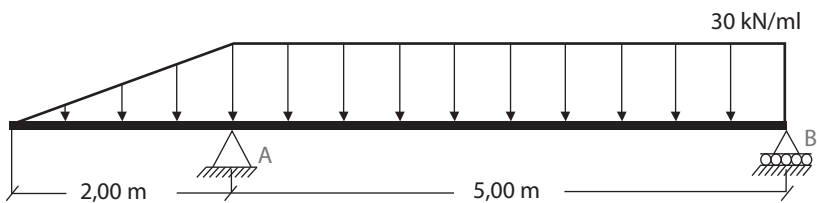
**Figura 1.68. Diagrama de momentos del pórtico del ejemplo 1.5**

El diagrama de momentos nos ayuda a suponer la elástica o la deformación del pórtico. Es decir, en la zona donde haya momentos el pórtico estará a tensión. Para este ejemplo, la supuesta deformación será la que se observa en la figura 1.69.

**Figura 1.69. Posible deformada del pórtico del ejemplo 1.5**

## 1.8. Ejercicios propuestos

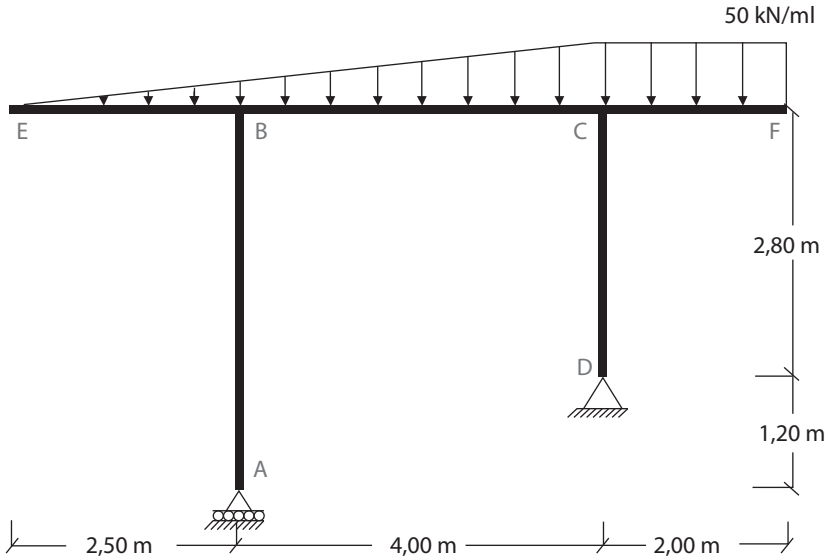
- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la siguiente viga.

**Figura 1.70. Ejercicio propuesto 1**



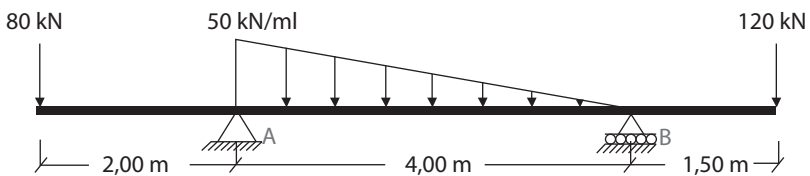
- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para el siguiente pórtico.

**Figura 1.71. Ejercicio propuesto 2**



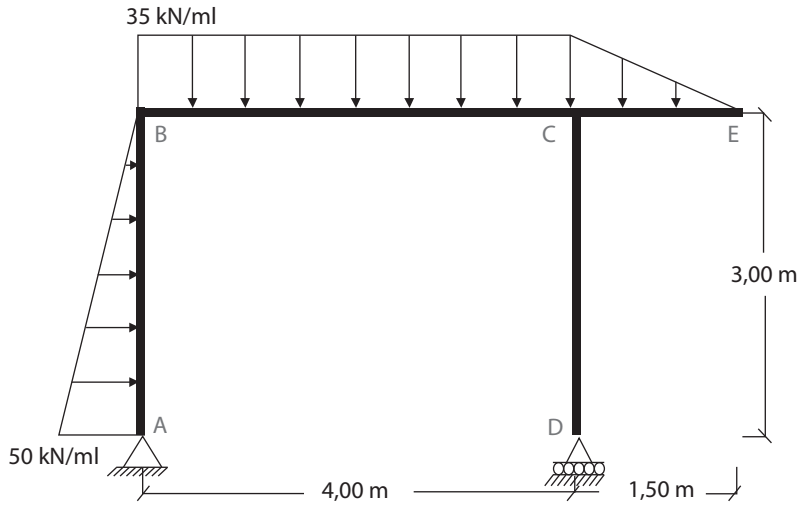
- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la siguiente viga.

**Figura 1.72. Ejercicio propuesto 3**



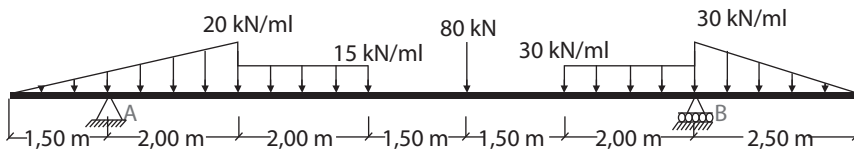
- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para el siguiente pórtico.

Figura 1.73. Ejercicio propuesto 4

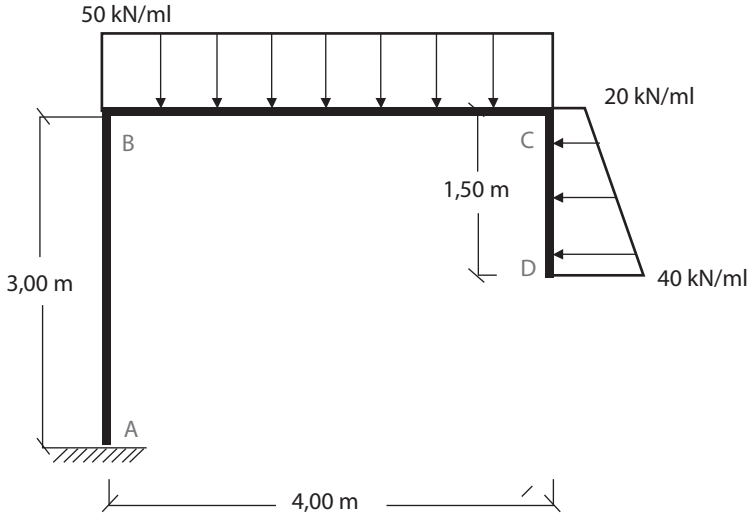


- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la siguiente viga.

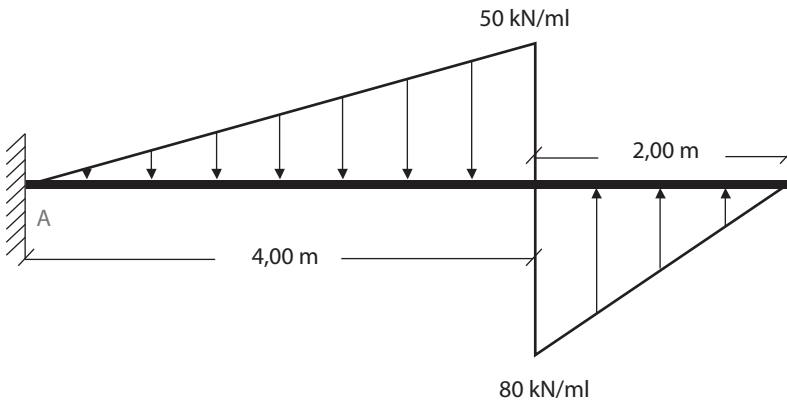
Figura 1.74. Ejercicio propuesto 5



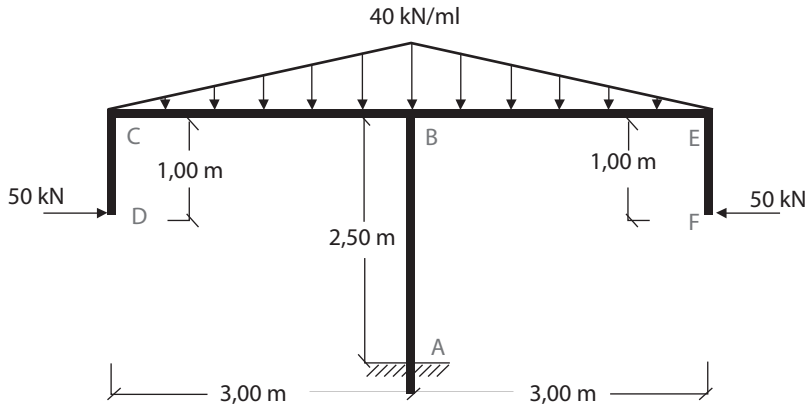
- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para el siguiente pórtico.

**Figura 1.75. Ejercicio propuesto 6**

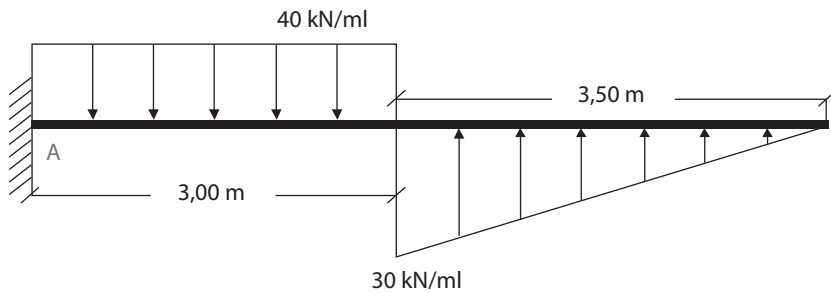
- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la siguiente viga.

**Figura 1.76. Ejercicio propuesto 7**

- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para el siguiente pórtico.

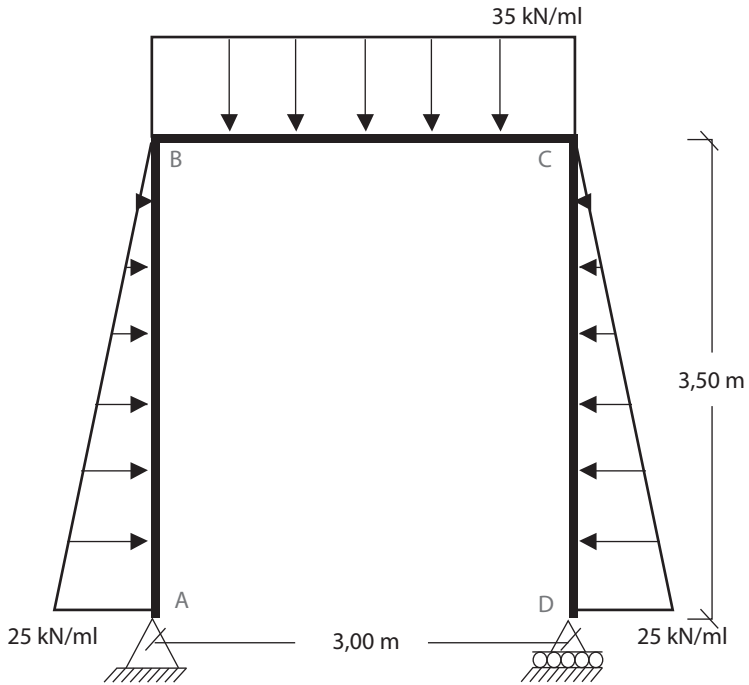
**Figura 1.77. Ejercicio propuesto 8**

- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para la siguiente viga.

**Figura 1.78. Ejercicio propuesto 9**

- Realizar diagrama de cortantes y diagrama de momentos para el siguiente pórtico.

**Figura 1.79. Ejercicio propuesto 10**



## CAPÍTULO 2

# GIROS Y DEFLEXIONES EN VIGAS Y PÓRTICOS ISOSTÁTICOS

### 2.1. Introducción

El análisis de estructuras busca encontrar la forma que adquiere una estructura al ser sometida a cargas y los consecuentes esfuerzos que soportan sus elementos. En este capítulo se pretenderá dar a conocer los métodos tradicionales para el cálculo de giros y deflexiones. Dichos métodos son los usados, por lo general, para estructuras isostáticas, o estáticamente determinadas (con grado de indeterminación cero). Además, se aplican para estructuras relativamente sencillas ya que requieren realizar las ecuaciones de momentos y, por ende, el diagrama.

El capítulo se subdivide en cuatro temarios: doble integración, el cual es un método que da una idea general de los giros y deflexiones en forma de ecuaciones; los métodos geométricos, con los cuales se obtienen los giros y deflexiones con la deformación directa de la estructura; el principio de superposición, que nos ayuda a simplificar estructuras de gran complejidad a estructuras menos complejas; y por último los métodos de energía, es decir, llegar a la respuesta de un análisis estructural aplicando el principio de conservación de la energía.

### 2.2. Método de doble integración

Una vez se expresa la distribución de momentos en función de la posición “ $x$ ”, es decir, en términos de la variación de la longitud, la primera integración sucesiva e

indefinida de las ecuaciones de momentos representará la pendiente de la viga, es decir, los giros en cualquier punto de esta (Hibbeler, 2012):

$$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx$$

La segunda integración sucesiva e indefinida de las ecuaciones de momento representará la deflexión de la viga en cualquier punto (Hibbeler, 2012):

$$\Delta(x) = \int \int \frac{M(x)}{EI} dx dx$$

$$\Delta(x) = \int \frac{\theta(x)}{EI} dx$$

Cabe tener en cuenta dos consideraciones en este punto. Por un lado, el método solo sirve para conocer los giros y las deflexiones en vigas. Los cortes realizados para determinar las ecuaciones de momentos deberán estar hechos en una sola dirección para darles una coherencia a estas.

Por otro lado, puesto que las integrales que se realizan son indefinidas, es decir, no tienen una solución particular, es necesario aumentar una “constante de integración”. Debido a que se deben integrar dos veces las ecuaciones de momentos, por cada corte se nos presentarán dos constantes, las cuales son diferentes y cuyo valor numérico debe ser hallado para poder dar respuesta. Entonces, para obtener el valor de las constantes, se necesita precisar dos tipos de condiciones:

- Condición de extremos o de apoyo: se da cuando conocemos dónde está ubicado un apoyo, como lo explicado en el literal 1.3 de esta guía. Una viga por lo general solo está sometida a cargas flexionantes, es decir, a cargas perpendiculares al elemento, por lo que las deflexiones solo serán en dirección “y” (vertical). Como no existen fuerzas axiales, podemos omitir los desplazamientos horizontales. Esto quiere decir que tanto el apoyo articulado de primer orden como el de segundo orden solo restringen los desplazamientos verticales, permitiendo los giros. En otras palabras:
  - » En los apoyos articulados de primer y segundo orden  $\Delta(x)=0$  y  $\theta(x)\neq 0$ .
  - » Los apoyos que son empotrados no permiten ninguna clase de deformación, es decir,  $\Delta(x)=0$  y  $\theta(x)=0$ .

Como las vigas que resuelven por este método son las isostáticas, pueden tener máximo dos apoyos articulados o uno empotrado. Esto quiere decir que, con las condiciones de apoyo, debemos hallar dos ecuaciones. Sin embargo, conocemos que hay vigas a las cuales es necesario realizarles más de

dos cortes. Así pues, si se conoce que cada corte nos da dos incógnitas, y según las reglas del álgebra para resolver un sistema de ecuaciones es necesario que exista, como mínimo, el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, por lo tanto, solo con las ecuaciones de las condiciones de apoyo no se podrá solucionar el problema; es necesario recurrir a un segundo tipo de condición, explicado a continuación.

- Condición de frontera: como anteriormente se aclaró, las ecuaciones de momentos deben hallarse con los cortes en la misma dirección. Esto se hace para que en el punto donde dos ecuaciones tienen la misma posición “x” en común se genere una frontera. Sabemos que en estos puntos en común las dos ecuaciones de momentos deben dar el mismo momento (no será así cuando el corte es provocado por un momento); por lo tanto, deben dar también el mismo giro y la misma deflexión.

Considérense dos cortes: uno “A” y otro “B”. La condición de frontera se representará así:

$$\theta(x)_A = \theta(x)_B$$

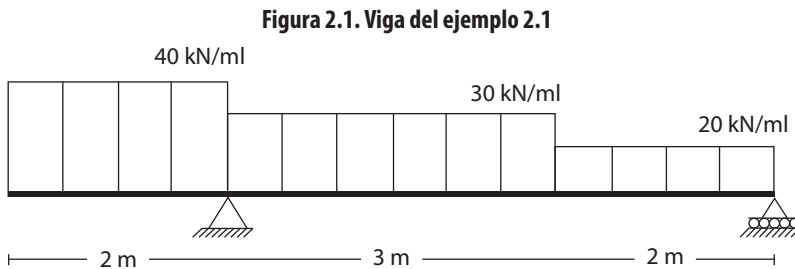
$$\Delta(x)_A = \Delta(x)_B$$

Esto solo se cumplirá en el punto “x” en común para ambos cortes.

Para ilustrar de mejor manera el método, se mostrarán tres vigas como ejemplo. Cabe tener en cuenta que estas vigas son las mismas que se resolvieron estáticamente en los incisos 1.7.1, 1.7.2 y 1.7.3.

### 2.2.1. Ejemplo 2.1

Determinar las ecuaciones de giros y deflexiones de la viga de la figura 2.1 por el método de doble integración. También establezca las constantes de integración por el método de sustitución.



Como esta viga ya fue solucionada en el inciso 1.7.1 de esta guía y se cumplió con el hecho de que los cortes se deben hacer en una dirección, se traerán las ecuaciones de momentos y las direcciones en las que fueron los cortes:



$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -20x^2$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$5 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

### Aplicando la primera y la segunda integración

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow$$

$$M(x)_1 = -20x^2$$

$$\theta(x)_1 = \int M(x)_1 dx$$

$$\theta(x)_1 = \int (-20x^2) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_1 = -\frac{20}{3}x^3 + C_1 \text{ (Ec. 2.1.1)}$$

$$\Delta(x)_1 = \int \theta(x)_1 dx$$

$$\Delta(x)_1 = \int \left(-\frac{20}{3}x^3 + C_1\right) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_1 = -\frac{5}{3}x^4 + C_1x + C_2 \text{ (Ec. 2.1.2)}$$

Las constantes de integración que se aumentan a la ecuación deben ser distintas. Por tal motivo se colocaron con subíndices diferentes.

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow$$

$$M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$\theta(x)_2 = \int M(x)_2 dx$$

$$\theta(x)_2 = \int (-15x^2 + 147x - 314) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_2 = -5x^3 + 73,5x^2 - 314x + C_3 \text{ (Ec. 2.1.3)}$$

$$\Delta(x)_2 = \int \theta(x)_2 \, dx$$

$$\Delta(x)_2 = \int (-5x^3 + 73,5x^2 - 314x + C_3) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_2 = -\frac{5}{4}x^4 + 24,5x^3 - 157x^2 + C_3x + C_4 \text{ (Ec. 2.1.4)}$$

$5 \leq x \leq 7 \rightarrow$

$$M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

$$\theta(x)_3 = \int M(x)_3 \, dx$$

$$\theta(x)_3 = \int (-10x^2 + 97x - 189) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_3 = -\frac{10}{3}x^3 + \frac{97}{2}x^2 - 189x + C_5 \text{ (Ec. 2.1.5)}$$

$$\Delta(x)_3 = \int \theta(x)_3 \, dx$$

$$\Delta(x)_3 = \int \left(-\frac{10}{3}x^3 + \frac{97}{2}x^2 - 189x + C_5\right) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_3 = -\frac{5}{6}x^4 + \frac{97}{6}x^3 - \frac{189}{2}x^2 + C_5x + C_6 \text{ (Ec. 2.1.6)}$$

### Aplicando las condiciones de apoyo

La viga en este caso está simplemente apoyada, por lo que tenemos dos apoyos articulados, ubicados a una distancia de 2 m y 7 m del inicio de ella. Por lo tanto, en estos puntos los desplazamientos verticales son iguales a cero.

- Apoyo A: en  $\Delta(x) = 0$  en  $x = 2\text{m}$

Como  $x=2$  m pertenece tanto al corte 1 como al corte 2, entonces podemos igualar cualquiera de las dos ecuaciones a cero:

$$\Delta(2)_1 = 0; \Delta(2)_2 = 0$$

Aclarando que solo una de las dos ecuaciones se debe igualar a cero. Para efectos de esta guía usaremos la (Ec. 2.1.2):

$$\Delta(x)_1 = -\frac{5}{3} x^4 + C_1 x + C_2 = 0$$

$$\Delta(2)_1 = -\frac{5}{3} (2)^4 + C_1(2) + C_2 = 0$$

$$-\frac{5}{3} (2)^4 + 2C_1 + C_2 = 0$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$2C_1 + C_2 = 26, \overline{(66)} \quad (\text{Ec.2.1.7})$$

- Apoyo B: en  $\Delta(x) = 0$ ; en  $x = 7\text{m}$   
 $x = 7$  solo pertenece a la ecuación del corte  $3\Delta(7)_3 = 0$ .

Usando la (Ec.2.1.6):

$$\Delta(x)_3 = -\frac{5}{6} x^4 + \frac{97}{6} x^3 - \frac{189}{2} x^2 + C_5 x + C_6 = 0$$

$$\Delta(7)_3 = -\frac{5}{6} (7)^4 + \frac{97}{6} (7)^3 - \frac{189}{2} (7)^2 + C_5(7) + C_6 = 0$$

$$-\frac{5}{6} (7)^4 + \frac{97}{6} (7)^3 - \frac{189}{2} (7)^2 + C_5(7) + C_6 = 0$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$7C_5 + C_6 = 1.086,1 \overline{(66)} \quad (\text{Ec.2.1.8})$$

### Aplicando las condiciones de frontera

En el ejemplo los valores límites de compatibilidad son:  $x = 2$  y  $x = 5$ .

- En  $x=2$  m,  $\theta(2)_1 = \theta(2)_2$  y  $\Delta(2)_1 = \Delta(2)_2$

$$\theta(2)_1 = \theta(2)_2$$

$$-\frac{20}{3} (2)^3 + C_1 = -5 (2)^3 + 73,5 (2)^2 - 314 (2) + C_3$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_1 - C_3 = -320, \overline{666} \text{ (Ec. 2.1.9)}$$

$$\Delta(2)_1 = \Delta(2)_2$$

$$-\frac{5}{3} (2)^4 + 2C_1 + C_2 = -\frac{5}{4} (2)^4 + 24,5 (2)^3 - 157 (2)^2 + 2C_3 + C_4$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = -425, \overline{333} \text{ (Ec. 2.1.10)}$$

- En  $x=5$  m,  $\theta(5)_2 = \theta(5)_3$ , y  $\Delta(5)_2 = \Delta(5)_3$ .

$$\theta(5)_2 = \theta(5)_3$$

$$-5 (5)^3 + 73,5 (5)^2 - 314 (5) + C_3 = -\frac{10}{3} (5)^3 + \frac{97}{2} (5)^2 - 189 (5) + C_5$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_3 - C_5 = 208, \overline{333} \text{ (Ec. 2.1.11)}$$

$$\Delta(5)_2 = \Delta(5)_3$$

$$-\frac{5}{4} (5)^4 + 24,5 (5)^3 - 157 (5)^2 + 5C_3 + C_4$$

$$= -\frac{5}{6} (5)^4 + \frac{97}{6} (5)^3 - \frac{189}{2} (5)^2 + 5C_5 + C_6$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$5C_3 + C_4 - 5C_5 - C_6 = 781,25 \text{ (Ec. 2.1.12)}$$

### Resumen de ecuaciones

$$2C_1 + C_2 = 26, \overline{66} \text{ (Ec. 2.1.7)}$$

$$7C_5 + C_6 = 1.086, \overline{166} \text{ (Ec. 2.1.8)}$$

$$C_1 - C_3 = -320, \overline{666} \text{ (Ec. 2.1.9)}$$

$$2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = -425, \overline{333} \text{ (Ec. 2.1.10)}$$

$$C_3 - C_5 = 208, \overline{333} \text{ (Ec. 2.1.11)}$$

$$5C_3 + C_4 - 5C_5 - C_6 = 781,25 \text{ (Ec. 2.1.12)}$$

### Solución del sistema de ecuaciones por sustitución

Reemplazando la (Ec.2.1.7) en la (Ec.2.1.10), tenemos:

$$2C_1 + C_2 = 26, \overline{66}; 2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = -425, \overline{333}$$

$$26, \overline{66} - 2C_3 - C_4 = -425, \overline{333}$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$2C_3 + C_4 = 452$$

Despejando  $C_4$  tenemos:  $C_4 = 452 - 2C_3$  (Ec.2.1.13)

Despejando  $C_6$  de la (Ec.2.1.8), tenemos:  $C_6 = 1.086, \overline{166} - 7C_5$  (Ec. 2.1.14)

Reemplazamos la (Ec.2.1.13) y la (Ec.2.1.14) en la (Ec.2.1.12):

$$5C_3 + (452 - 2C_3) - 5C_5 - (1.086, \overline{166} - 7C_5) = 781,25$$

$$5C_3 + 452 - 2C_3 - 5C_5 - 1.086, \overline{166} + 7C_5 = 781,25$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$3C_3 + 2C_5 = 1.415,417$$

Despejando  $C_5$  tenemos:

$$C_5 = \frac{1.415,417 - 3C_3}{2} \text{ (Ec. 2.1.15)}$$

Reemplazamos la (Ec.2.1.15) en la (Ec.2.1.11):

$$C_3 - \left( \frac{1.415,417 - 3C_3}{2} \right) = 208, \overline{333}$$

$$C_3 - 707,7085 + \frac{3}{2}C_3 = 208, \overline{333}$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_3 + \frac{3}{2}C_3 = 208,333 + 707,7085$$

$$\frac{5}{2}C_3 = 916,0418$$

Despejando  $C_3$  tenemos:  $C_3 = 366,417$

Reemplazando  $C_3 = 366,417$  en la (Ec.2.1.13):

$$C_4 = 452 - 2C_3$$

$$C_4 = 452 - 2*(366,417)$$

$$C_4 = -280,834$$

Reemplazando  $C_3=366,417$  en la (Ec.2.1.9):

$$C_1 - C_3 = -320,666$$

$$C_1 - (366,417) = -320,666$$

Despejando  $C_1$  tenemos:  $C_1 = 45,75$

Reemplazando  $C_1 = 45,75$  en la (Ec.2.1.7):

$$2C_1 + C_2 = 26,66$$

$$2(45,75) + C_2 = 26,66$$

Despejando  $C_2$  tenemos:  $C_2 = -64,833$

Reemplazando  $C_3 = 366,417$  en la (Ec.2.1.11):

$$C_3 - C_5 = 208,333$$

$$366,417 - C_5 = 208,333$$

Despejando  $C_5$  tenemos:  $C_5 = 158,084$

Reemplazando  $C_5=158,084$  en la (Ec.2.1.14):

$$C_6 = 1086,166 - 7C_5$$

$$C_6 = 1086,166 - 7(158,084)$$

$$C_6 = -20,421$$

Por lo tanto, el valor de las incógnitas es:

$$C_1 = 45,75$$

$$C_2 = -64,8(33)$$

$$C_3 = 366,417$$

$$C_4 = -280,834$$

$$C_5 = 158,084$$

$$C_6 = -20,421$$

Reemplazamos el valor de las constantes de integración en las ecuaciones de giros y deflexiones, y tabulamos los valores números de giros y deflexiones en toda la viga:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow$$

$$\theta(x)_1 = -\frac{20}{3} x^3 + 45,75$$

$$\Delta(x)_1 = -\frac{5}{3} x^4 + 45,75 x - 64,833$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow$$

$$\theta(x)_2 = -5 x^3 + 73,5 x^2 - 314 x + 366,417$$

$$\Delta(x)_2 = -\frac{5}{4} x^4 + 24,5 x^3 - 157 x^2 + 366,417 x - 280,834$$

$$5 \leq x \leq 7 \rightarrow$$

$$\theta(x)_3 = -\frac{10}{3} x^3 + \frac{97}{2} x^2 - 189 x + 158,084$$

$$\Delta(x)_3 = -\frac{5}{6} x^4 + \frac{97}{6} x^3 - \frac{189}{2} x^2 + 158,084 x - 20,421$$

Se debe tener en cuenta que cada uno de los valores obtenidos, en cuanto a rotaciones y desplazamientos, estarán en función del módulo de elasticidad "E" y la inercia de la sección transversal "I". Por lo tanto, para determinar un giro y una deflexión para una viga específica solo se deberá dividir el número entre EI.

x	$\frac{\theta(x)}{EI}$	$\frac{\Delta(x)}{EI}$
0	45,75 antihorario	64,83
1	39,08 antihorario	20,75

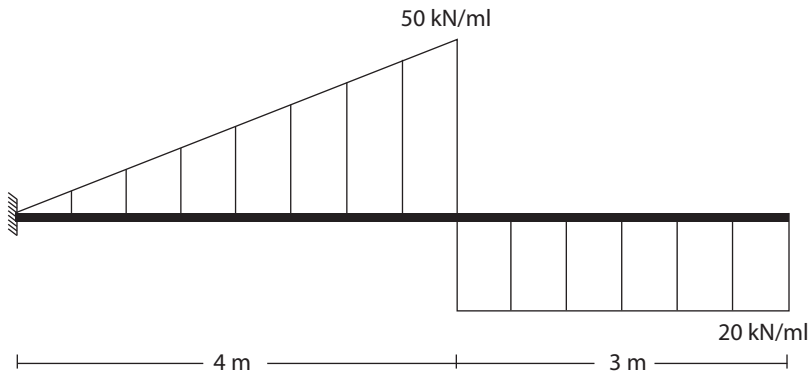
2	7,58 horario	0,00
2	7,58 horario	0,00
3	49,08 horario	34,33
4	33,58 horario	79,17
5	8,92 antihorario	92,50
5	8,92 antihorario	92,50
6	50,08 antihorario	61,92
7	68,25 antihorario	0,00

Recuerde que los giros negativos son horarios y los positivos son antihorarios, y que las deflexiones negativas van en dirección hacia abajo, mientras que las positivas van en sentido contrario.

### 2.1.2. Ejemplo 2.2

Determinar las ecuaciones de giros y deflexiones de la viga de la figura 2.2 por el método de doble integración. Establecer las constantes de integración por el método de sustitución.

Figura 2.2. Viga del ejemplo 2.2



Como esta viga ya fue solucionada en el inciso 1.7.2 de esta guía y se cumplió con el hecho de que los cortes se deben hacer en una dirección, se traerán las ecuaciones de momentos y las direcciones en las que fueron los cortes:

$$0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = -2,08(\overline{33})x^3 + 40x + 63,(\overline{33})$$

$$4 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_2 = 10x^2 - 140x + 490$$

Aplicando la primera y la segunda integración:

$$0 \leq x \leq 4 \rightarrow$$



$$M(x)_1 = -2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63, \overline{33}$$

$$\theta(x)_1 = \int M(x)_1 dx$$

$$\theta(x)_1 = \int (-2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63, \overline{33}) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_1 = -0,52x^4 + 20x^2 + 63, \overline{33}x + C_1 \text{ (Ec. 2.2.1)}$$

$$\Delta(x)_1 = \int \theta(x)_1 dx$$

$$\Delta(x)_1 = \int (-0,52x^4 + 20x^2 + 63, \overline{33}x + C_1) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_1 = -0,104x^5 + 6, \overline{66}x^3 + 31, \overline{66}x^2 + C_1x + C_2 \text{ (Ec. 2.2.2)}$$

Las constantes de integración que se aumentan a la ecuación deben ser distintas. Por tal motivo se colocaron con subíndices diferentes.

$$4 \leq x \leq 7 \rightarrow$$

$$M(x)_2 = 10 x^2 - 140 x + 490$$

$$\theta(x)_2 = \int M(x)_2 dx$$

$$\theta(x)_2 = \int (10 x^2 - 140 x + 490) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_2 = 3, \overline{33}x^3 - 70x^2 + 490x + C_3 \text{ (Ec. 2.2.3)}$$

$$\Delta(x)_2 = \int \theta(x)_2 dx$$

$$\Delta(x)_2 = \int (3, \overline{33}x^3 - 70x^2 + 490x + C_3) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_2 = 0,8\overline{33}x^4 - 23, \overline{33}x^3 + 245x^2 + C_3x + C_4 \text{ (Ec. 2.2.4)}$$

### Aplicando las condiciones de apoyo

La viga del ejemplo está empotrada, por lo que al inicio de esta (a una longitud  $x = 0$ ) no existirán giros ni desplazamientos.

- Empotramiento: en  $x = 0$  m el  $\Delta(x)=0$  y el  $\theta(x) = 0$ .

Como  $x = 0$  pertenece al corte 1, entonces:

$$\theta(x)_1 = -0,52x^4 + 20x^2 + 63,33x + C_1$$

$$\theta(0)_1 = 0$$

$$\theta(0)_1 = -0,52(0)^4 + 20(0)^2 + 63,33(0) + C_1 = 0$$

$$-0,52(0)^4 + 20(0)^2 + 63,33(0) + C_1 = 0$$

Despejando  $C_1$  tenemos:

$$C_1 = 0$$

$$\Delta(x)_1 = -0,104x^5 + 6,66x^3 + 31,66x^2 + C_1x + C_2$$

$$\Delta(0)_1 = 0$$

$$\Delta(0)_1 = -0,104(0)^5 + 6,66(0)^3 + 31,66(0)^2 + C_1(0) + C_2 = 0$$

$$-0,104(0)^5 + 6,66(0)^3 + 31,66(0)^2 + C_1(0) + C_2 = 0$$

Despejando  $C_1$  tenemos:

$$C_2 = 0$$

### Aplicando las condiciones de frontera

En el ejemplo la viga solo tiene dos cortes; por lo tanto, solo existe un valor en común entre ellos, el cual es:  $x = 4$ .

- En  $x = 4$  m:  $\theta(4)_1 = \theta(4)_2$  y  $\Delta(4)_1 = \Delta(4)_2$

$$\theta(4)_1 = \theta(4)_2$$

$$-0,52(4)^4 + 20(4)^2 + 63,33(4) + C_1 = 3,33(4)^3 - 70(4)^2 + 490(4) + C_3$$

Como anteriormente se conoció que el valor de la constante  $C_1=0$ , entonces:

$$-0,52(4)^4 + 20(4)^2 + 63,33(4) + 0 = 3,33(4)^3 - 70(4)^2 + 490(4) + C_3$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_3 = -613,12$$

$$\Delta(4)_1 = \Delta(4)_2$$

$$-0,104(4)^5 + 6,66(4)^3 + 31,66(4)^2 + C_2 = 0,833x^4 - 23,33x^3 + 245(4)^2 + C_3(4) + C_4$$

Como anteriormente se conoció que el valor de la constante  $C_2 = 0$  y  $C_3 = -613,12$ , entonces:

$$-0,104(4)^5 + 6,66(4)^3 + 31,66(4)^2 = 0,8(33)x^4 - 23,33x^3 + 245(4)^2 - 613,12(4) + C_4$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_4 = 639,32$$

Por lo tanto, el valor de las incógnitas es:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -613,12$$

$$C_4 = 639,32$$

Reemplazamos el valor de las constantes de integración en las ecuaciones de giros y deflexiones:

$$0 \leq x \leq 4 \rightarrow$$

$$\theta(x)_1 = -0,52x^4 + 20x^2 + 63,33x$$

$$\Delta(x)_1 = -0,104x^5 + 6,66x^3 + 31,66x^2$$

$$4 \leq x \leq 7 \rightarrow$$

$$\theta(x)_2 = 3,33x^3 - 70x^2 + 490x - 613,12$$

$$\Delta(x)_2 = 0,833x^4 - 23,33x^3 + 245x^2 - 613,12x + 639,32$$

Se debe tener en cuenta que cada uno de los valores hallados, en cuanto a rotaciones y desplazamientos, estarán en función del módulo de elasticidad "E" y la inercia de la sección transversal "I". Por lo tanto, para determinar un giro y una deflexión para una viga específica, solo se deberá dividir el número entre EI.

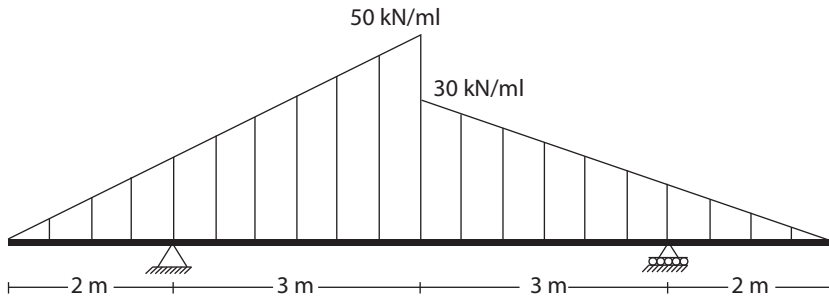
x	$\frac{\theta(x)}{EI}$	$\frac{\Delta(x)}{EI}$
0	0,00	0,00
1	82,81 antihorario	38,23
2	198,34 antihorario	176,67
3	327,87 antihorario	436,73
4	440,20 antihorario	826,84
4	440,21 antihorario	826,84
5	503,55 antihorario	1.302,89

x	$\frac{\theta(x)}{EI}$	$\frac{\Delta(x)}{EI}$
6	526,88 antihorario	1.820,61
7	530,21 antihorario	2.349,99

### 2.2.3. Ejemplo 2.3

Determinar las ecuaciones de giros y deflexiones de la viga de la figura 2.3 por el método de doble integración. Establecer las constantes de integración por el método de sustitución.

Figura 2.3. Viga del ejemplo 2.3



Como esta viga ya fue solucionada en el inciso 1.7.3 de esta guía y se cumplió con el hecho de que los cortes se deben hacer en una dirección, se traerán las ecuaciones de momentos y las direcciones en las que fueron los cortes:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -1,66x^3$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784$$

$$5 \leq x \leq 8 \rightarrow M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159$$

$$8 \leq x \leq 10 \rightarrow M(x)_4 = x^3 - 30x^2 + 300x - 1000$$

#### Aplicando la primera y la segunda integración

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow$$

$$M(x)_1 = -1,66x^3$$

$$\theta(x)_1 = \int M(x)_1 dx$$

$$\theta(x)_1 = \int (-1,66x^3) dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_1 = -0,41\overline{66}x^4 + C_1 \text{ (Ec. 2.3.1)}$$

$$\Delta(x)_1 = \int \theta(x)_1 \, dx$$

$$\Delta(x)_1 = \int (-0,41\overline{66}x^4 + C_1) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_1 = -0,08\overline{33}x^5 + C_1x + C_2 \text{ (Ec. 2.3.2)}$$

Las constantes de integración que se aumentan a la ecuación deben ser distintas. Por tal motivo se colocaron con subíndices diferentes.

$2 \leq x \leq 5 \rightarrow$

$$M(x)_2 = -1,6\overline{6}x^3 + 113,8892x - 227,7784$$

$$\theta(x)_2 = \int M(x)_2 \, dx$$

$$\theta(x)_2 = \int (-1,6\overline{6}x^3 + 113,8892x - 227,7784) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159$$

$$\theta(x)_3 = \int M(x)_3 \, dx$$

$$\theta(x)_3 = \int (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_2 = -0,08\overline{33}x^5 + 18,9815x^3 - 113,8892x^2 + C_3x + C_4 \text{ (Ec. 2.3.4)}$$

$5 \leq x \leq 8 \rightarrow$

$$M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159$$

$$\theta(x)_3 = \int M(x)_3 \, dx$$

$$\theta(x)_3 = \int (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_3 = 0,25x^4 - 10x^3 + 106,9446x^2 - 311,1159x + C_5 \text{ (Ec.2.3.5)}$$

$$\Delta(x)_3 = \int \theta(x)_3 \, dx$$

$$\Delta(x)_3 = \int (0,25x^4 - 10x^3 + 106,9446x^2 - 311,1159x + C_5) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_3 = 0,05x^5 - 2,5x^4 + 35,6482x^3 - 155,558x^2 + C_5x + C_6 \quad (\text{Ec.2.3.6})$$

$8 \leq x \leq 10 \rightarrow$

$$M(x)_4 = x^3 - 30x^2 + 300x - 1.000$$

$$\theta(x)_4 = \int M(x)_4 \, dx$$

$$\theta(x)_4 = \int (x^3 - 30x^2 + 300x - 1.000) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\theta(x)_4 = 0,25x^4 - 10x^3 + 150x^2 - 1.000x + C_7 \quad (\text{Ec.2.3.7})$$

$$\Delta(x)_4 = \int \theta(x)_4 \, dx$$

$$\Delta(x)_4 = \int (0,25x^4 - 10x^3 + 150x^2 - 1.000x + C_7) \, dx$$

Integrando, tenemos:

$$\Delta(x)_4 = 0,05x^5 - 2,5x^4 + 50x^3 - 500x^2 + C_7x + C_8 \quad (\text{Ec.2.3.8})$$

### Aplicando las condiciones de apoyo

La viga del ejemplo está simplemente apoyada, por lo que tenemos dos apoyos articulados, ubicados a una distancia de 2 m y 8 m del inicio de ella. Por lo tanto, en estos puntos los desplazamientos verticales son iguales a cero.

- Apoyo A:  $\Delta(x) = 0$  en  $x = 2$  m

Como  $x = 2$  pertenece tanto al corte 1 como al corte 2, entonces podemos igualar cualquiera de las dos ecuaciones a cero:

$$\Delta(2)_1 = 0; \Delta(2)_2 = 0$$

Aclarando que solo una de las dos ecuaciones se debe igualar a cero. Para efectos de esta guía usaremos la (Ec.2.3.2).

$$\Delta(x)_1 = -0,0833x^5 + C_1x + C_2 = 0$$

$$\Delta(2)_1 = -0,0833(2)^5 + C_1(2) + C_2 = 0$$

$$-0,0833(2)^5 + C_1(2) + C_2 = 0$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$2C_1 + C_2 = 2, \overline{66} \text{ (Ec. 2.3.9)}$$

- Apoyo B:  $\Delta(x) = 0$  en  $x = 8$  m

Como  $x = 8$  m pertenece tanto al corte 3 como al corte 4, entonces podemos igualar cualquiera de las dos ecuaciones a cero:

$$\Delta(8)_3 = 0; \Delta(8)_4 = 0$$

Aclarando que solo una de las dos ecuaciones se debe igualar a cero. Para efectos de esta guía usaremos la (Ec.2.3.6).

$$\Delta(x)_3 = 0,05x^5 - 2,5x_4 + 35,6482x_3 - 155,558x^2 + C_5x + C_6 = 0$$

$$\Delta(8)_3 = 0,05(8)^5 - 2,5(8)^4 + 35,6482(8)^3 - 155,558(8)^2 + C_5(8) + C_6 = 0$$

$$0,05(8)^5 - 2,5(8)^4 + 35,6482(8)^3 - 155,558(8)^2 + C_5(8) + C_6 = 0$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$8C_5 + C_6 = 305,4336 \text{ (Ec.2.3.10)}$$

### Aplicando las condiciones de frontera

En el ejemplo los valores límites de compatibilidad son:

$$x=2 \text{ m, } x=5 \text{ m y } x=8 \text{ m.}$$

- En  $x=2$  m:  $\theta(2)_1 = \theta(2)_2$  y  $\Delta(2)_1 = \Delta(2)_2$

$$\theta(2)_1 = \theta(2)_2$$

$$-0,41\overline{66}(2)^4 + C_1 = -0,41\overline{66}(2)^4 + 56,9446(2)^2 - 227,7784(2) + C_3$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_1 - C_3 = -227,7784 \text{ (Ec.2.3.11)}$$

$$\Delta(2)_1 = \Delta(2)_2$$

$$-0,08\overline{33}(2)^5 + C_1(2) + C_2 = -0,08\overline{33}(2)^5 + 18,9815(2)^3 - 113,8892(2)^2 + C_3(2) + C_4$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = -303,7048 \text{ (Ec.2.3.12)}$$

- En  $x = 5\text{m}$ :  $\theta(5)_2 = \theta(5)_3$  y  $\Delta(5)_2 = \Delta(5)_3$

$$\theta(5)_2 = \theta(5)_3$$

$$\begin{aligned} & -0,41\overline{66}(5)^4 + 56,9446(5)^2 - 227,7784(5) + C_3 \\ & = 0,25(5)^4 - 10(5)^3 + 106,9446(5)^2 - 311,1159(5) + C_5 \end{aligned}$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_3 - C_5 = 0 \text{ (Ec.2.3.13)}$$

$$\Delta(5)_2 = \Delta(5)_3$$

$$\begin{aligned} & -0,08\overline{33}(5)^5 + 18,9815(5)^3 - 113,8892(5)^2 + C_3(5) + C_4 \\ & = 0,05(5)^5 - 2,5(5)^4 + 35,6482(5)^3 - 155,558(5)^2 + C_5(5) + C_6 \end{aligned}$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$5C_3 + C_4 - 5C_5 - C_6 = -104,32 \text{ (Ec.2.3.14)}$$

- En  $x = 8\text{ m}$ :  $\theta(8)_3 = \theta(8)_4$  y  $\Delta(8)_3 = \Delta(8)_4$

$$\theta(8)_3 = \theta(8)_4$$

$$\begin{aligned} & 0,25(8)^4 - 10(8)^3 + 106,9446(8)^2 - 311,1159(8) + C_5 = 0,25(8)^4 - 10(8)^3 \\ & + 150(8)^2 - 1000(8) + C_7 \end{aligned}$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$C_5 - C_7 = -2755,5272 \text{ (Ec.2.3.15)}$$

$$\Delta(8)_3 = \Delta(8)_4$$

$$\begin{aligned} & 0,05(8)^5 - 2,5(8)^4 + 35,6482(8)^3 - 155,558(8)^2 + C_5(8) + C_6 = 0,05(8)^5 - 2,5(8)^4 \\ & + 50(8)^3 - 500(8)^2 + C_7(8) + C_8 \end{aligned}$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$8C_5 + C_6 - 8C_7 - C_8 = -14.696,1664 \text{ (Ec.2.3.16)}$$

### Resumen de ecuaciones

$$2C_1 + C_2 = 2,66 \text{ (Ec.2.3.9)}$$

$$8C_5 + C_6 = 305,4336 \text{ (Ec.2.3.10)}$$



$$C_1 - C_3 = -227,7784 \text{ (Ec.2.3.11)}$$

$$2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = -303,7048 \text{ (Ec.2.3.12)}$$

$$C_3 - C_5 = 0 \text{ (Ec.2.3.13)}$$

$$5C_3 + C_4 - 5C_5 - C_6 = -104,32 \text{ (Ec.2.3.14)}$$

$$C_5 - C_7 = -2.755,5272 \text{ (Ec.2.3.15)}$$

$$8C_5 + C_6 - 8C_7 - C_8 = -14.696,1664 \text{ (Ec.2.3.16)}$$

### Solución del sistema de ecuaciones por sustitución

Reemplazando la (Ec.2.3.9) en la (Ec.2.3.12), tenemos:

$$2C_1 + C_2 = 2,66; 2C_1 + C_2 - 2C_3 - C_4 = -303,7048$$

$$2,66 - 2C_3 - C_4 = -303,7048$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$2C_3 + C_4 = 306,3714$$

Despejando  $C_4$ , tenemos:

$$C_4 = 306,3714 - 2C_3 \text{ (Ec.2.3.17)}$$

Despejando  $C_6$  de la (Ec.2.3.10), tenemos:

$$C_6 = 305,4336 - 8C_5 \text{ (Ec.2.3.18)}$$

Reemplazamos la (Ec.2.3.17) y la (Ec.2.3.18), en la (Ec.2.3.14):

$$5C_3 + (306,3714 - 2C_3) - 5C_5 - (305,4336 - 8C_5) = -104,32$$

$$5C_3 + 306,371 - 2C_3 - 5C_5 - 305,4336 + 8C_5 = -104,32$$

Despejando los términos independientes a un lado de la ecuación y los términos dependientes al otro, tenemos:

$$3C_3 + 3C_5 = -105,2574 \text{ (Ec.2.3.19)}$$

Despejando  $C_5$  de la (Ec.2.3.13), tenemos:

$$C_3 = C_5 \text{ (Ec.2.3.20)}$$

Reemplazamos la (Ec.2.1.20) en la (Ec.2.1.19):

$$3C_5 + 3C_5 = -105,2574$$

$$6C_5 = -105,2574$$

Despejando  $C_5$ , tenemos:

$$C_5 = -17,5429$$

Reemplazamos  $C_5 = -17,5429$  en la (Ec.2.3.20):

$$C_3 = -17,5429$$

Reemplazando  $C_3 = -17,5429$  en la (Ec.2.3.17):

$$C_4 = 306,3714 - 2C_3$$

$$C_4 = 306,3714 - 2(-17,5429)$$

$$C_4 = 341,4572$$

Reemplazando  $C_3 = -17,5429$  en la (Ec.2.3.1):

$$C_1 - C_3 = -227,7784$$

$$C_1 - (-17,5429) = -227,7784$$

Despejando  $C_1$ , tenemos:

$$C_1 = -245,3213$$

Reemplazando  $C_1 = -245,3213$  en la (Ec.2.3.9):

$$2C_1 + C_2 = 2,66$$

$$2(-245,3213) + C_2 = 2,66$$

Despejando  $C_2$ , tenemos:

$$C_2 = 493,3092$$

Reemplazando  $C_5 = -17,5429$  en la (Ec.2.1.15):

$$C_5 - C_7 = 2755,5272$$

$$-17,5429 - C_7 = -2755,5272$$

Despejando  $C_7$ , tenemos:

$$C_7 = 2737,9843$$

Reemplazando  $C_5 = -17,5429$  en la (Ec.2.3.18):

$$C_6 = 305,4336 - 8(-17,5429)$$

$$C_6 = 445,7768$$

Reemplazando  $C_5 = -17,5429$ ,  $C_6 = 445,7768$  y  $C_7 = 2.737,9843$  en la (Ec.2.3.16):

$$8(-17,5429) + 445,7768 - 8(2.737,9843) - C_8 = -14.696,1664$$

Despejando  $C_8$ , tenemos:

$$C_8 = -6.902,2736$$

Por lo tanto, el valor de las incógnitas es:

$$C_1 = -245,3213$$

$$C_2 = 493,3092$$

$$C_3 = -17,5429$$

$$C_4 = 341,4572$$

$$C_5 = -17,5429$$

$$C_6 = 445,7768$$

$$C_7 = 2.737,9843$$

$$C_8 = -6.902,2736$$

Reemplazamos el valor de las constantes de integración en las ecuaciones de giros y deflexiones, y tabulamos los valores números de giros y deflexiones en toda la viga:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow$$

$$\theta(x)_1 = -0,41\overline{66}x^4 - 245,3213$$

$$\Delta(x)_1 = -0,08\overline{33}x^5 - 245,3213x + 493,3092$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow$$

$$\theta(x)_2 = -0,41\overline{66}x^4 + 56,9446x^2 - 227,7784x - 17,5429$$

$$\Delta(x)_2 = -0,08\overline{33}x^5 + 18,9815x^3 - 113,8892x^2 - 17,5429x + 341,4572$$

$$5 \leq x \leq 8 \rightarrow$$

$$\theta(x)_3 = 0,25x^4 - 10x^3 + 106,9446x^2 - 311,1159x - 17,5429$$

$$\Delta(x)_3 = 0,05x^5 - 2,5x^4 + 35,6482x^3 - 155,558x^2 - 17,5429x + 445,7768$$

$$8 \leq x \leq 10 \rightarrow$$

$$\theta(x)^4 = 0,25x^4 - 10x^3 + 150x^2 - 1.000x + 2.737,9843$$

$$\Delta(x)^4 = 0,05x^5 - 2,5x^4 + 50x^3 - 500x^2 + 2.737,9843x - 6.902,2736$$

Se debe tener en cuenta que cada uno de los valores hallados, en cuanto a rotaciones y desplazamientos, estarán en función del módulo de elasticidad “E” y la inercia de la sección transversal “I”. Por lo tanto, para determinar un giro y una deflexión para una viga específica, solo se deberá dividir el numero entre EI.

X	$\frac{\theta(x)}{EI}$	$\frac{\Delta(x)}{EI}$
0	245,32 horario	493,31
1	245,74 horario	247,90
2	251,99 horario	0,00
2	251,99 horario	0,00
3	222,12 horario	243,92
4	124,19 horario	421,42
5	6,80 antihorario	481,11
5	6,75 antihorario	481,11
6	129,77 antihorario	410,76
7	215,18 antihorario	234,18
8	241,98 antihorario	0,00
8	241,98 antihorario	0,00
9	238,23 antihorario	239,54
10	237,98 antihorario	477,57

## 2.3. Giros y deflexiones por métodos geométricos

Los denominados métodos geométricos son aquellos en los cuales los giros y las deflexiones se obtienen directamente de la deformación del elemento. En otras palabras, los desplazamientos en un punto particular se determinan sumando los efectos de las deformaciones en la estructura (McCormac, 2010).

Aunque en la actualidad existen muchos métodos para determinar las deformaciones de una estructura aplicando el anterior concepto, en esta guía se presentarán y se enseñará a manejar dos métodos: los teoremas del área-momento y el método de la viga conjugada.

### 2.3.1. Teoremas del área-momento

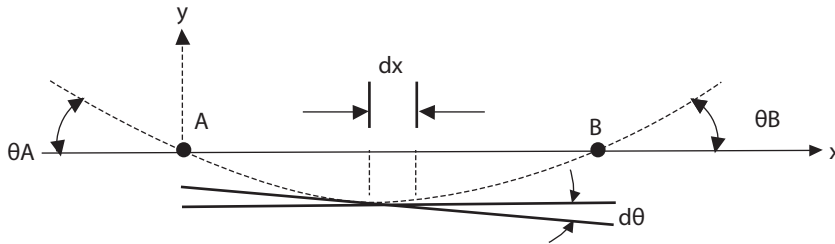
Las ideas iniciales para los dos teoremas del área-momento fueron desarrolladas por Otto Mohr y más tarde establecidas formalmente por Charles E. Greene en 1873. Estos teoremas proporcionan una técnica semigráfica para determinar la pendiente de la curva elástica y su alteración debido a la flexión (Hibbeler, 2012)

y resultan muy útiles para el cálculo de giros y deflexiones en vigas y pórticos, especialmente cuando se analiza su respuesta a cargas concentradas.

### Primer teorema

Si se tienen dos puntos A y B de la curva elástica de un elemento sometido a flexión, la diferencia en pendiente de las tangentes a la curva en esos dos puntos es igual al área del diagrama de momentos  $M(x)/EI$  entre ellos (Uribe, 2000).

**Figura 2.4. Demostración del primer teorema del área-momentos**



Fuente: Uribe (2000).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{M(x)}{EI}$$

Pero con el mismo supuesto:

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI} dx$$

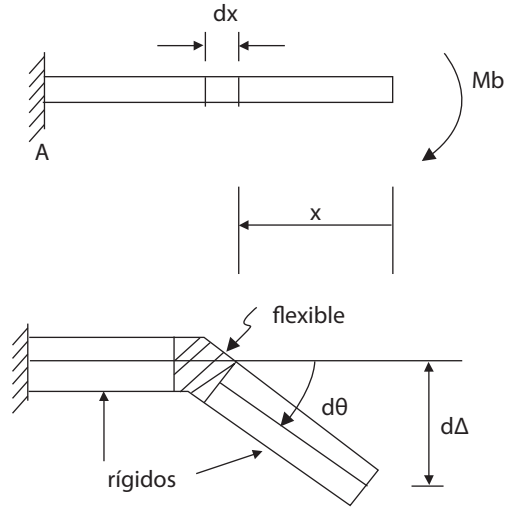
Por lo tanto, el primer teorema del área-momento se presenta así:

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \left(\frac{M(x)_{A-B}}{EI}\right) dx$$

## Segundo teorema

La distancia medida perpendicularmente a un elemento de un punto B, sobre la curva elástica de una viga a la tangente trazada en otro punto A de esta, es igual al momento estático con respecto a B del área del diagrama de momentos ( $M(x)$ )/EI entre dichos puntos (Uribe, 2000).

Figura 2.5. Demostración del segundo teorema del área-momentos



Fuente: Uribe (2000).

$$d\theta = \frac{M(x)_B}{EI} dx$$

Por consiguiente:

$$d\Delta = x d\theta$$

$$d\Delta = x \frac{M(x)_B}{EI} dx$$

La deflexión total de B al considerar toda la viga flexible es la integral de la expresión anterior a lo largo de la viga, es decir:

$$\Delta = \int_A^B d\Delta = \int_A^B x \left( \frac{M(x)_B}{EI} \right) dx$$

$$\Delta = \int \left( \frac{M(x)_B}{EI} \right) dx * (x)$$

La deflexión de B es el momento del área del diagrama  $M(x)/EI$  entre A y B on respecto a B. La expresión anterior se puede generalizar cuando el momento no es constante, en cuyo caso solo sirve para evaluar la parte de la deflexión que corresponde a flexión.

Además, debe tenerse en cuenta que el valor obtenido no da la deflexión absoluta, sino simplemente la distancia perpendicular al elemento entre la elástica y la tangente trazada en un punto A. Por lo tanto, se debe recurrir a un análisis geométrico para determinar la deflexión real del elemento, lo cual se explicará más adelante. Por consiguiente, la expresión general del segundo teorema del área-momento es:

$$\tau_{B/A} = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx * (x)$$

Tenga en cuenta que  $x$  es la distancia entre el centroide del diagrama de momentos y el punto B, donde está ubicado  $\tau_{B/A}$ .

### Convención de signos

El análisis de los signos que obtenemos al aplicar los dos teoremas del área-momento es el siguiente:

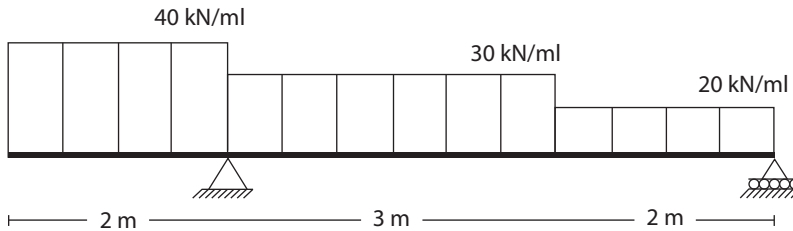
- Para el *primer teorema*, se necesita conocer la ecuación del diagrama de momentos  $M(x)/EI$ , además de uno de los dos giros ( $\theta$ ), sabiendo que si el giro es antihorario será positivo, y si por el contrario es horario será negativo. Debe incluirse el signo del giro para que la respuesta sea verdadera y por consiguiente nos dé la dirección de este.
- Para el *segundo teorema*, el análisis se hará cuando se halle la distancia entre la elástica y la tangente  $\tau_{B/A}$ . Si la distancia  $\tau$  nos da positiva, indica que la tangente trazada desde el punto A está por debajo de la elástica en el caso de vigas, y a la izquierda de la elástica en el caso de columnas. Por el contrario, si la distancia  $\tau$  nos da negativa, indica que la tangente trazada desde el punto A está por encima de la elástica en el caso de vigas, y a la derecha de la elástica en el caso de columnas. Tenga en cuenta que este signo no tiene ninguna representación en la dirección de los giros y deflexiones, por lo que esta se debe hallar de forma gráfica por geometría.

### 2.3.2. Ejercicios resueltos: área-momento

#### Ejemplo 3.1.

Determinar la deformación (giros y deflexiones), al inicio de la viga, sobre los dos apoyos y en el centro de la luz (deflexión máxima, cuando el giro es nulo) de la viga de la figura 2.6. Tenga en cuenta que es la misma viga solucionada estáticamente en el inciso 1.7.1 de esta guía.

Figura 2.6. Viga del ejemplo 3.1



Se traen las ecuaciones de momentos que fueron solucionadas en el inciso 1.7.1, con sus respectivas direcciones, ya que es fundamental para el método:

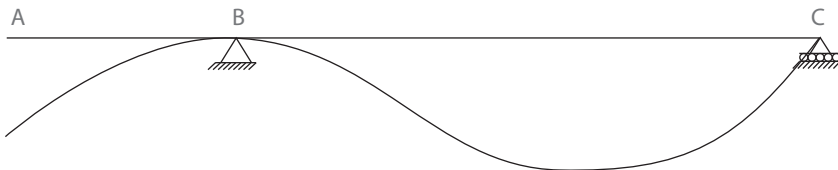
$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -20x^2$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$5 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

Es necesario suponer una elástica, lo cual ya fue hecho en el inciso 1.7.1, por lo que traeremos esa elástica supuesta (figura 2.7).

Figura 2.7. Posible deformada de la viga del ejemplo 3.1



Para empezar a solucionar el ejercicio, tenemos que saber con qué teorema podemos empezar a trabajar. Anteriormente se dijo que para poder usar el primer teorema se necesitaba tener, además de las ecuaciones de momentos, un giro, lo cual para este ejercicio no se cumple ya que no se conoce ningún giro de la viga. Así que solo podemos empezar a trabajar con el segundo teorema. Se procede



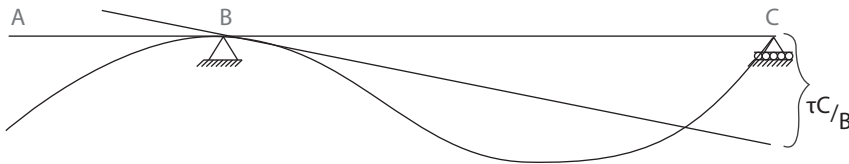
entonces de la siguiente manera: empezaremos en el tramo donde conozcamos más desplazamientos, sabiendo que estos deben ser perpendiculares al elemento.

En la viga, conocemos que las deflexiones en los dos apoyos es cero, es decir, en B y en C se conocen las deformaciones; por lo tanto, empezamos en este tramo, trazando una línea tangente a la elástica supuesta en el punto B, y situaremos el  $\tau$  en el punto C:

$$\tau_{C/B} = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx * (x)$$

Para este ejemplo el tramo B-C tiene dos cortes; por lo tanto, tiene dos ecuaciones de momento, por lo que el teorema se aplica sumando la acción de las dos ecuaciones de momento, con su respectivo  $x$  (distancia desde el centroide del diagrama de momentos hasta el  $\tau$ ).

**Figura 2.8. Tangente en B de la viga del ejemplo 3.1**



$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$5 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

Debido a que los cortes se hicieron de izquierda a derecha, el centroide del diagrama de momentos se debe hallar desde el inicio de la viga, de la izquierda hacia la derecha. Sin embargo, en este caso el  $\tau_{C/B}$  está a la derecha, por lo que  $x$  es un valor de derecha a izquierda; entonces se deberá restar al largo de la viga el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

$$\tau_{C/B} = \int_2^5 (-15x^2 + 147x - 314) dx * \left[ 7 - \frac{\int_2^5 (-15x^2 + 147x - 314)x dx}{\int_2^5 (-15x^2 + 147x - 314) dx} \right]$$

$$+ \int_5^7 (-10x^2 + 97x - 189) dx * \left[ 7 - \frac{\int_5^7 (-10x^2 + 97x - 189)x dx}{\int_5^7 (-10x^2 + 97x - 189) dx} \right]$$

Se debe tener en cuenta que el centroide de diagrama de momentos se determina con la ecuación de cargas distribuidas en función de  $x$ , explicado en el inciso 1.5 de la presente guía.

Solucionando las integrales definidas, tenemos:

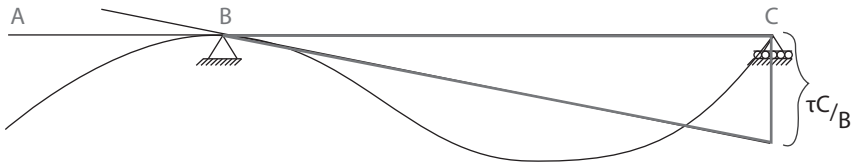
$$\tau_{C/B} = 16,5 * \left[ 7 - \frac{152,25}{16,5} \right] + \frac{178}{3} * \left[ 7 - \frac{1.022}{178} \right]$$

$$\tau_{C/B} = 37,92$$

El  $\tau$  dio positivo, por lo que la tangente está por debajo de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.8.

Además, podemos observar que la elástica en el punto C pasa justo por la línea de acción de la viga, ya que allí hay un apoyo que impide el desplazamiento. Es decir, el  $\tau_{(CB)}$  también es la distancia entre la tangente y la viga, inscribiendo así un triángulo rectángulo formado por estas dos y el  $\tau_{(CB)}$ . Se puede determinar el giro de B por geometría (figura 2.9).

**Figura 2.9 Triángulo inscrito entre la viga, la tangente  $\tau_{(CB)}$  y de la viga del ejemplo 3.1**



El giro de B por geometría es:

$$\tan(\theta_B) = \frac{\tau_{C/B}}{d_{B-C}}$$

El valor de los giros se halla en radianes, y por definición los ángulos inferiores a 0,4 rad son aproximadamente iguales a la tangente de ese ángulo. Puesto que los giros son valores muy pequeños, podemos usar esa definición:

$$\theta_B \cong \tan(\theta_B)$$

Por lo tanto:

$$\theta_B = \frac{\tau_{C/B}}{d_{B-C}}$$

Siendo  $d_{B,C}$  la distancia de B a C:

$$\theta_B = \frac{37,92}{5}$$

$$\theta_B = \frac{7,58}{EI}$$

Aunque el valor de ese giro no es inferior a 0,4, recuerde que este valor está dividido entre EI, por lo que al reemplazar el módulo de elasticidad E y la inercia I cumpliremos con este criterio.

Además, para definir la dirección de ese giro, como sabemos que hasta el momento la elástica supuesta es correcta, también lo es el giro de B, que según la gráfica es horario:

$$\theta_B = \frac{7,58}{EI} \text{ horario}$$

Teniendo uno de los giros, ya podemos usar el primer teorema del área-momento para determinar los otros (para hallar el giro en A, recuerde que los giros horarios son negativos).

Al usar el primer teorema se resta el giro final menos el inicial. Sabiendo que en vigas el nudo inicial es a la izquierda, entonces:

$$\begin{aligned} \theta_B - \theta_A &= \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx \\ (-7,58) - \theta_A &= \int_0^2 (-20 x^2) dx \\ -7,58 - \theta_A &= -53,33 \end{aligned}$$

Despejando  $\theta_A$  de la ecuación, tenemos:

$$\theta_A = \frac{45,75}{EI} \text{ antihorario}$$

Para hallar el giro en C (nudo B inicial y nudo C final), entonces:

$$\theta_C - \theta_B = \int_2^5 (-15x^2 + 147x - 314) dx + \int_5^7 (-10x^2 + 97x - 189) dx$$

$$\theta_C - (-7,58) = 16,5 + \frac{178}{3}$$

Despejando  $\theta_C$  de la ecuación, tenemos:

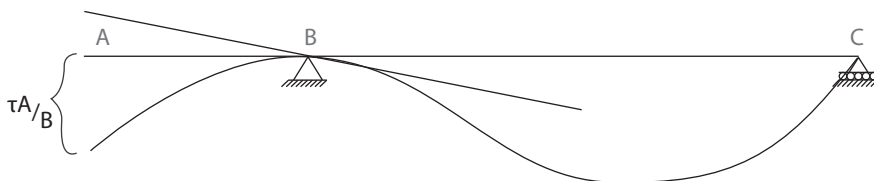
$$\theta_C = \frac{68,25}{EI} \text{ antihorario}$$

Después de hallar todos los giros, procedemos a determinar los desplazamientos, los cuales serán los del voladizo A, y el máximo en el centro de la luz cuando el giro es cero, ya que conocemos los desplazamientos en los apoyos, iguales a cero.

Para determinar las deflexiones necesitamos utilizar el segundo teorema, además de analizar geoméricamente para poder llegar a la respuesta verdadera.

Primero determinamos el desplazamiento en el extremo del voladizo en A. Para ello trazamos una tangente en el punto B que se dirija hacia A (figura 2.10).

**Figura 2.10. Tangente en B hacia A de la viga del ejemplo 3.1.**



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo A-B:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -20x^2$$

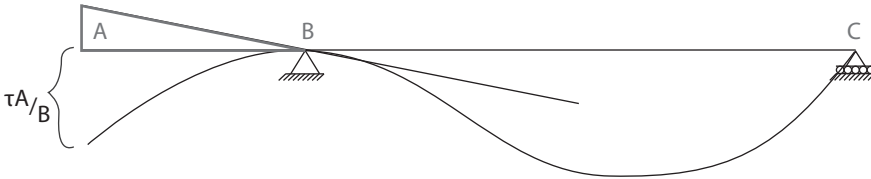
Como el corte se hizo de izquierda a derecha, la distancia  $x$  que se necesita es la misma que se halla con el centroide del diagrama de momentos, sin necesidad de hacer alguna clase de ajuste.

$$\tau_{A/B} = \int_0^2 (-20x^2) dx * \left[ \frac{\int_0^2 (-20x^2)x dx}{\int_0^2 (-20x^2) dx} \right]$$

$$\tau_{A/B} = -80$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.10. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.11).

**Figura 2.11. Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.1**



De ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_B = \frac{F}{d_{A-B}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 2 m:

$$7,58 = \frac{F}{2}$$

Despejando F, tenemos:

$$F=15,16$$

Vemos que el valor de F (distancia entre la tangente y la viga) es menor a  $\tau_{A/B}$  (distancia entre la tangente y la elástica). Eso quiere decir que la elástica está por debajo de la viga, y la deflexión es la distancia entre la elástica y la viga inicialmente, por lo que el valor del desplazamiento es el siguiente:

$$\Delta_A = 80 - 15,16$$

$$\Delta_A = \frac{64,84}{EI} \downarrow$$

La dirección se debe a cómo se deformó la viga.

Para determinar la deformación máxima en el centro de la luz, debemos partir del hecho de que en la deflexión máxima el giro es nulo.

$$\theta_x = 0 \rightarrow \Delta_{\text{MÁX}}$$

Partiendo del primer teorema del área-momento:

$$\theta_x - \theta_B = \int_2^x (-15x^2 + 147x - 314) dx$$

Para esta primera hipótesis, partiremos del supuesto de que el giro nulo está en corte 2. En caso de no ser así, se procederá a ubicar el giro cero en el corte 3.

Integrando, tenemos:

$$7,58 = -5x^3 + 73,5x^2 - 314x$$

Definida entre 2 y x, aplicando los límites, tenemos:

$$-5x^3 + 73,5x^2 - 314x + 366,42 = 0$$

Solucionando la ecuación y hallando el valor de x:

$$x = \begin{cases} 7,984 \\ 4,806 \\ 1,909 \end{cases}$$

Vemos que uno de los tres valores está entre 2 y 5, que son los límites; por lo tanto, el desplazamiento máximo está en el segundo corte.

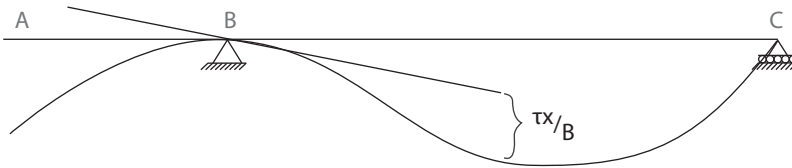
El desplazamiento máximo está en  $x = 4,806$ . Este será el límite para hallar la deformación. Usamos el segundo teorema:

$$\tau_{x/B} = \int_2^{4,806} (-15x^2 + 147x - 314) dx * \left[ 7 - \frac{\int_2^{4,806} (-15x^2 + 147x - 314) x dx}{\int_2^{4,806} (-15x^2 + 147x - 314) dx} \right]$$

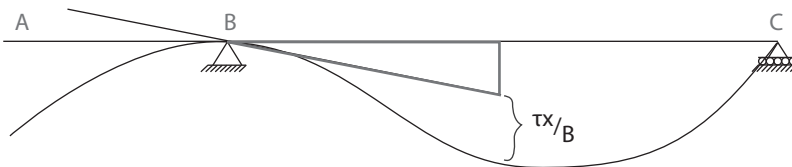
Aplicando la integral, tenemos:

$$\tau_{x/B} = -72,09$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.12.

**Figura 2.12. Tangente en B hacia x de la viga del ejemplo 3.1**

No obstante, como el  $\tau$  no es el desplazamiento verdadero, debemos hallarlo por geometría (figura 2.13).

**Figura 2.13. Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.1**

La distancia F entre la viga y la tangente es:

$$7,58 = \frac{F}{2,806}$$

La distancia de la viga entre A y x es 4,806, pero la distancia necesaria es entre B y x; por lo tanto, le restamos los 2 m entre A y B, y así la distancia entre B y x es 2,806.

Despejando F, tenemos:

$$F = 21,269$$

Según la figura 2.12, la deflexión máxima es la suma entre F y  $\tau_{x/B}$ ; por lo tanto, la deflexión máxima es:

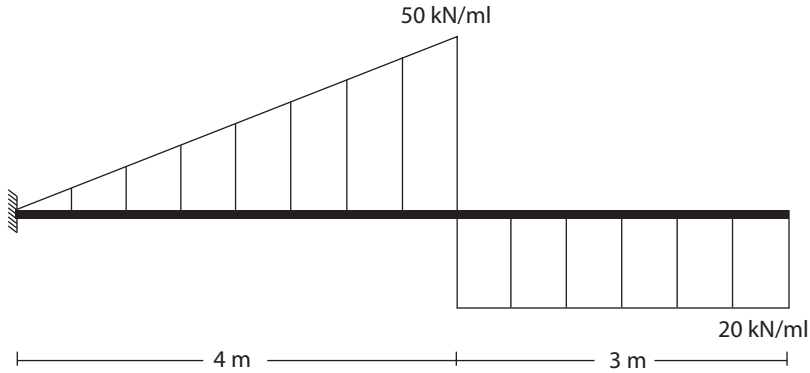
$$\Delta_{MAX} = 21,296 + 72,09$$

$$\Delta_{MAX} = \frac{93,386}{EI} \downarrow$$

### Ejemplo 3.2.

Determinar la deformación (giros y deflexiones) en el empotramiento al inicio de la viga de la figura 2.14 y en el extremo del voladizo. Tenga en cuenta que es la misma viga solucionada estáticamente en el inciso 1.7.2 de esta guía.

Figura 2.14. Viga del ejemplo 3.2



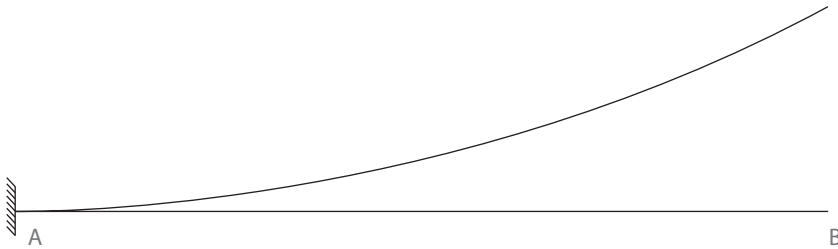
Trayendo las ecuaciones de momentos que fueron solucionadas en el inciso 1.7.2 con sus respectivas direcciones, ya que es fundamental para el método, tenemos:

$$0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = -2,08\overline{33}x^3 + 40x + 63,3\overline{3}$$

$$4 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_2 = 10x^2 - 140x + 490$$

Es necesario suponer una elástica, lo cual ya fue hecho en el inciso 1.7.2, por lo que traeremos esa elástica supuesta (figura 2.15).

Figura 2.15. Posible deformada de la viga del ejemplo 3.2



Para este ejercicio, se tiene que, por el tipo de apoyo en A, se conocen el desplazamiento y el giro, los cuales son iguales a cero. Por lo tanto, para hallar el giro en B se usará el primer teorema directamente, y para hallar el desplazamiento se utilizará el segundo teorema.

### **Primer teorema**

Al usar el primer teorema se resta el giro final menos el inicial. Sabiendo que en vigas el nudo inicial es a la izquierda, entonces:



$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx$$

El giro en A es nulo,  $\theta_A=0$ , entonces:

$$\theta_B = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx$$

Además, el tramo de A-B tienes dos ecuaciones. Entonces:

$$\theta_B = \int_0^4 (-2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63,3\overline{33}) dx + \int_4^7 (10 x^2 - 140 x + 490) dx$$

$$\theta_B = 440 + 90$$

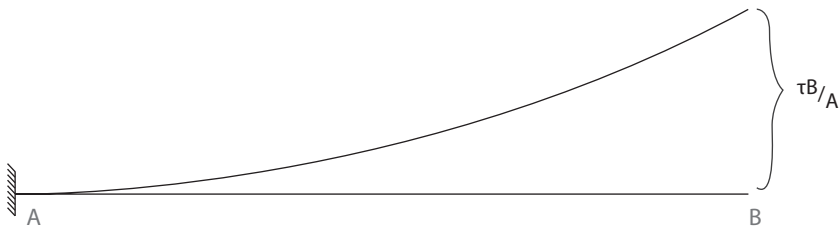
Por lo que el giro de A es:

$$\theta_B = \frac{530}{EI} \text{ antihorario}$$

Segundo teorema:

$$\tau_{B/A} = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx * (x)$$

**Figura 2.16. Tangente en A de la viga del ejemplo 3.2**



Como en A el giro es cero, la tangente coincide con la viga, por lo que  $\tau$ , que es la distancia entre la tangente y la elástica, sería el mismo desplazamiento, esto es, la distancia entre la viga y la elástica.

Debido a que los cortes se hicieron de izquierda a derecha, el centroide del diagrama de momentos se debe hallar desde el inicio de la viga, de la izquierda hacia la derecha. Sin embargo, en este caso el  $\tau_{BC}$  está a la derecha, por lo que  $x$  es un valor de derecha a izquierda. Entonces se deberá restar al largo de la viga el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

$$\tau_{B/A} = \int_0^4 (-2,08\bar{3} x^3 + 40 x + 63, \bar{3}\bar{3}) dx \left[ 7 - \frac{\int_0^4 (-2,08\bar{3} x^3 + 40 x + 63, \bar{3}\bar{3}) x dx}{\int_0^4 (-2,08\bar{3} x^3 + 40 x + 63, \bar{3}\bar{3}) dx} \right] \\ + \int_4^7 (10x^2 - 140x + 490) dx \left[ 7 - \frac{\int_4^7 (10x^2 - 140x + 490) x dx}{\int_4^7 (10x^2 - 140x + 490) dx} \right]$$

Se debe tener en cuenta que el centroide de diagrama de momentos se determina con la ecuación de cargas distribuidas en función de  $x$ , explicada en el inciso 1.5 de la presente guía.

Solucionando las integrales definidas, tenemos:

$$\tau_{B/A} = 440 * \left[ 7 - \frac{933,34}{440} \right] + 90 * \left[ 7 - \frac{427,5}{90} \right] \\ \tau_{B/A} = 2349,16$$

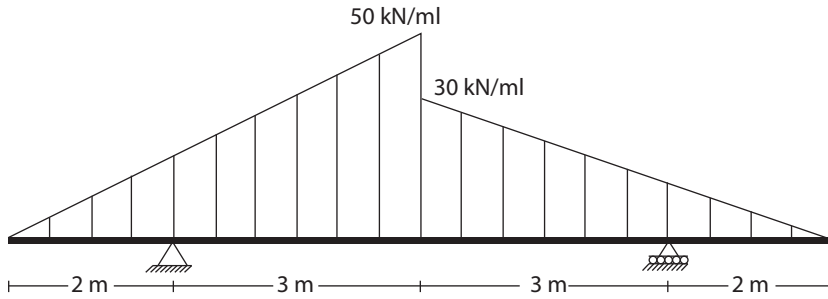
Como  $\tau$  es positivo, la tangente está por debajo de la elástica. Eso indica que la elástica se supuso bien, y al estar la tangente sobre la viga, el  $\tau$  será el mismo desplazamiento:

$$\Delta_B = \frac{2349,16}{EI} \uparrow$$

*A manera de análisis:* en los voladizos, como este ejemplo, el desplazamiento en el extremo es también el desplazamiento máximo.

### Ejemplo 3.3.

Determinar la deformación (giros y deflexiones) al inicio, sobre los dos apoyos, en el centro de la luz (deflexión máxima, cuando el giro es nulo) y al final de la viga de la figura 2.17. Tenga en cuenta que es la misma viga solucionada estáticamente en el inciso 1.7.3 de esta guía.

**Figura 2.17. Viga del ejemplo 3.3**

Trayendo las ecuaciones de momentos que fueron solucionadas en el inciso 1.7.3 con sus respectivas direcciones, ya que es fundamental para el método, tenemos:

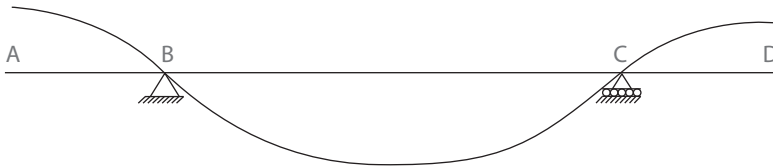
$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -1,66x^3$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784$$

$$5 \leq x \leq 8 \rightarrow M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159$$

$$8 \leq x \leq 10 \rightarrow M(x)_4 = x^3 - 30x^2 + 300x - 1000$$

Es necesario suponer una elástica, lo cual ya fue hecho en el inciso 1.7.3, por lo que traeremos esa elástica supuesta (figura 2.18).

**Figura 2.18. Posible elástica de la viga del ejemplo 3.3**

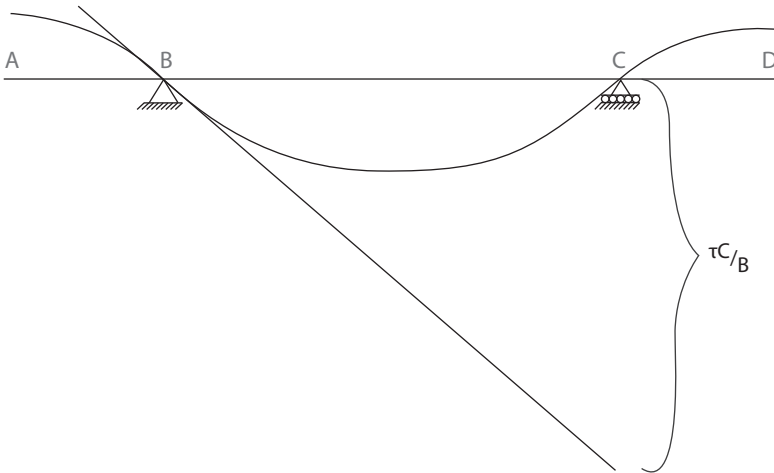
Para aplicar el segundo teorema, empezaremos en el tramo donde conozcamos más desplazamientos, sabiendo que estos deben ser perpendiculares al elemento.

En la viga conocemos que las deflexiones en los dos apoyos es cero, es decir, en B y en C se conocen las deformaciones; por lo tanto, se empezará en este tramo trazando una línea tangente a la elástica supuesta en el punto B, y situaremos el ten en el punto C:

$$\tau_{C/B} = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx * (x)$$

Para este ejemplo el tramo B-C tiene dos cortes; por lo tanto, tiene dos ecuaciones de momento. Así pues, el teorema se aplica sumando la acción de las dos ecuaciones de momento, con su respectivo  $x$  (distancia desde el centroide del diagrama de momentos hasta el  $\tau$ ).

**Figura 2.19. Tangente de B hacia C en la viga del ejemplo 3.3**



$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784$$

$$5 \leq x \leq 8 \rightarrow M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159$$

Debido a que los cortes se hicieron de izquierda a derecha, el centroide del diagrama de momentos se debe hallar desde el inicio de la viga, de la izquierda hacia la derecha. Sin embargo, en este caso el  $\tau_{CB}$  está a la derecha, por lo que  $x$  es un valor de derecha a izquierda. Entonces al largo de la viga hasta el punto C, es decir, 8 m, se le deberá restar el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

$$\tau_{C/B} = \int_2^5 (-1,66x^3 + 113,89x - 227,78) dx * \left[ 8 - \frac{\int_2^5 (-1,66x^3 + 113,89x - 227,78)x dx}{\int_2^5 (-1,66x^3 + 113,89x - 227,78) dx} \right] \\ + \int_5^8 (x^3 - 30x^2 + 213,89x - 311,11) dx * \left[ 8 - \frac{\int_5^8 (x^3 - 30x^2 + 213,89x - 311,11)x dx}{\int_5^8 (x^3 - 30x^2 + 213,89x - 311,11) dx} \right]$$

Se debe tener en cuenta que el centroide de diagrama de momentos se determina con la ecuación de cargas distribuidas en función de  $x$ , explicada en el inciso 1.5 de la presente guía.

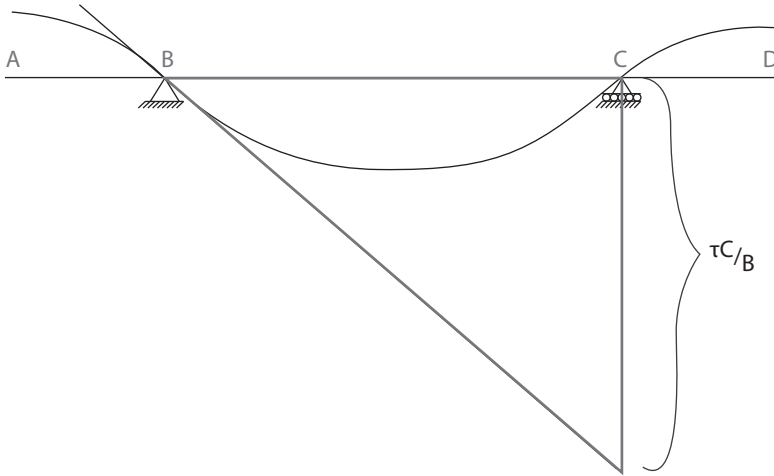
Solucionando las integrales definidas, tenemos:

$$\tau_{C/B} = 258,75 * \left[ 8 - \frac{1019,01}{258,75} \right] + 235,25 * \left[ 8 - \frac{1421,13}{235,25} \right]$$

$$\tau_{C/B} = 1509,91$$

El  $\tau$  dio positivo, por lo que la tangente está por debajo de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.20.

**Figura 2.20. Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3**



Además, podemos observar que la elástica en el punto C pasa justo por la viga, ya que allí hay un apoyo que impide el desplazamiento. Es decir, el  $\tau_{C/B}$  también es la distancia entre la tangente y la viga, inscribiendo así un triángulo rectángulo formado por estas dos y el  $\tau_{C/B}$ . Se puede determinar el giro de B, por geometría, así:

$$\theta_B = \frac{\tau_{C/B}}{d_{B-C}}$$

Siendo  $d_{(B-C)}$  la distancia de B a C:

$$\theta_B = \frac{1509,91}{6}$$

$$\theta_B = \frac{251,65}{EI} \text{ horario}$$

Teniendo uno de los giros, ya podemos usar el primer teorema del área-momento para determinar los otros (para hallar el giro en A, recuerde que los giros horarios son negativos).

Al usar el primer teorema se resta el giro final menos el inicial. Sabiendo que en vigas el nudo inicial es a la izquierda, entonces:

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx$$

$$(-251,65) - \theta_A = \int_0^2 (-1,66x^3) dx$$

$$-251,65 - \theta_A = -6,66$$

Despejando  $\theta_A$  de la ecuación, tenemos:

$$\theta_A = \frac{244,98}{EI} \text{ horario}$$

Para hallar el giro en C (nudo B inicial y nudo C final), entonces:

$$\theta_C - \theta_B = \int_2^5 (-1,6x^3 + 113,89x - 227,78) dx + \int_5^8 (x^3 - 30x^2 + 213,89x - 311,11) dx$$

$$\theta_C - (-251,65) = 258,7514 + 235,25$$

Despejando  $\theta_C$  de la ecuación, tenemos:

$$\theta_C = \frac{242,35}{EI} \text{ antihorario}$$

Para hallar el giro en D (nudo C inicial y nudo D final), entonces:

$$\theta_D - \theta_C = \int_8^{10} (x^3 - 30x^2 + 300x - 1000) dx$$

$$\theta_D - (242,35) = -4$$

Despejando  $\theta_D$  de la ecuación, tenemos:

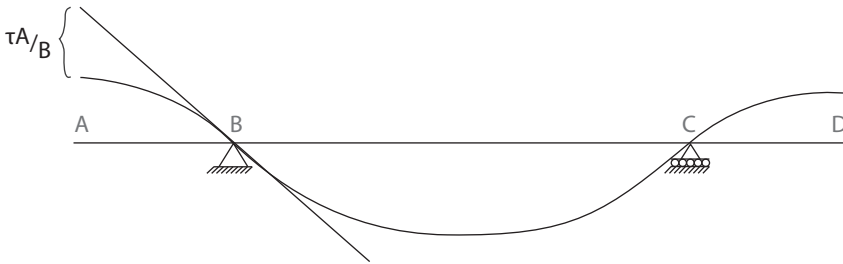
$$\theta_D = \frac{238,35}{EI} \text{ antihorario}$$

Después de hallar todos los giros, procedemos a determinar los desplazamientos, los cuales serán los de los voladizos A y D, y el máximo en el centro de la luz cuando el giro es cero, ya que sabemos que los desplazamientos en los apoyos son cero.

Para determinar las deflexiones necesitamos utilizar el segundo teorema, además de analizar geoméricamente para poder llegar a la respuesta verdadera.

Primero establecemos el desplazamiento en el extremo del voladizo en A. Para ello trazamos una tangente en el punto B que se dirija hacia A (figura 2.21).

**Figura 2.21. Tangente de B hacia A en la viga del ejemplo 3.3**



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo AB:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -1,66x^3$$

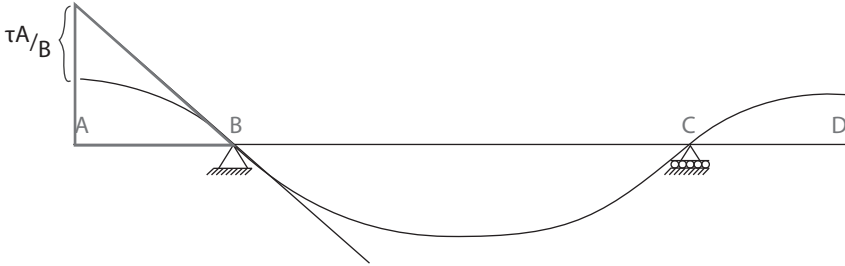
Como el corte se hizo de izquierda a derecha, la distancia  $x$  que se necesita es la misma que se halla con el centroide del diagrama de momentos, sin necesidad de hacer alguna clase de ajuste:

$$\tau_{A/B} = \int_0^2 (-1,66x^3) dx * \left[ \frac{\int_0^2 (-1,66x^3)x dx}{\int_0^2 (-1,66x^3) dx} \right]$$

$$\tau_{A/B} = -10,66$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.21. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.22).

Figura 2.22. Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3



De ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_B = \frac{F}{d_{A-B}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 2 m:

$$251,65 = \frac{F}{2}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 503,3$$

Vemos que el valor de F (distancia entre la tangente y la viga) es mayor a  $\tau_{A/B}$  (distancia entre la tangente y la elástica). Eso quiere decir que la elástica está por encima de la viga, y la deflexión es la distancia entre la elástica y la viga inicialmente. En consecuencia, el valor del desplazamiento es el siguiente:

$$\Delta_A = 503,3 - 10,66$$

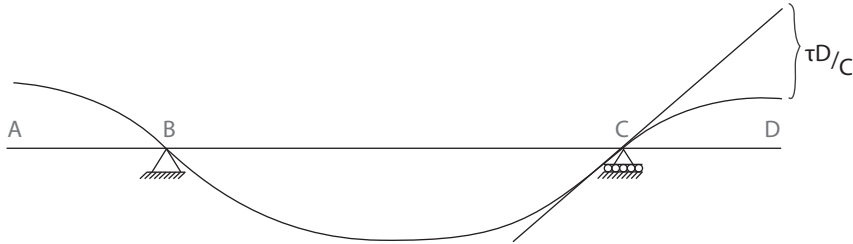
$$\Delta_A = \frac{492,63}{EI} \uparrow$$

La dirección se debe a cómo se deformó la viga.



Para determinar el desplazamiento en el extremo del voladizo en D, trazamos una tangente en el punto C que se dirija hacia D (figura 2.23).

**Figura 2.23. Tangente de C hacia B en la viga del ejemplo 3.3**



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo C-D:

$$8 \leq x \leq 10 \rightarrow M(x)_4 = x^3 - 30x^2 + 300x - 1000$$

Como el corte se hizo de izquierda a derecha, la distancia  $x$  que se necesita es de derecha a izquierda. Entonces al largo de la viga hasta el punto D, es decir, 10 m, se le deberá restar el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

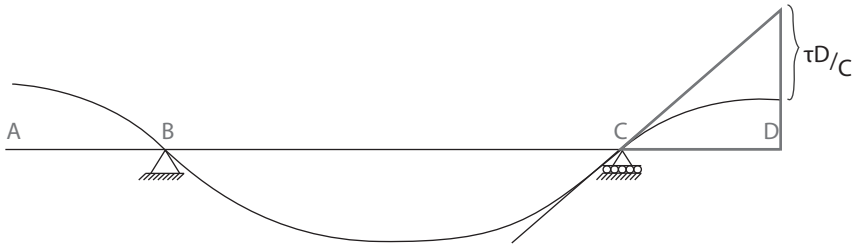
$$\tau_{D/C} = \int_8^{10} (x^3 - 30x^2 + 300x - 1000) dx * \left[ 10 - \frac{\int_8^{10} (x^3 - 30x^2 + 300x - 1000) x dx}{\int_8^{10} (x^3 - 30x^2 + 300x - 1000)} \right]$$

$$\tau_{D/C} = -4 * \left[ 10 - \frac{-33,6}{-4} \right]$$

$$\tau_{D/C} = -6,4$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.23. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.24).

Figura 2.24. Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3



De ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos “F”. Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_C = \frac{F}{d_{C-D}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 2 m:

$$242,35 = \frac{F}{2}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 484,7$$

Vemos que el valor de F (distancia entre la tangente y la viga) es mayor a  $\tau_{D/C}$  (distancia entre la tangente y la elástica). Eso quiere decir que la elástica está por encima de la viga, y la deflexión es la distancia entre la elástica y la viga inicialmente. En consecuencia, el valor del desplazamiento es el siguiente:

$$\Delta_A = 484,7 - 6,4$$

$$\Delta_A = \frac{478,3}{EI} \uparrow$$

La dirección se debe a cómo se deformó la viga.

Para determinar la deformación máxima en el centro de la luz, debemos partir del hecho de que en la deflexión máxima el giro es nulo:

$$\theta_x = 0 \rightarrow \Delta_{MÁX}$$

Partiendo del primer teorema del área-momento:

$$\theta_x - \theta_B = \int_2^x (-1,6x^3 + 113,89x - 227,78) dx$$

Para esta primera hipótesis, partiremos del supuesto de que el giro nulo esté en el corte 2. En caso de no ser así, se procederá a ubicar el giro cero en el corte 3.

Integrando, tenemos:  $251,65 = -0,416x^4 + 56,9446x^2 - 227,7784x$

Definida entre 2 y  $x$ , aplicando los límites, tenemos:

$$-0,416x^4 + 56,9446x^2 - 227,7784x - 17,205 = 0$$

Solucionando la ecuación y hallando el valor de  $x$ :

$$x = 4,95$$

Vemos que uno de los tres valores está entre 2 y 5, que son los límites. Por lo tanto, el desplazamiento máximo está en el segundo corte:

El desplazamiento máximo está en  $x = 4,95$ . Este será el límite para hallar la deformación. Usamos el segundo teorema:

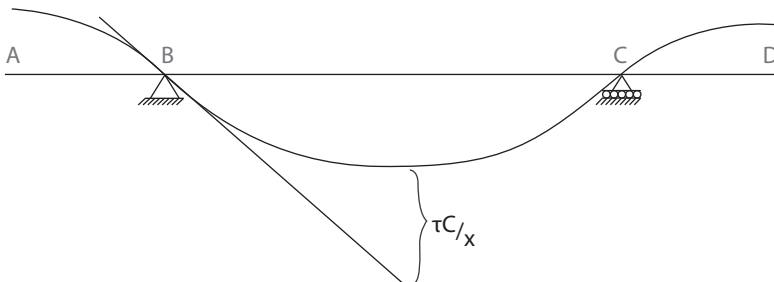
$$\tau_{x/B} = \int_2^{4,95} (-1,6x^3 + 113,89x - 227,78) dx * \left[ 7 - \frac{\int_2^{4,95} (-1,6x^3 + 113,89x - 227,78) x dx}{\int_2^{4,95} (-1,6x^3 + 113,89x - 227,78) dx} \right]$$

Aplicando la integral, tenemos:

$$\tau_{x/B} = 261,46$$

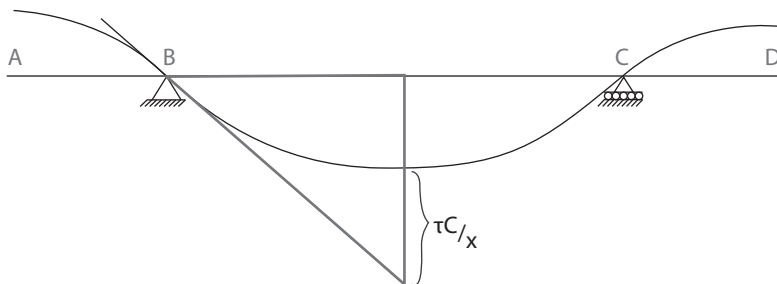
El  $\tau$  dio positivo, por lo que la tangente está por debajo de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.25.

**Figura 2.25. Tangente de B hacia  $x$  en la viga del ejemplo 3.3**



No obstante, como el  $\tau$  no es el desplazamiento verdadero, debemos hallarlo por geometría (figura 2.26).

**Figura 2.26. Triángulo inscrito en la viga del ejemplo 3.3**



La distancia F entre la viga y la tangente es:

$$251,65 = \frac{F}{2,95}$$

La distancia de la viga entre A y x es 4,95, pero la distancia necesaria es entre B y x. Por lo tanto, le restamos los 2 m entre A y B, y así la distancia entre B y x es 2,95.

Despejando F, tenemos:

$$F = 742,3675$$

Según la figura 2.26, la deflexión máxima es F menos la distancia  $\tau_{x/B}$ ; por lo tanto, la deflexión máxima es:

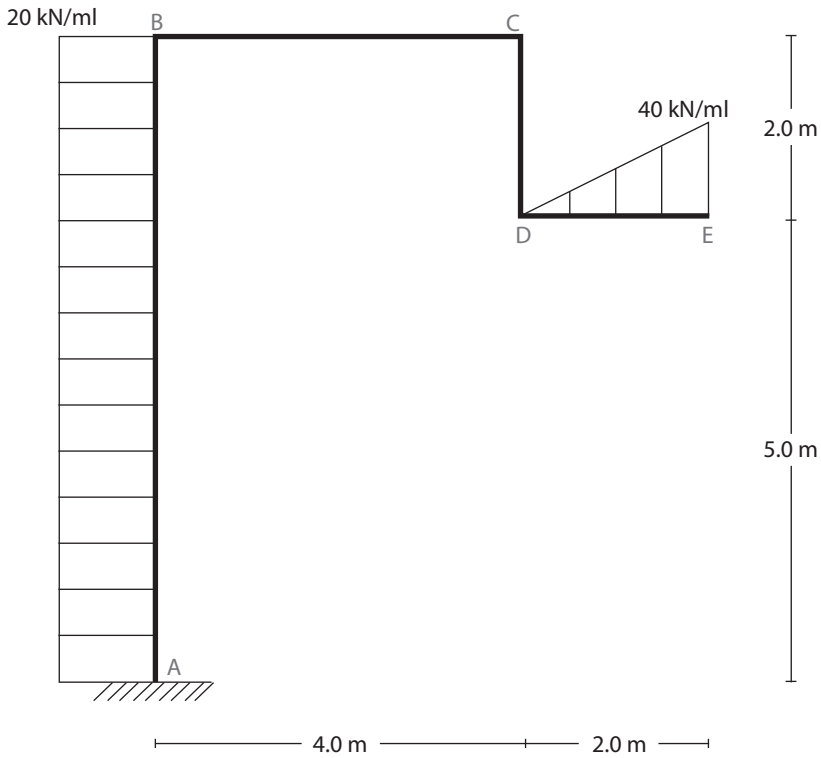
$$\Delta_{MÁX} = 742,3675 + 261,46$$

$$\Delta_{MÁX} = \frac{480,91}{EI} \downarrow$$

### Ejemplo 3.4.

Determinar todos los giros del pórtico y la deflexión horizontal y vertical en el punto E de la figura 2.27. Tenga en cuenta que este pórtico es el mismo que se solucionó estáticamente en el inciso 1.7.4 de la presente guía.

Figura 2.27. Pórtico del ejemplo 3.4



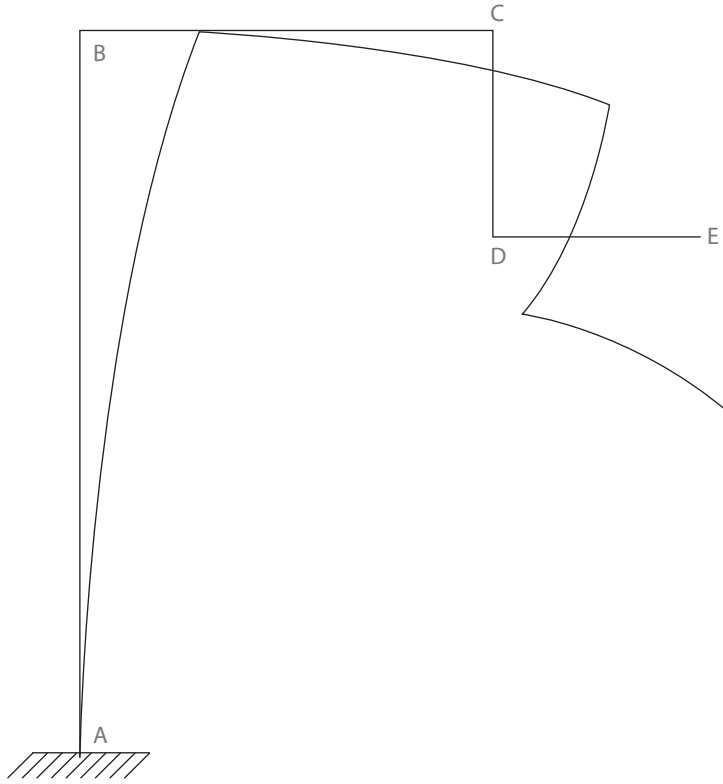
Trayendo las ecuaciones de momentos y suponiendo una elástica:

$$(B-C): 0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = 40x - 213,33$$

$$(D-E): 0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_2 = -3,33x^3 + 40x - 53,33$$

$$(A-B): 0 \leq x \leq 7 \uparrow M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33$$

$$(C-D): 0 \leq x \leq 2 \downarrow M(x)_4 = -53,33$$

**Figura 2.28. Posible deformada del pórtico del ejemplo 3.4**

Como el tipo de apoyo presente en el punto A es un empotramiento, entonces sabemos que los giros y las deflexiones son iguales a cero, ya que no se permite ninguna clase de movimiento. Por consiguiente, se procede a aplicar el primer teorema del área-momento para determinar todos los giros.

*Primer teorema:*

$$\theta_A - \theta_B = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que en las columnas el nudo de arriba es el inicial y el de abajo es el final.

Por condiciones de apoyo,  $\theta_A = 0$ . Entonces se tiene:

$$\theta_B = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx$$

La ecuación de momento en este tramo es:

$$M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33$$

Reemplazando, se tiene:

$$-\theta_B = \int_0^7 (10x^2 - 140x + 703,33) dx$$

Solucionando la integral y despejando  $\theta_B$  se obtiene:

$$\theta_B = \frac{2.636,64}{EI} \text{ horario}$$

Recuerde que para el primer teorema los signos negativos equivalen a giros horarios, y los positivos, a giros antihorarios.

$$\theta_C - \theta_B = \int_B^C \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que el giro  $\theta_B = -2.636,64$  y la ecuación de momento en este tramo es  $M(x)_1 = 40x - 213,33$ , reemplazando, se tiene:

$$\theta_C - (-2.636,64) = \int_0^4 (40x - 213,33) dx$$

Solucionando la integral y despejando  $\theta_C$ , se obtiene:

$$\theta_C = \frac{3.169,96}{EI} \text{ horario}$$

$$\theta_D - \theta_C = \int_C^D \left( \frac{M(x)_{C-D}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que el giro  $\theta_C = -3.169,96$  y la ecuación de momento en este tramo es  $M(x)_4 = -53,33$ , reemplazando, se tiene:

$$\theta_D - (-3.169,96) = \int_0^2 (-53,33) dx$$

Solucionando la integral y despejando  $\theta_D$ , se obtiene:

$$\theta_D = \frac{3,276,62}{EI} \text{ horario}$$

$$\theta_E - \theta_D = \int_D^E \left( \frac{M(x)_{D-E}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que el giro  $\theta_C = -3,276,62$  y la ecuación de momento en este tramo es  $M(x) = -3,33x^3 + 40x - 53,33$ , reemplazando, se tiene:

$$\theta_E - (-3,276,62) = \int_0^2 (-3,33x^3 + 40x - 53,33) dx$$

Solucionando la integral y despejando  $\theta_E$ , se obtiene:

$$\theta_E = \frac{3,316,61}{EI} \text{ horario}$$

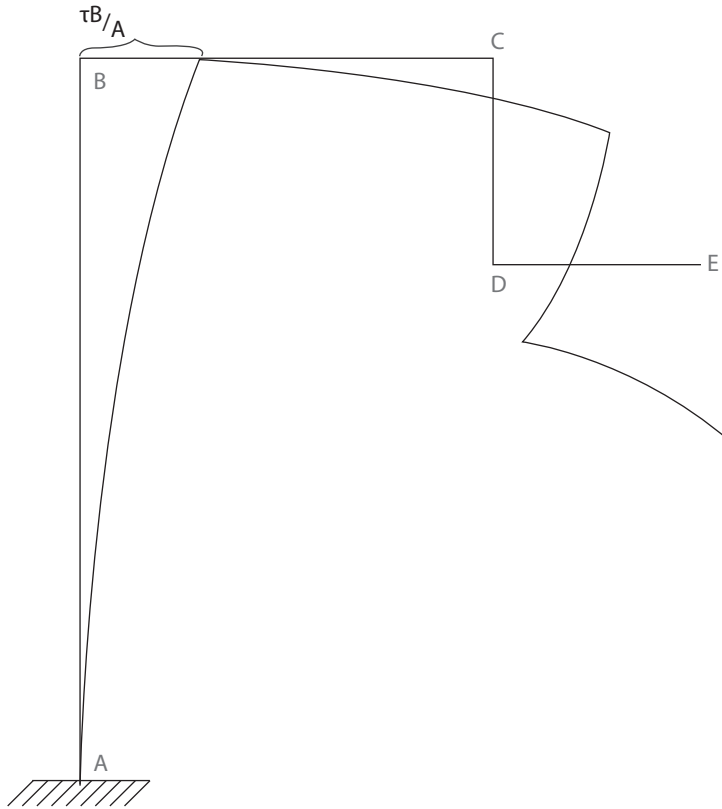
*Segundo teorema:*

$$\tau_{B/A} = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx * (x)$$

Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo A-B:

$$(A-B): 0 \leq x \leq 7 \uparrow M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33$$



**Figura 2.29. Tangente en A hacia B en el pórtico del ejemplo 3.4**

Como en A el giro es cero, la tangente coincide con la columna, por lo que  $\tau$ , que es la distancia entre la tangente y la elástica, sería el mismo desplazamiento, esto es, la distancia entre la columna y la elástica.

El corte en este tramo se hizo de abajo hacia arriba y la distancia  $x$  necesaria es de arriba hacia el centroide; por lo tanto, al largo de la columna es necesario restarle la distancia al centroide para poder determinar la distancia  $x$ :

$$\tau_{B/A} = \int_0^2 (10x^2 - 140x + 703,33) dx \left[ 7 - \frac{\int_0^2 (10x^2 - 140x + 703,33) x dx}{\int_0^2 (10x^2 - 140x + 703,33) dx} \right]$$

Se debe tener en cuenta que el centroide de diagrama de momentos se determina con la ecuación de cargas distribuidas en función de  $x$ , explicada en el inciso 1.5 de la presente guía.

Solucionando la integral definida, tenemos:

$$\tau_{B/A} = 2.636,64 * \left[ 7 - \frac{7.227,418}{2.636,64} \right]$$

$$\tau_{B/A} = 11.229,062$$

Como  $\tau$  es positivo, la tangente está a la izquierda de la elástica. Eso indica que la elástica se supuso bien, y al estar la tangente sobre la columna, el  $\tau$  será el mismo desplazamiento:

$$\Delta_{BH} = \frac{11.229,062}{EI} \rightarrow$$

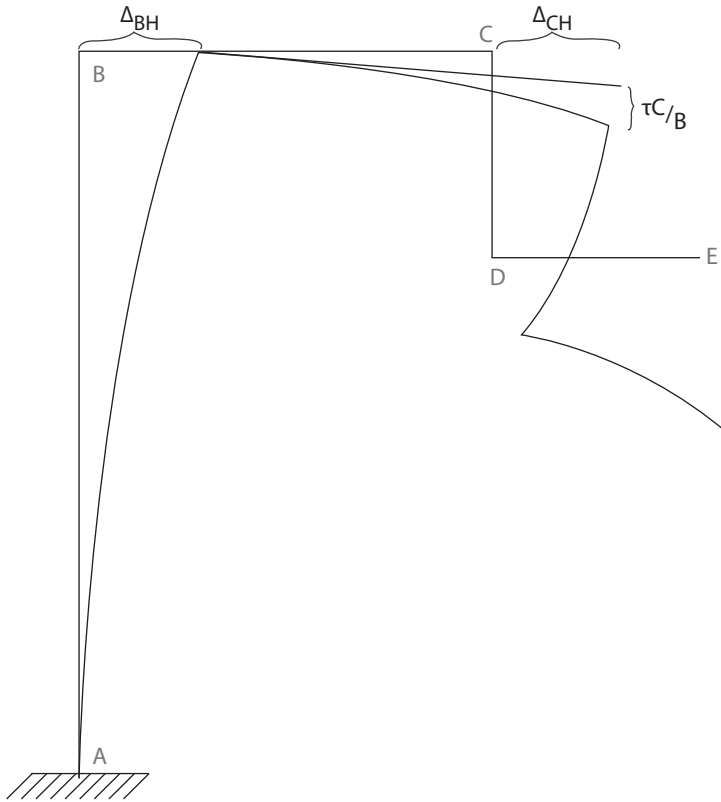
Recuerde que, cuando se analizan las estructuras con el segundo teorema del área-momento, los desplazamientos son perpendiculares al elemento. Es decir, como la barra es una columna, entonces la deflexión analizada en B es en la dirección x (horizontal).

Tenga en cuenta además que las vigas y columnas se comportan como elementos rígidos y, por lo tanto, los desplazamientos en los extremos que estén en la misma dirección de cierto elemento serán iguales. Por ejemplo, se sabe que en A los desplazamientos son cero, pero el que está en la dirección de la columna A.B es la deflexión vertical, entonces la deflexión vertical en B también es igual a cero.

Para el caso de la viga B-C, se sabe que el desplazamiento horizontal en B es  $\Delta_{BH}=11.229,062$ ; por lo tanto, en C será igual:  $\Delta_{CH}=11.229,062$

Para determinar el desplazamiento vertical en C, trazamos una tangente en el punto B que se dirija hacia C (figura 2.30).

**Figura 2.30. Tangente en B hacia C en el pórtico del ejemplo 3.4**



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo B-C:

$$(B-C): 0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = 40x - 213,33$$

Como el corte se hizo de izquierda a derecha, la distancia  $x$  que se necesita es de derecha a izquierda, entonces al largo de la viga de B a C, es decir, 4m, se le deberá restar el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

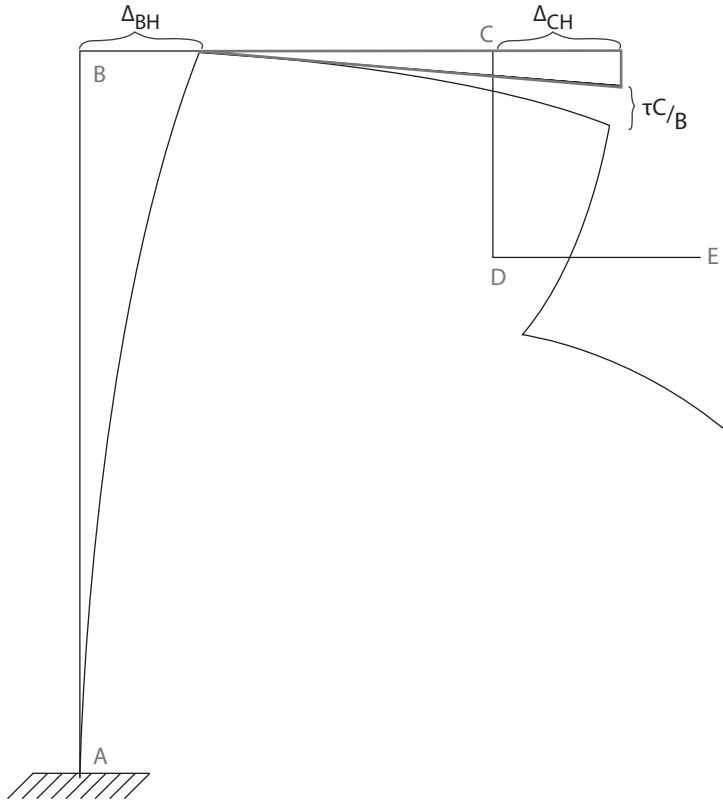
$$\tau_{C/B} = \int_0^4 (40x - 213,33) dx * \left[ 4 - \frac{\int_0^4 (40x - 213,33) x dx}{\int_0^4 (40x - 213,33) dx} \right]$$

$$\tau_{C/B} = -533,32 * \left[ 4 - \frac{-853,3067}{-533,32} \right]$$

$$\tau_{C/B} = -1.279,9733$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.30. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.31).

**Figura 2.31. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.4**



De ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_B = \frac{F}{d_{B-C}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 4 m:

$$2636,64 = \frac{F}{4}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 10.546,16$$

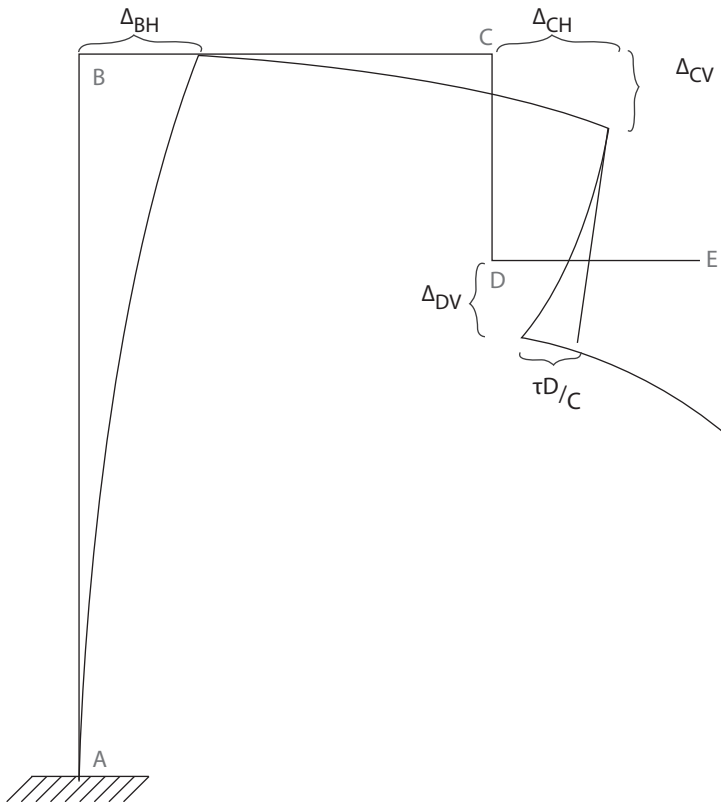
Según la figura 2.31, la deflexión en C es la suma entre F y  $\tau_{C/B}$ ; por lo tanto, la deflexión en C es:

$$\Delta_C = 10.546,16 + 1.279,9733$$

$$\Delta_{CV} = \frac{11.826,13}{EI} \downarrow$$

Aplicando el anterior criterio, de que los desplazamientos en los extremos que estén en la misma dirección de cierto elemento serán iguales, se tiene que la deflexión vertical en C,  $\Delta_{CV}=11826,13 \downarrow$ , será la misma deflexión vertical en el punto D,  $\Delta_{DV}=11826,13 \downarrow$ . Para determinar el desplazamiento horizontal en D, trazamos una tangente en el punto C que se dirija hacia D (figura 2.32).

**Figura 2.32. Tangente en C hacia D en el pórtico del ejemplo 3.4**



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo C-D:

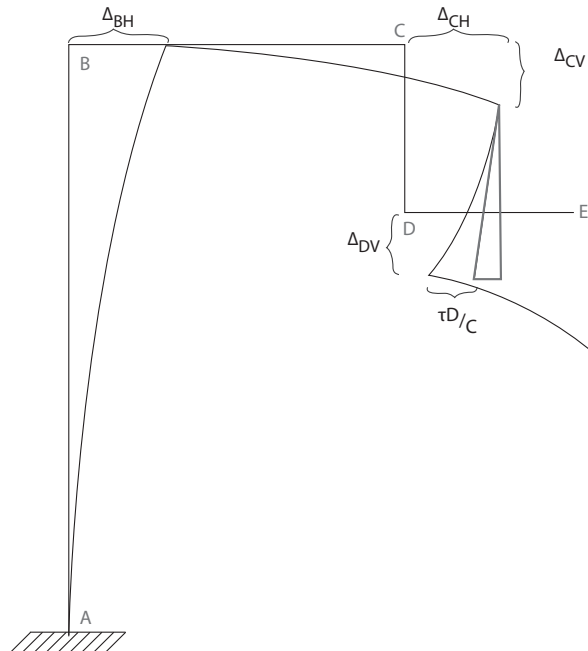
$$(C-D): 0 \leq x \leq 2 \downarrow M(x)_4 = -53,33$$

Como el corte se hizo de arriba hacia abajo, y la distancia  $x$  que se necesita es de abajo hacia arriba, entonces al largo de la columna de C a C, es decir, 2 m, se le deberá restar el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned} \tau_{D/C} &= \int_0^2 (-53,333) dx * \left[ 2 - \frac{\int_0^2 (-53,333) x dx}{\int_0^2 (-53,333) dx} \right] \\ \tau_{D/C} &= -106,66 * \left[ 2 - \frac{-106,66}{-106,66} \right] \\ \tau_{D/C} &= -106,66 \end{aligned}$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está a la derecha de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.32. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.33).

**Figura 2.33. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.4**



Se debe tener en cuenta que el triángulo está inscrito sobre una proyección vertical de la columna C-D; por lo tanto, además de considerar la distancia desde la elástica hasta la columna proyectada, hay que usar la distancia de la deflexión horizontal del punto C para determinar la deflexión horizontal en D.

Se procede así: de ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la columna y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_C = \frac{F}{d_{C-D}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 2 m:

$$3.169,96 = \frac{F}{2}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 6.339,92$$

Para determinar en qué dirección se desplazó el nudo D, hay que establecer qué deflexión es mayor: si la  $\Delta_C$  o la suma de  $\tau_{DC}$  más :

$$\tau_{D/C} + F = 106,66 + 6.339,92$$

$$\tau_{D/C} + F = 6.446,48$$

Como la deflexión horizontal de C,  $\Delta_{CH}=11.229,062$ , es mayor que la suma de  $\tau_{(DC)}$  más F, entonces la deflexión horizontal en D será:

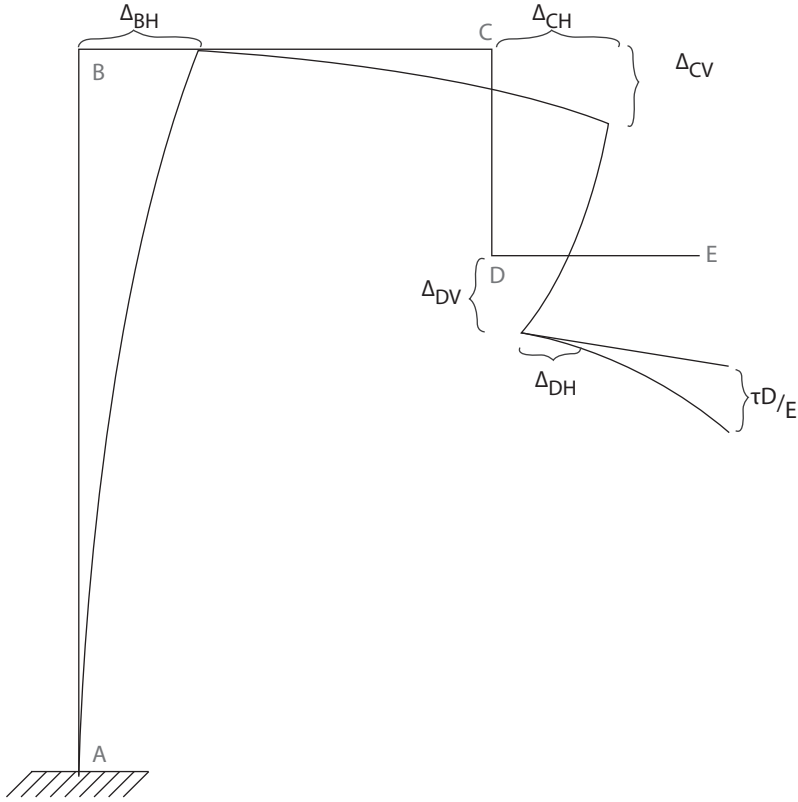
$$\Delta_{DH} = 11.229,062 - 6.446,48$$

$$\Delta_{DH} = \frac{4.782,482}{EI} \rightarrow$$

Aplicando el anterior criterio, de que los desplazamientos en los extremos que estén en la misma dirección de cierto elemento serán iguales, se tiene que la deflexión horizontal en D,  $\Delta_{DH} = 4.782,482 \rightarrow$ , será la misma deflexión horizontal en el punto E,  $\Delta_{EH} = 4.782,482 \rightarrow$ .

Para determinar el desplazamiento vertical en E, trazamos una tangente en el punto D que se dirija hacia E (figura 2.34).

Figura 2.34. Tangente en D hacia E en el pórtico del ejemplo 3.4



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo D-E:

$$(D-E): 0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_2 = -3,33x^3 + 40x - 53,33$$

Como el corte se hizo de izquierda a derecha, la distancia  $x$  que se necesita es de derecha a izquierda, entonces al largo de la viga de D a E, es decir, 2 m, se le deberá restar el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

$$\tau_{E/D} = \int_0^2 (-3,33x^3 + 40x - 53,33) dx * \left[ 2 - \frac{\int_0^2 (-3,33x^3 + 40x - 53,33) x dx}{\int_0^2 (-3,33x^3 + 40x - 53,33) dx} \right]$$

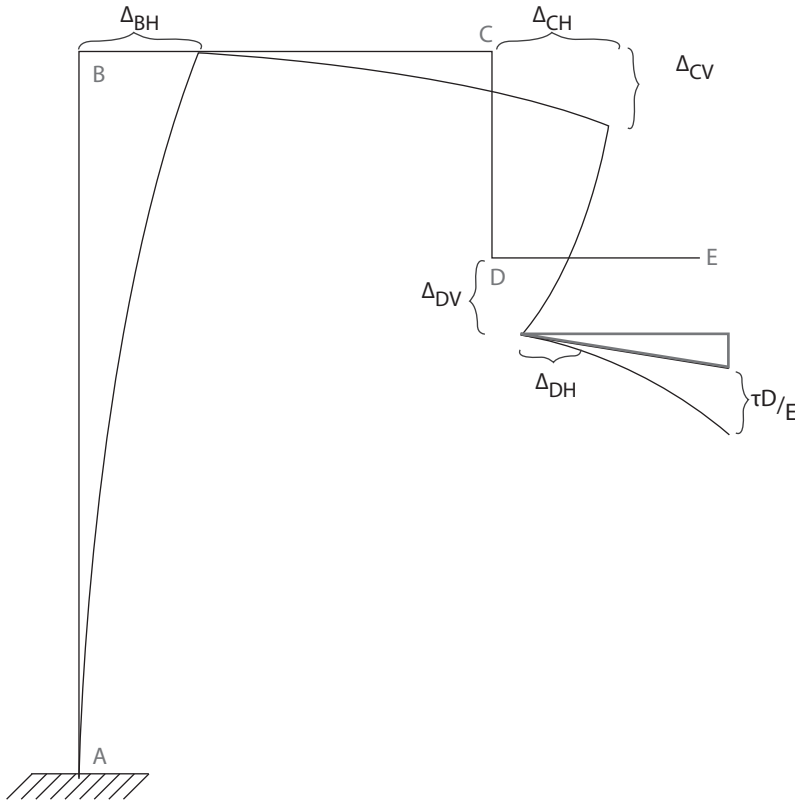
$$\tau_{E/D} = -39,993 * \left[ 2 - \frac{-21,3267}{-39,993} \right]$$

$$\tau_{E/D} = -58,66$$



El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.34. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.35).

**Figura 2.35. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.4**



Se debe tener en cuenta que el triángulo está inscrito sobre una proyección horizontal de la viga D-E. Por lo tanto, además, de tener en cuenta la distancia desde la elástica hasta la viga proyectada, hay que usar la distancia de la deflexión vertical del punto D para determinar la deflexión vertical en E.

Se procede así: de ese triángulo rectángulo con oremos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_D = \frac{F}{d_{D-E}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 2 m:

$$3.276,62 = \frac{F}{2}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 6.552,04$$

Para determinar cuánto se desplazó verticalmente el nudo E, se analiza la gráfica, la cual nos indica que la deflexión es la suma del desplazamiento vertical en D, F y  $\tau_{ED}$ . Por lo tanto, la deflexión vertical en E será:

$$\Delta_{EV} = 11.826,13 + 6.552,04 + 58,66$$

$$\Delta_{EV} = \frac{18.436,83}{EI} \downarrow$$

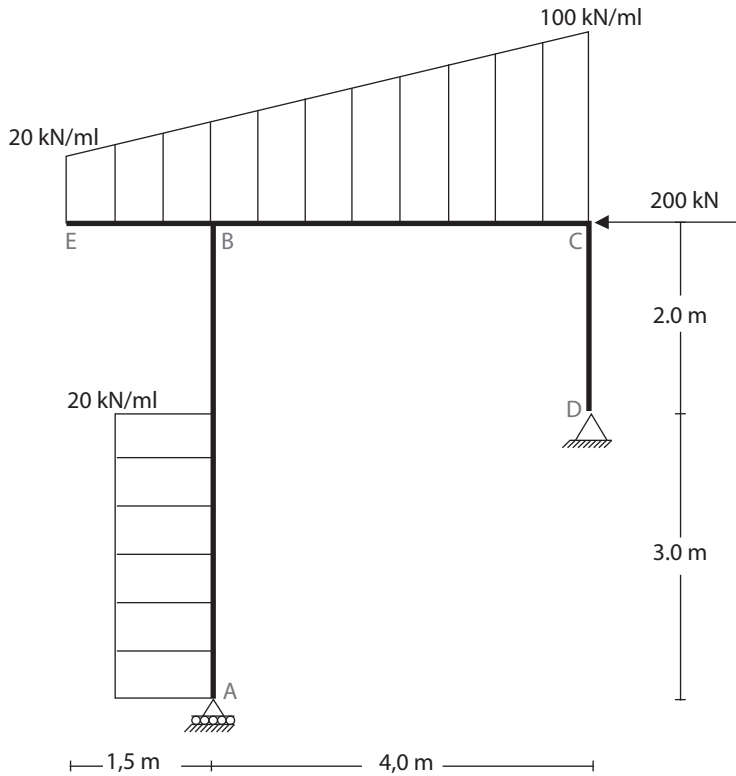
En resumen, los desplazamientos en E (horizontal y vertical) son:

$$\Delta_{EV} = \frac{18.436,83}{EI} \downarrow; \Delta_{EH} = \frac{4.782,482}{EI} \rightarrow$$

### Ejemplo 3.5.

Determinar todos los giros del pórtico de la figura 2.36, la deflexión horizontal y vertical en el punto E y la deflexión horizontal en A. Tenga en cuenta que este pórtico es el mismo que se solucionó estáticamente en el inciso 1.7.5 de la presente guía.

Figura 2.36. Pórtico del ejemplo 3.5



Trayendo las ecuaciones de momentos y suponiendo una elástica:

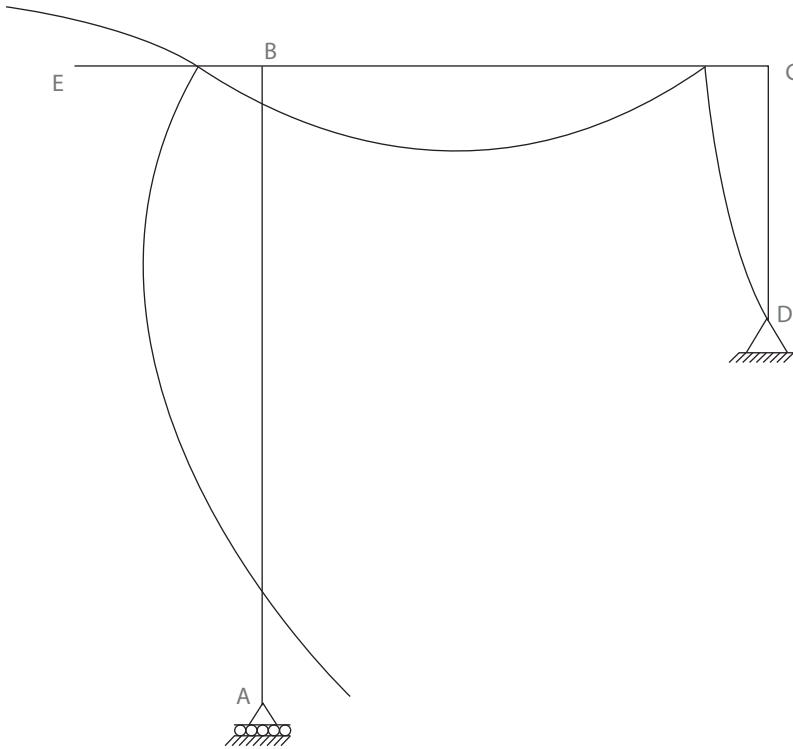
$$(A-B): 0 \leq x \leq 3 \uparrow M(x)_1 = 10x^2$$

$$(A-B): 3 \leq x \leq 5 \uparrow M(x)_2 = 60x - 90$$

$$(C-D): 0 \leq x \leq 2 \uparrow M(x)_3 = 140x$$

$$(E-B): 0 \leq x \leq 1,5 \rightarrow M(x)_4 = -2,424x^3 - 10x^2$$

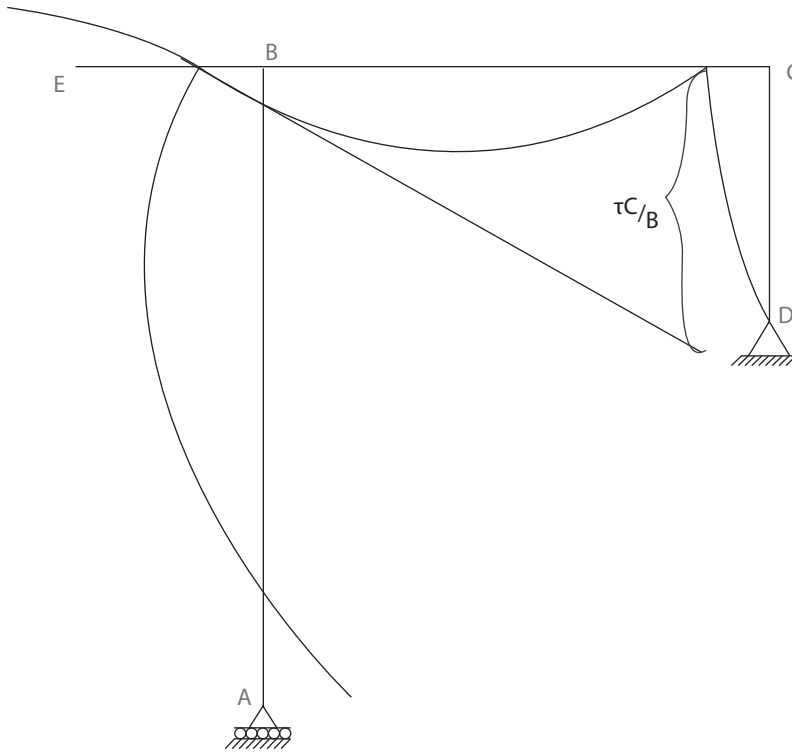
$$(B-C): 0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608$$

**Figura 2.37. Posible deformada del pórtico del ejemplo 3.5**

Para aplicar el segundo teorema, empezaremos en el tramo donde conozcamos más desplazamientos, sabiendo que estos deben ser perpendiculares al elemento.

En la viga B-C conocemos que las deflexiones en los dos apoyos es cero, es decir, en B y en C se conocen las deformaciones. Por lo tanto, empezaremos en este tramo trazando una línea tangente a la elástica supuesta en el punto B, y situaremos el  $\tau$  en el punto C (figura 2.38).

Figura 2.38. Tangente en B hacia C en el pórtico del ejemplo 3.5



$$\tau_{C/B} = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx * (x)$$

Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo B-C:

$$(B-C): 0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608$$

Como el corte se hizo de izquierda a derecha, la distancia  $x$  que se necesita es de derecha a izquierda, entonces al largo de la viga de B a C, es decir, 4 m, se le deberá restar el valor del centroide del diagrama de momentos, tal y como se aprecia a continuación:

$$\tau_{C/B} = \int_0^4 (-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240,61) dx$$

$$* \left[ 4 - \frac{\int_0^4 (-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240,61) x dx}{\int_0^4 (-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240,61) dx} \right]$$

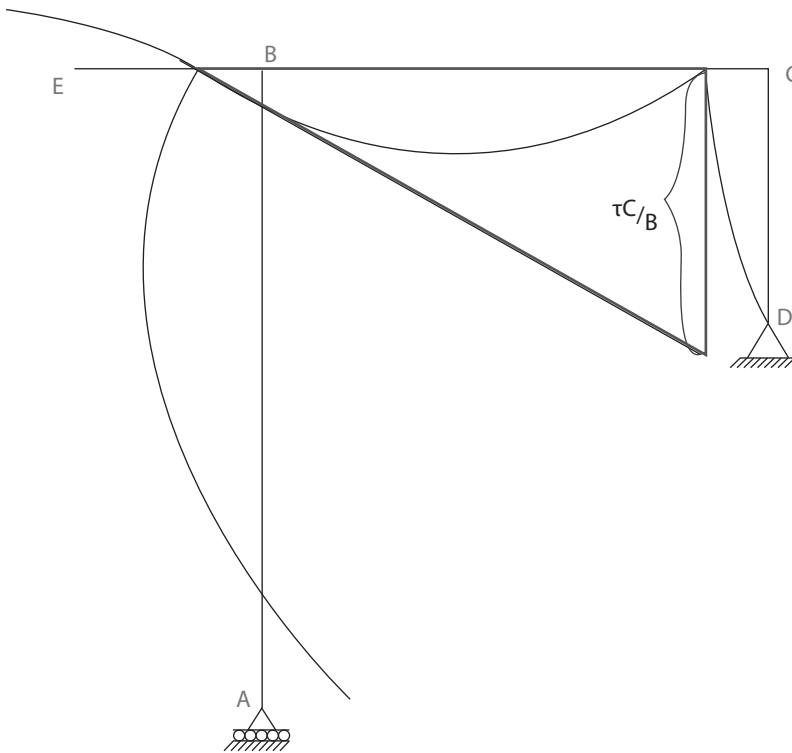
Solucionando la integral, se tiene:

$$\tau_{C/B} = 456,98 * \left[ 4 - \frac{1.628,8128}{456,98} \right]$$

$$\tau_{C/B} = 199,11$$

El  $\tau$  dio positivo, por lo que la tangente está por debajo de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.39.

**Figura 2.39. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5**



Además, podemos observar que la elástica en el punto C pasa justo por la viga, ya que allí se impide el desplazamiento, es decir, el  $\tau_{CB}$  también es la distancia entre la tangente y la viga, inscribiendo así un triángulo rectángulo formado por estos dos y el  $\tau_{CB}$ . Se puede determinar el giro de B, por geometría, así:

$$\theta_B = \frac{\tau_{C/B}}{d_{B-C}}$$

Siendo  $d_{B,C}$  la distancia de B a C:

$$\theta_B = \frac{199,11}{4}$$

$$\theta_B = \frac{49,78}{EI} \text{ horario}$$

Teniendo uno de los giros, ya podemos usar el primer teorema del área-momento para determinar los otros.

*Primer teorema:*

$$\theta_A - \theta_B = \int_A^B \left( \frac{M(x)_{A-B}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que en las columnas el nudo de arriba es el inicial y el de abajo es el final.

Anteriormente se determinó que  $\theta_B = -49,78$ , y las ecuaciones de momentos son:

$$(A-B): 0 \leq x \leq 3 \uparrow M(x)_1 = 10x^2$$

$$(A-B): 3 \leq x \leq 5 \uparrow M(x)_2 = 60x - 90$$

Reemplazando se obtiene:

$$\theta_A - (-49,78) = \int_0^3 (10x^2) dx + \int_3^5 (60x - 90) dx$$

Solucionando la integral, y despejando  $\theta_B$ , se obtiene:

$$\theta_A = \frac{340,22}{EI} \text{ antihorario}$$

Recuerde que para el primer teorema los signos negativos equivalen a giros horarios, y los positivos, a giros antihorarios.

$$\theta_C - \theta_B = \int_B^C \left( \frac{M(x)_{B-C}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que el giro  $\theta_B = -49,78$  y la ecuación de momento en este tramo es:

$M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608$ , reemplazando, se tiene:

$$\theta_c - (-49,78) = \int_0^4 (-2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608) dx$$

Solucionando la integral, y despejando  $\theta_c$ , se obtiene:

$$\theta_c = \frac{407,16}{EI} \text{ antihorario}$$

$$\theta_D - \theta_C = \int_C^D \left( \frac{M(x)_{C-D}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que el giro  $\theta_C = 407,16$  y la ecuación de momento en este tramo es  $M(x)_3 = 140x$ , reemplazando, se tiene:

$$\theta_D - (407,16) = \int_0^2 (140x) dx$$

Solucionando la integral, y despejando  $\theta_D$ , se obtiene:

$$\theta_D = \frac{687,16}{EI} \text{ antihorario}$$

$$\theta_B - \theta_E = \int_E^B \left( \frac{M(x)_{B-E}}{EI} \right) dx$$

Sabiendo que el giro  $\theta_B = -49,78$  y la ecuación de momento en este tramo es  $M(x)_4 = -2,424x^3 - 10x^2$ , reemplazando, se tiene:

$$(-49,78) - \theta_E = \int_0^{1,5} (-2,424x^3 - 10x^2) dx$$

Solucionando la integral, y despejando  $\theta_E$ , se obtiene:

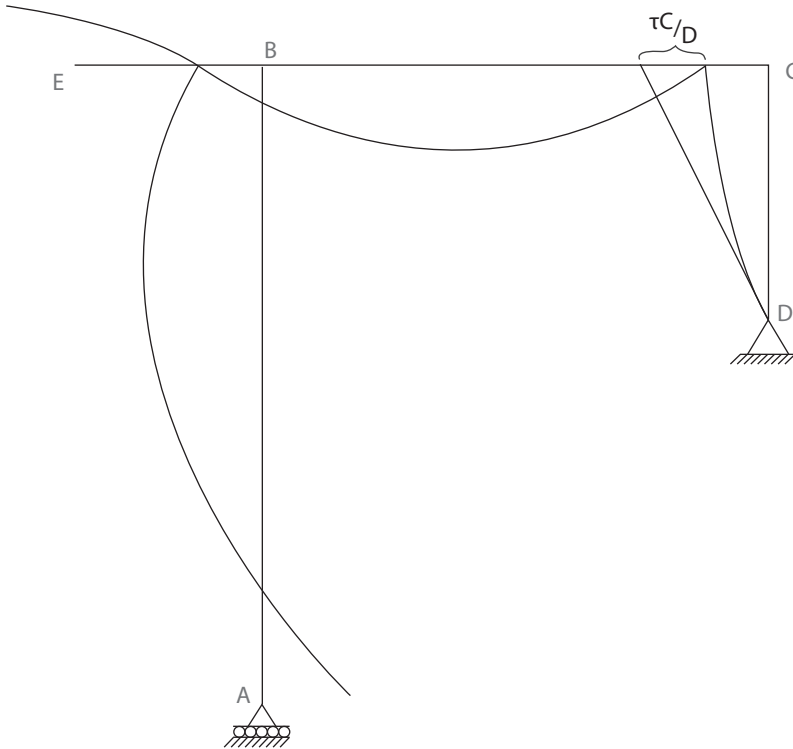
$$\theta_E = \frac{35,46}{EI} \text{ horario}$$

Pasando ahora al segundo teorema, para hallar desplazamientos se empieza por el tramo donde tengamos menos incógnitas. En este caso contamos con los tramos C-D y E-B: en el tramo C-D nos falta conocer el desplazamiento horizontal en C,



y en el tramo EB nos falta conocer el desplazamiento vertical y el horizontal en E. No obstante, por el criterio de la rigidez de los elementos, si determinamos la deflexión horizontal en C, inmediatamente conoceríamos la deflexión horizontal en E, por lo que empezaremos por el tramo C-D. Se traza una línea tangente en el punto D hacia C (figura 2.40).

**Figura 2.40. Tangente en D hacia C en el pórtico del ejemplo 3.5**



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo CD:

$$(C-D): 0 \leq x \leq 2 \uparrow M(x)_3 = 140x$$

Como el corte se hizo hacia arriba y el valor de  $x$  se necesita hacia abajo, entonces es necesario ajustarlo restando a la longitud de la columna el valor del centroide del diagrama de momentos.

Reemplazando en la ecuación del segundo teorema:

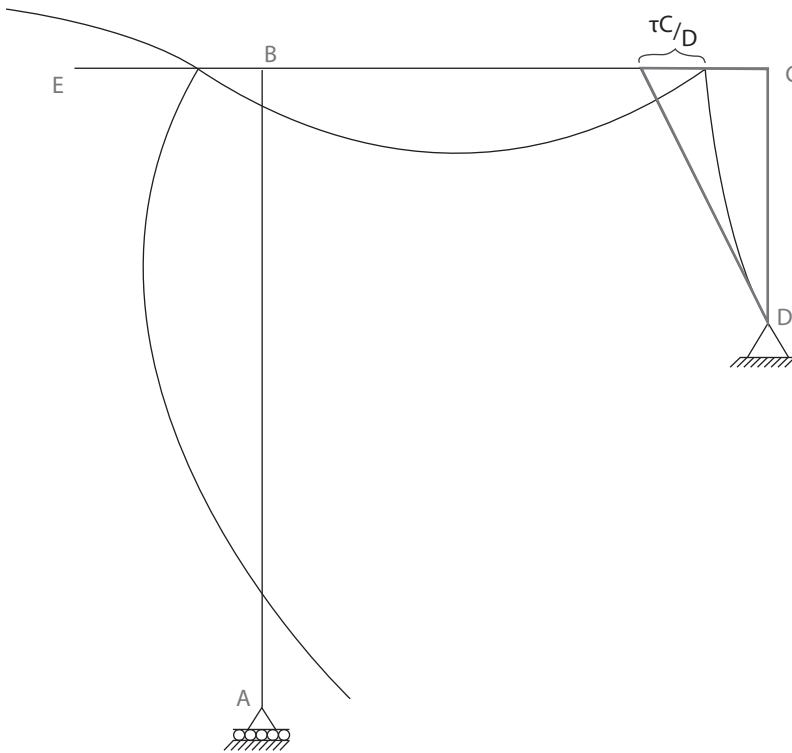
$$\tau_{C/D} = \int_0^2 (140x) dx \left[ 2 - \frac{\int_0^2 (140x)x dx}{\int_0^2 (140x) dx} \right]$$

$$\tau_{C/D} = 280 * \left[ 2 - \frac{373,33}{280} \right]$$

$$\tau_{C/D} = 186,67$$

Como  $\tau$  es positivo, la tangente está a la izquierda de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.40. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.41).

**Figura 2.41. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5**



De ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la columna y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_D = \frac{F}{d_{C-D}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 2 m:

$$687,16 = \frac{F}{2}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 1.374,32$$

Según la figura 2.41, la deflexión en C es F menos  $\tau_{CD}$ ; por lo tanto, la deflexión en C es:

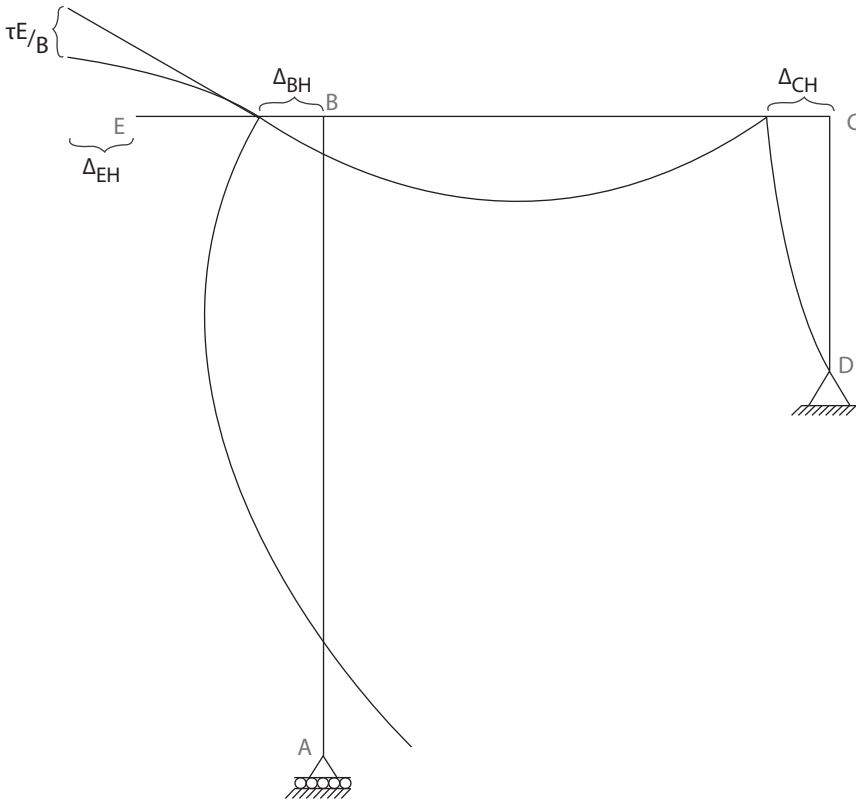
$$\Delta_C = 1.374,32 - 186,67$$

$$\Delta_{CH} = \frac{1.187,65}{EI} \leftarrow$$

Aplicando el anterior criterio, de que los desplazamientos en los extremos que estén en la misma dirección de cierto elemento serán iguales, se tiene que la deflexión horizontal en C,  $\Delta_{CH}=1.187,65 \leftarrow$ , será la misma deflexión horizontal en el punto B,  $\Delta_{BH}=1.187,65 \leftarrow$ , y la misma en el punto E,  $\Delta_{EH}=1.187,65 \leftarrow$ .

Para determinar el desplazamiento vertical en E, trazamos una tangente en el punto B que se dirija hacia E (figura 2.42).

Figura 2.42. Tangente en B hacia E en el pórtico del ejemplo 3.5



Traemos la ecuación y la dirección del corte del tramo E-B:

$$(E-B): 0 \leq x \leq 1,5 \rightarrow M(x)_4 = -2,424x^3 - 10x^2$$

La dirección del corte coincide con la dirección de la  $x$  necesaria; por lo tanto, no se necesita hacer ningún ajuste:

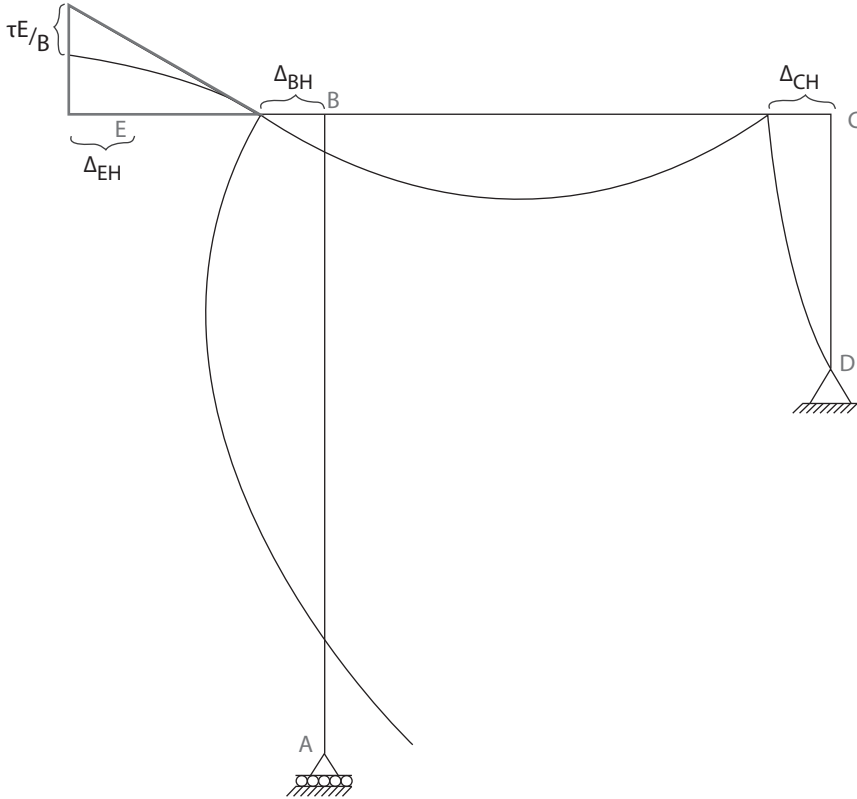
$$\tau_{E/B} = \int_0^{1,5} (-2,424x^3 - 10x^2) dx * \left[ \frac{\int_0^{1,5} (-2,424x^3 - 10x^2) x dx}{\int_0^{1,5} (-2,424x^3 - 10x^2) dx} \right]$$

$$\tau_{E/B} = -16,34$$

El  $\tau$  dio negativo, por lo que la tangente está por encima de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.42. No obstante, observamos que ese valor no equivale a

la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.43).

**Figura 2.43. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5**



Se debe tener en cuenta que el triángulo está inscrito sobre una proyección horizontal de la viga E-B; por lo tanto, además de considerar la distancia desde la elástica hasta la viga proyectada, hay que usar la distancia de la deflexión vertical del punto B para determinar la deflexión vertical en E.

Se procede así: de ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_B = \frac{F}{d_{E-B}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 1,5 m:

$$49,78 = \frac{F}{1,5}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 74,67$$

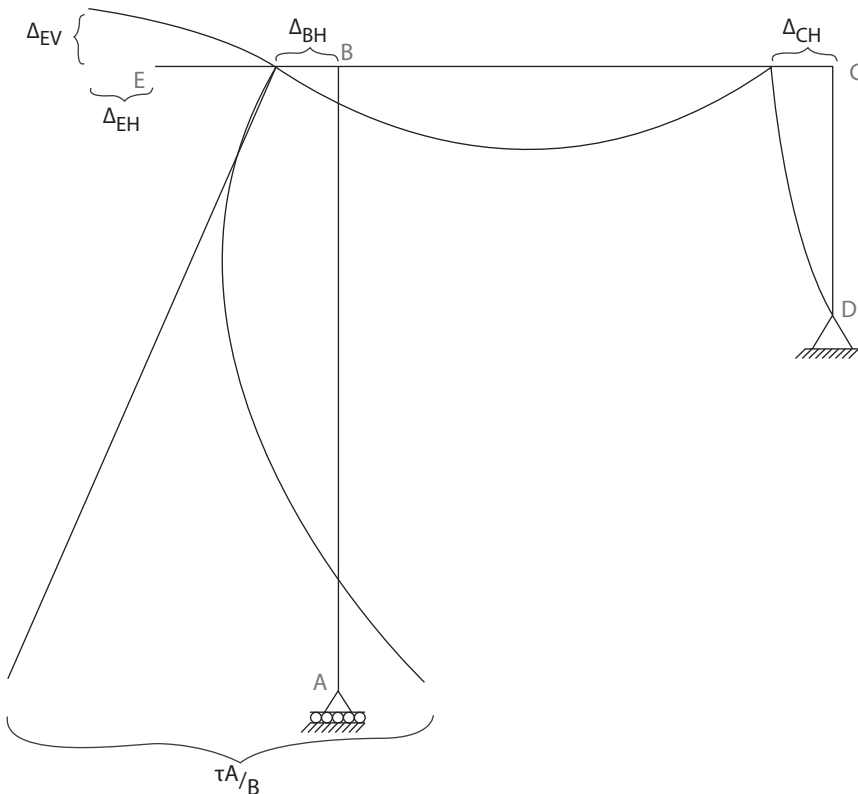
Para determinar cuánto se desplazó verticalmente el nudo E, se analiza la gráfica, la cual nos indica que la deflexión es F menos  $\tau_{E,B}$ . Por lo tanto, la deflexión vertical en E será:

$$\Delta_{EV} = 74,67 - 16,34$$

$$\Delta_{EV} = \frac{58,33}{EI} \uparrow$$

Para determinar el desplazamiento horizontal en A, trazamos una tangente en el punto B que se dirija hacia A (figura 2.44).

**Figura 2.44. Tangente en B hacia A en el pórtico del ejemplo 3.5**



Traemos las ecuaciones y la dirección del corte del tramo A-B:

$$(A-B): 0 \leq x \leq 3 \uparrow M(x)_1 = 10x^2$$

$$(A-B): 3 \leq x \leq 5 \uparrow M(x)_2 = 60x - 90$$

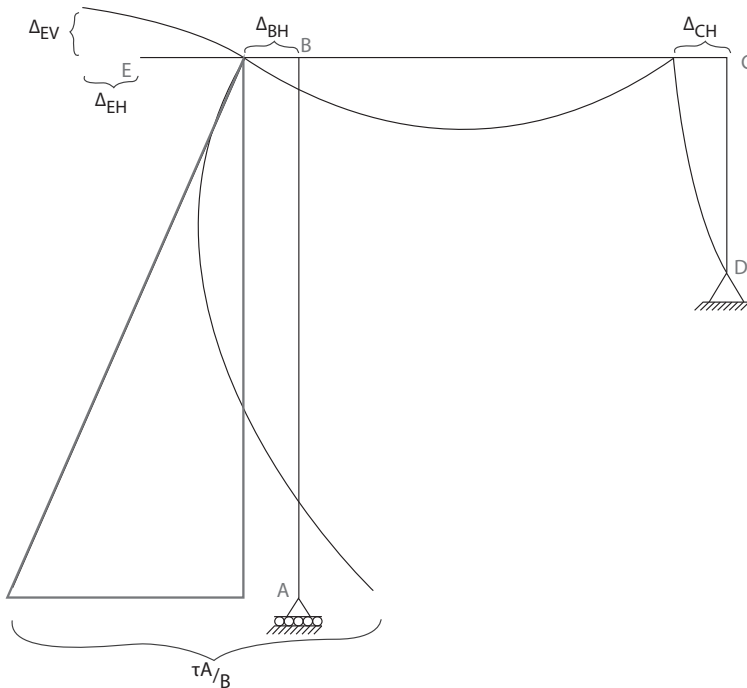
La dirección del corte coincide con la dirección de la x necesaria; por lo tanto, no se necesita hacer ningún ajuste:

$$\tau_{A/B} = \int_0^3 (10x^2) dx * \left[ \frac{\int_0^3 (10x^2) x dx}{\int_0^3 (10x^2) dx} \right] + \int_3^5 (60x - 90) dx * \left[ \frac{\int_3^5 (60x - 90) x dx}{\int_3^5 (60x - 90) dx} \right]$$

$$\tau_{A/B} = 1.442,5$$

El  $\tau$  dio positivo, por lo que la tangente está a la izquierda de la elástica, tal y como se aprecia en la figura 2.44. No obstante, observamos que ese valor no equivale a la deformación verdadera, por lo que se aplica la geometría para poder hallarlo (figura 2.45).

**Figura 2.45. Triángulo inscrito en el pórtico del ejemplo 3.5**



De ese triángulo rectángulo conocemos el ángulo y la distancia, por lo que podemos determinar la distancia entre la viga y la tangente, a la cual llamaremos "F". Aplicando geometría, tenemos:

$$\theta_B = \frac{F}{d_{A-B}}$$

En este caso no nos interesa el signo del giro; solo el valor y la distancia del tramo, que es de 5 m:

$$49,78 = \frac{F}{5}$$

Despejando F, tenemos:

$$F = 248,9$$

Se pudo comprobar que la suma del desplazamiento horizontal en B más F,  $\Delta_{BH} + F = 1.436,55$ , es menor que  $\tau_{AB} = 1.442,5$ , por lo que el desplazamiento horizontal en A será, por geometría:

$$\Delta_{BH} + F = 1.187,65 + 248,9$$

$$\Delta_{BH} + F = 1.436,55$$

### **2.3.3. Método de la viga conjugada**

Este método consiste en cambiar el problema de encontrar las pendientes y deflexiones causadas en una viga por un sistema de cargas aplicadas por otro en que se averiguan las fuerzas de corte y momentos de una viga especial, llamada viga conjugada, que está cargada con el diagrama de momentos  $M(x)/EI$  de la viga original (Uribe, 2000).

En relación con el método de área-momentos, el de viga conjugada tiene la ventaja de que no necesita conocer previamente un punto de tangente cero y, por consiguiente, en todos los casos se puede averiguar directamente la pendiente y deflexión de cualquier punto de la elástica.

Para la solución de giros y deflexiones por el método de la viga conjugada es necesario realizar una viga especial, la cual estará atada a la viga original. En cuanto a los apoyos y condiciones de soporte de la viga original, se transformarán tal como se reseña en la tabla 2.1.



**Tabla 2.1. Condiciones de apoyo**

<b>Condiciones apoyo</b>	<b>1/2</b>
<b>Viga original</b>	<b>Viga conjugada</b>
<b>Condiciones de apoyo</b>	<b>2/2</b>
<b>Viga original</b>	<b>Viga conjugada</b>

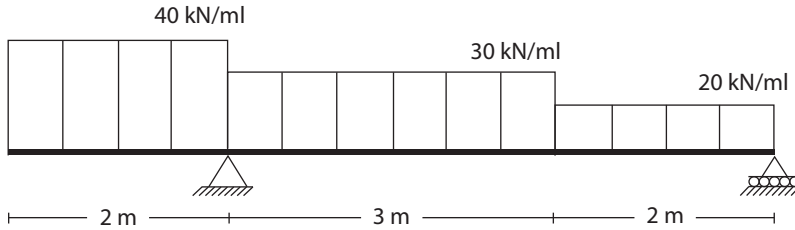
Según el tipo de apoyo o soporte que exista en la viga original, se modificará según lo mostrado en la tabla para realizar la viga conjugada. En cuanto a las cargas que soportará la viga conjugada, equivalen al diagrama de momentos de la viga original.

### 2.3.4. Ejercicios resueltos: viga conjugada

#### Ejemplo 4.1

Determinar los giros y deflexiones en el extremo del voladizo, sobre los apoyos y en el momento máximo de la luz de la viga de la figura 2.46.

Figura 2.46. Viga del ejemplo 4.1



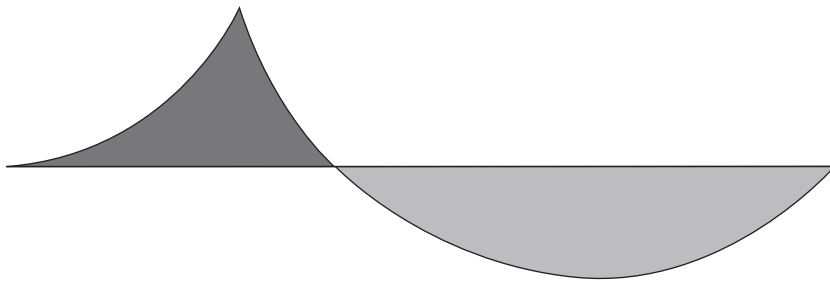
Observamos que esta es la misma viga solucionada estáticamente en el inciso 1.7.1 de la presente guía. Por lo tanto, traeremos las ecuaciones y el diagrama de momentos:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -20x^2$$

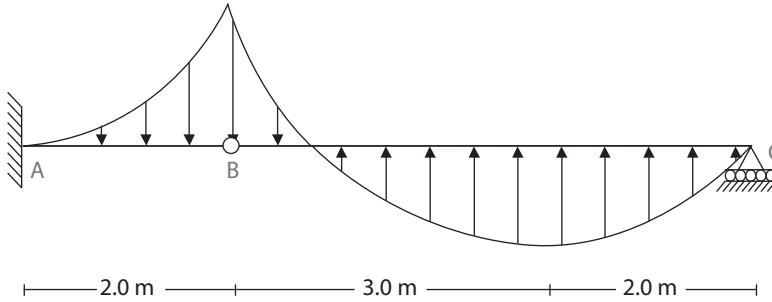
$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$5 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

Figura 2.47. Diagrama de momentos de la viga del ejemplo 4.1



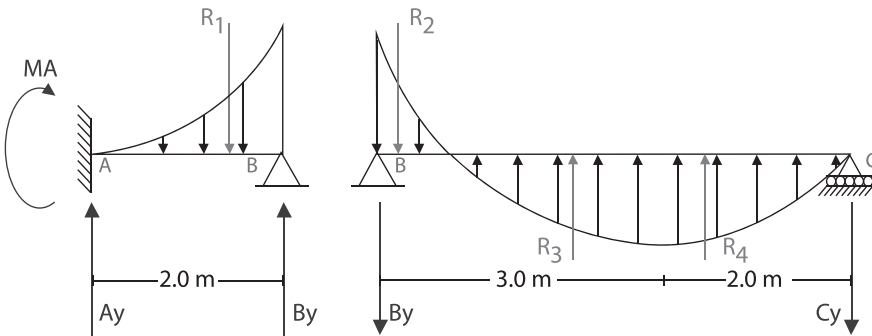
Se realiza la viga conjugada siguiendo las condiciones de apoyo de la tabla, y se carga con el anterior diagrama de momentos (figura 2.48).

**Figura 2.48. Viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1**

El voladizo A pasó a ser empotramiento, el apoyo B pasó a ser una articulación, y el apoyo en C se mantiene igual.

Las cargas de la viga ahora son funciones, y estas no son otra cosa que las ecuaciones de momentos, las cuales son tres: la primera de 0 a 2, la segunda de 2 a 5, y la tercera de 5 a 7.

Para empezar a solucionar separamos las dos vigas, las cuales están unidas por la articulación, tal como se observa en la figura 2.49.

**Figura 2.49. Viga conjugada separada por efecto de la articulación de la viga del ejemplo 4.1**

Para determinar las resultantes de las cargas distribuidas, se utiliza lo definido en el inciso 1.5, en el cual se explicaba que la resultante de una carga distribuida como una función se halla con la integral definida entre los dos puntos.

Aunque el corte  $2 \leq x \leq 5$  está definido por una sola ecuación, se aprecia que en este tramo el diagrama de momentos (carga distribuida para el caso de la viga conjugada) pasa por cero y cambia la dirección. Esto nos indica que debemos determinar dos restantes distintas, lo cual se hará con la misma ecuación pero con distintos límites. Puesto que solo conocemos los límites del corte, que son 2 y 5, lo

que haremos será buscar el valor de  $x$  por el cual la función pasa por cero, y esto se determina igualando a cero la función así:

$$\begin{aligned} M(x) &= -15x^2 + 147x - 314 = 0 \\ -15x^2 + 147x - 314 &= 0 \end{aligned}$$

Vemos que es una función cuadrática. Por lo tanto, nos dará dos soluciones, las cuales son:

$$x = \begin{cases} 6,654 \\ 3,146 \end{cases}$$

El valor que satisface la ecuación en el tramo es  $x = 3,146$ .

Hallando las resultantes, tenemos:

$$R_1 = \int_0^2 (-20x^2) dx$$

$$R_1 = 53,33 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_2 = \int_2^{3,146} (-15x^2 + 147x - 314) dx$$

$$R_2 = 42,08 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_3 = \int_{3,146}^5 (-15x^2 + 147x - 314) dx$$

$$R_3 = 58,58 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_4 = \int_5^7 (-10x^2 + 97x - 189) dx$$

$$R_4 = 59,33 \text{ kN} \uparrow$$

Ahora determinamos los centroides, o las distancias a las cuales están ubicadas las resultantes. Tenga en cuenta que el  $\bar{x}$  de la primera viga será a partir de cero y, por lo tanto, ese será el centroide real, pero para las otras tres resultantes que están en la segunda parte de la viga los centroides obtenidos serán valores después de dos, que es la distancia de la primera parte de la viga, ya que las ecuaciones

de momentos se tomaron desde el inicio de la viga original. Por esta razón, los  $\bar{x}$  serán hallados restando dos al valor que dé por integrales así:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 (-20 x^2) x dx}{\int_0^2 (-20 x^2) dx}$$

$$\bar{x}_1 = 1,5 m$$

$$\bar{x} = \frac{\int_2^{3,146} (-15 x^2 + 147 x - 314) x dx}{\int_2^{3,146} (-15 x^2 + 147 x - 314) dx} - 2$$

$$\bar{x}_2 = 0,36 m$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{3,146}^5 (-15 x^2 + 147 x - 314) x dx}{\int_{3,146}^5 (-15 x^2 + 147 x - 314) dx} - 2$$

$$\bar{x}_3 = 2,29 m$$

$$\bar{x} = \frac{\int_5^7 (-10 x^2 + 97 x - 189) x dx}{\int_5^7 (-10 x^2 + 97 x - 189) dx} - 2$$

$$\bar{x}_4 = 3,74 m$$

Para hallar las reacciones  $B_y$  y  $C_y$  del segundo tramo de la viga, se resuelve estáticamente como se aprendió en el capítulo 1 de la presente guía.

La *sumatoria de momentos positivos* antihorarios o en contra del movimiento de las manecillas del reloj es:

$$+\mathcal{U}\Sigma M_B = -(42,08 \text{ kN} \cdot 0,36 \text{ m}) + (58,58 \text{ kN} \cdot 2,29 \text{ m}) + (59,33 \text{ kN} \cdot 3,74 \text{ m}) - C_y \cdot (5) = 0$$

$$-(42,08 \text{ kN} \cdot 0,36 \text{ m}) + (58,58 \text{ kN} \cdot 2,29 \text{ m}) + (59,33 \text{ kN} \cdot 3,74 \text{ m}) - C_y \cdot (5) = 0$$

Despejando  $C_y$  de la ecuación, tenemos:

$$C_y = 68,18 \text{ kN} \downarrow$$

Para la sumatoria de fuerzas solo existen fuerzas verticales; por lo tanto, se hará sumatoria de fuerzas en “y”, positivas en dirección hacia arriba:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -B_y - 42,08 + 58,58 + 59,33 - 68,18 = 0$$

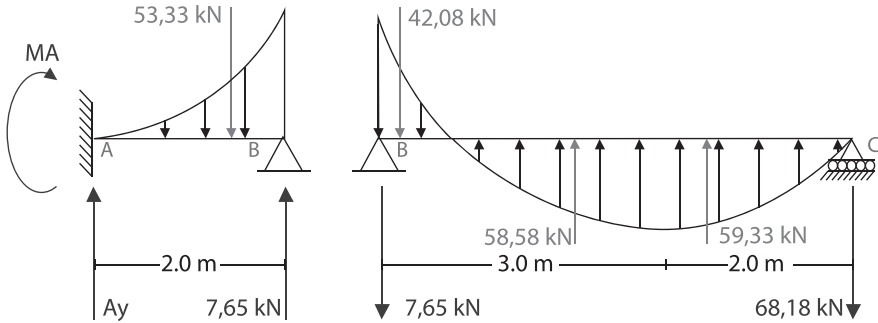
$$-B_y - 42,08 \text{ kN} + 58,58 \text{ kN} + 59,33 \text{ kN} - 68,18 \text{ kN} = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, tenemos:

$$B_y = 7,65 \text{ kN} \downarrow$$

El valor de  $B_y$  se traslada a la primera parte de la viga, con el mismo signo, pero con sentido contrario.

**Figura 2.50. Resultantes y reacciones de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1**



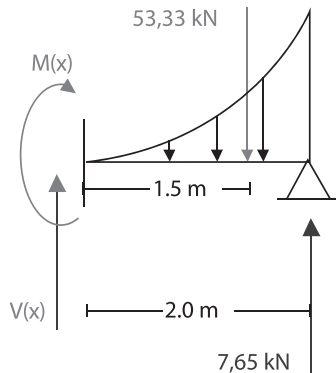
Para determinar los giros y deflexiones, se harán cortes en los lugares donde se necesite calcular esos desplazamientos. Así, el cortante  $V(x)$  será el giro ( $\theta$ ), y el momento  $M(x)$  será la deflexión ( $\Delta$ ). Las direcciones que tomarán el cortante y el momento en donde se corta serán las mismas aplicadas en la solución estática que se explicó anteriormente en esta misma guía.

En cuanto a la convención de signos: si  $V(x)$  da positivo, el giro  $\theta$  será antihorario, y si da negativo, será horario; por otro lado, si  $M(x)$  da positivo, la deflexión  $\Delta$  irá hacia arriba  $\uparrow$  y, por el contrario, si da negativa, irá hacia abajo  $\downarrow$ .

***Deflexión y giro en el punto A***

Anteriormente no se hallaron las reacciones en A, ya que no era necesario para determinar las deformaciones. Para este método el corte no se hace como una variación de la longitud, sino que  $x$  en este caso tendrá un valor numérico, que para el corte será 2 m:  $x=2$ .

**Figura 2.51. Corte en A de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1**



La sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = (7,65 \cdot 2) - (53,33 \cdot 1,5) - M(2) = 0$$

$$(7,65 \cdot 2) - (53,33 \cdot 1,5) - M(2) = 0$$

Despejando  $M(2)$ , tenemos:

$$M(2) = -64,70$$

Lo que indica que:

$$\Delta_A = \frac{64,70}{EI} \downarrow$$

La sumatoria de fuerzas:

$$+\uparrow \Sigma F_y = V(2) - 53,33 + 7,65 = 0$$

$$V(2) - 53,33 + 7,65 = 0$$

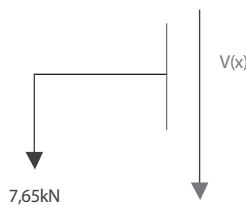
Despejando  $V(2)$ , tenemos:

$$V(2) = 45,68$$

Lo que indica que:

$$\theta_A = \frac{45,68}{EI} \text{ antihorario}$$

**Figura 2.52. Corte en B de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1**



Cuando cortamos en un punto donde solo se tiene una fuerza, se debe tener en cuenta que, como se está haciendo el corte justo sobre el punto, la distancia desde la fuerza hasta el corte será cero. Por lo tanto, la sumatoria de momentos será:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = (7,65 \cdot 0) + M(0) = 0$$

Despejando  $M(0)$ , se tiene que:

$$M(0) = 0$$

Esto indica que en ese punto no hay desplazamiento, lo cual es cierto y se puede deducir desde el inicio ya que, en la viga original, en este punto existe un apoyo que impide la deflexión.

La *sumatoria de fuerzas* es:

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y &= -V(0) - 7,65 = 0 \\ -V(0) - 7,65 &= 0 \end{aligned}$$

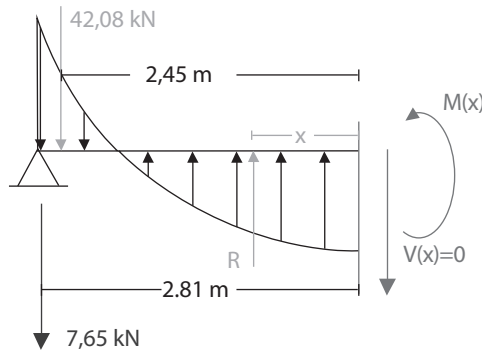
Despejando  $V(0)$ , tenemos:

$$V(0) = -7,65$$

Lo que indica que:

$$\theta_B = \frac{7,65}{EI} \text{ horario}$$

**Figura 2.53. Corte en x de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.1**



La deflexión máxima de la luz se determina cuando el giro es nulo; en este caso, cuando el cortante es igual a cero. Por lo tanto, para hallar a qué distancia desde B está ubicada la deflexión máxima, se iguala la ecuación de cortante a cero como se observa enseguida.

Para la *sumatoria de fuerzas*, primero se determina la resultante por medio de integrales suponiendo que está en el tramo del segundo corte; de no ser así, se procede a hacerse con el tercer corte:

$$\begin{aligned} R &= \int_{3,146}^x (-15x^2 + 147x - 314) dx \\ &= -5x^3 + 73,5x^2 - 314x \end{aligned}$$



Definida entre 3,146 y  $x$ , resolviendo se tiene que:

$$-5x^3 + 73,5x^2 - 314x + 366,35 = 0$$

Hallando las tres posibles soluciones de  $x$ :

$$x = \begin{cases} 7,983 \\ 4,81 \\ 1,91 \end{cases}$$

El valor debe estar entre 3,146 y 5, por lo que  $x = 4,81$  cumple con la condición. Sabiendo que este valor es para el segundo tramo de la viga, el valor del corte es 2,81, ya que los otros 2 m pertenecen al primer tramo, tal como se aprecia en la figura 2.53.

Determinando el valor de la resultante y el centroide:

$$R = \int_{3,146}^{4,81} (-15x^2 + 147x - 314) dx$$

$$R = 49,82 \text{ kN } \uparrow$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{3,146}^{4,81} (-15x^2 + 147x - 314)x dx}{\int_{3,146}^{4,81} (-15x^2 + 147x - 314) dx} - 2$$

$$\bar{x} = 2,19 \text{ m}$$

Desde el corte sería:

$$\bar{x} = 2,81 - 2,19$$

$$\bar{x} = 0,62 \text{ m}$$

La *sumatoria de momentos* es:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_x = M(2,81) - (49,82 \cdot 0,62) + (42,08 \cdot 2,45) + (7,65 \cdot 2,81) = 0$$

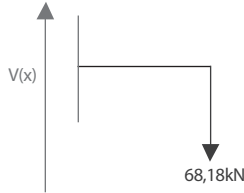
$$M(2,81) - (49,82 \cdot 0,62) + (42,08 \cdot 2,45) + (7,65 \cdot 2,81) = 0$$

Despejando  $M(2,81)$ , se tiene:

$$M(2,81) = -93,70$$

Lo que indica que:

$$\Delta_{MÁX} = \frac{93,70}{EI} \downarrow$$

**Figura 2.54. Corte en C de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.1**

Como se demostró anteriormente, el desplazamiento en este punto es cero.

La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = V(0) - 68,18 = 0$$

$$V(0) - 68,18 = 0$$

Despejando  $V(0)$ , tenemos:

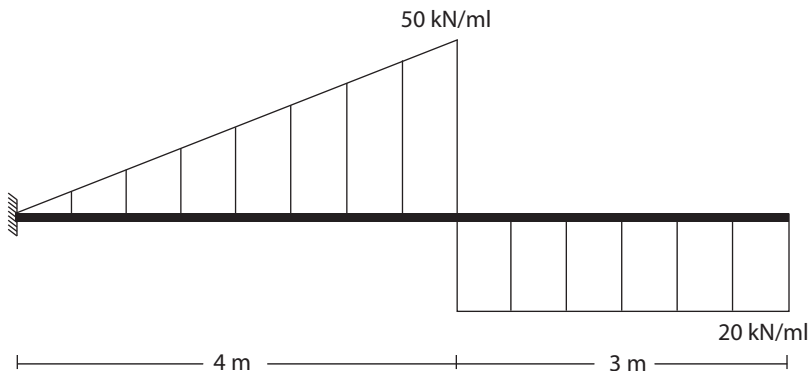
$$V(0) = 68,18$$

Lo que indica que:

$$\theta_B = \frac{68,18}{EI} \text{ antihorario}$$

### Ejemplo 4.2

Determinar los giros y deflexiones en el extremo del voladizo de la figura 2.55.

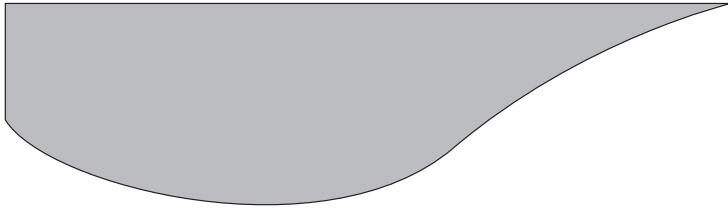
**Figura 2.55. Viga del ejemplo 4.2**

Observamos que esta es la misma viga solucionada estáticamente en el inciso 1.7.2 de la presente guía. Por lo tanto, traeremos las ecuaciones y el diagrama de momentos:

$$0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = -2,0833 x^3 + 40 x + 63,33$$

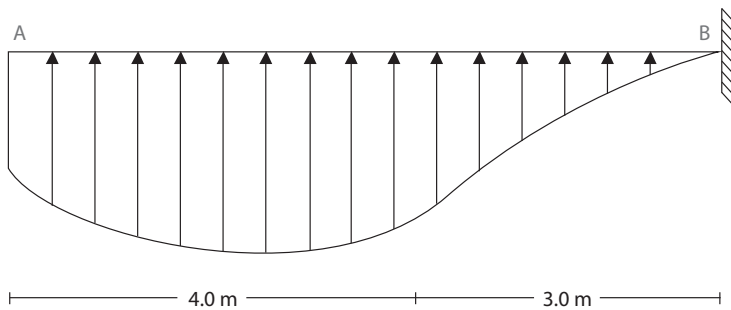
$$4 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_2 = 10 x^2 - 140 x + 490$$

**Figura 2.56. Diagrama de momentos de la viga del ejemplo 4.2**



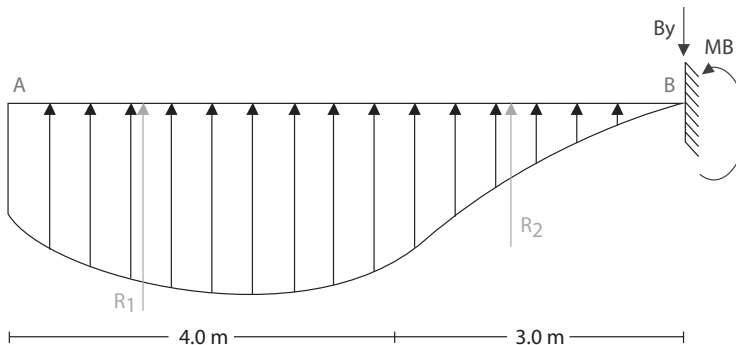
El empotramiento en A pasó a ser voladizo, y el voladizo B pasó a ser empotramiento, tal y como lo vemos en la figura 2.57.

**Figura 2.57. Viga conjugada de la viga del ejemplo 4.2**



Las cargas de la viga ahora son funciones, y estas no son otra cosa que las ecuaciones de momentos, las cuales son dos: la primera de 0 a 4, y la segunda de 4 a 7.

**Figura 2.58. Viga conjugada con las resultantes y reacciones de la viga del ejemplo 4.2**



Hallando las resultantes, tenemos:

$$R_1 = \int_0^4 (-2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63,3\overline{3}) dx$$

$$R_1 = 440 \text{ kN } \uparrow$$

$$R_2 = \int_4^7 (10 x^2 - 140 x + 490) dx$$

$$R_2 = 90 \text{ kN } \uparrow$$

Ahora determinamos los centroides, o las distancias a las cuales están ubicadas las resultantes:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^4 (-2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63,3\overline{3}) x dx}{\int_0^4 (-2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63,3\overline{3}) dx}$$

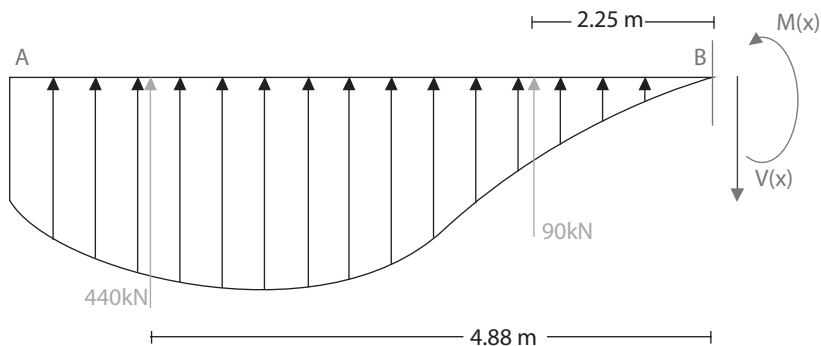
$$\bar{x}_1 = 2,12 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_4^7 (10 x^2 - 140 x + 490) x dx}{\int_4^7 (10 x^2 - 140 x + 490) dx}$$

$$\bar{x}_2 = 4,75 \text{ m}$$

Como deseamos determinar el giro y la deflexión en el extremo del voladizo, el cual en la viga conjugada es un empotramiento, será necesario hacer un corte en este punto, si bien omitiremos las reacciones ya que no se necesitarán para tal procedimiento.

**Figura 2.59. Corte en B de la viga conjugada de la viga del ejemplo 4.2**



Las distancias que se hallaron por integrales son desde el inicio de la viga hasta el centroide, y básicamente las que se necesitan para hacer el corte son las que van desde el centroide hacia el corte, por lo que simplemente a la longitud de la viga se le restará el valor del centroide hallado así:

$$\bar{x}_1 = 7\text{m} - 2,12\text{ m}; \bar{x}_1 = 4,88\text{ m}$$

$$\bar{x}_2 = 7\text{m} - 4,75\text{ m}; \bar{x}_2 = 2,25\text{ m}$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = M(7) - (90 \cdot 2,25) - (440 \cdot 4,88) = 0$$

$$M(7) - (90 \cdot 2,25) - (440 \cdot 4,88) = 0$$

Despejando  $M(7)$  de las ecuaciones, tenemos:

$$M(7) = 2350$$

Lo que indica:

$$\Delta_B = \frac{2350}{EI} \uparrow$$

*Sumatoria de fuerzas:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 440 + 90 - V(7) = 0$$

$$440 + 90 - V(7) = 0$$

Despejando  $V(7)$  de las ecuaciones, tenemos:

$$V(7) = 530$$

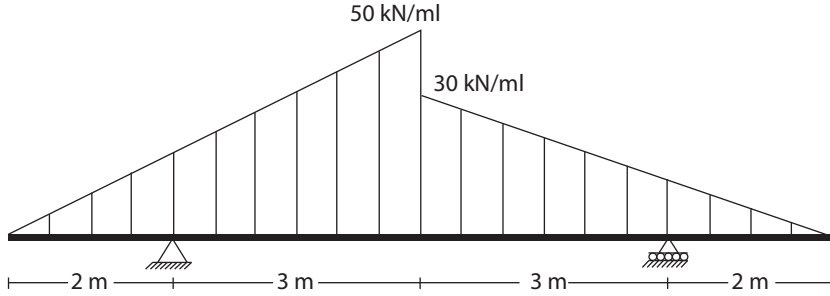
Lo que indica:

$$\theta_B = \frac{530}{EI} \text{ antihorario}$$

### Ejemplo 4.3

Determinar los giros y deflexiones en los extremos de los voladizos, sobre los apoyos y en el momento máximo de la luz de la viga de la figura 2.60.

**Figura 2.60. Viga del ejemplo 4.3**



Observamos que esta es la misma viga solucionada estáticamente en el inciso 1.7.3 de la presente guía. Por lo tanto, traeremos las ecuaciones y el diagrama de momentos:

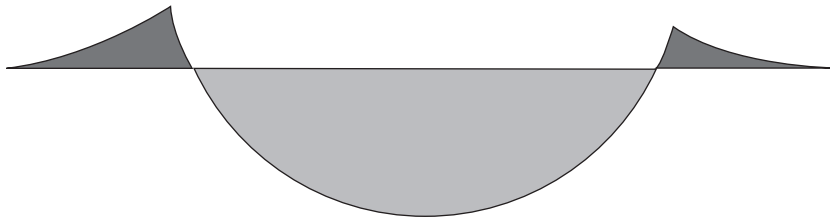
$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -1,66x^3$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784$$

$$5 \leq x \leq 8 \rightarrow M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159$$

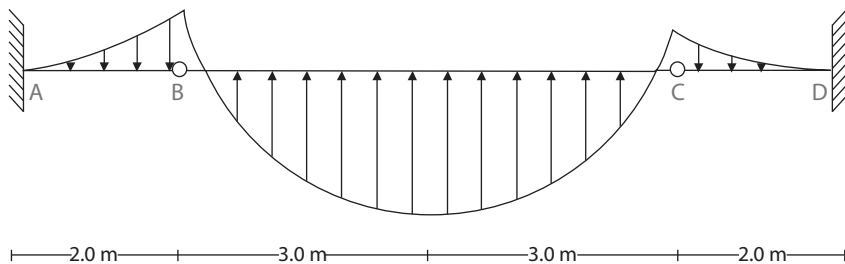
$$8 \leq x \leq 10 \rightarrow M(x)_4 = x^3 - 30x^2 + 300x - 1000$$

**Figura 2.61. Diagrama de momentos de la viga del ejemplo 4.3**



Se realiza la viga conjugada siguiendo las condiciones de apoyo de la tabla, y se carga con el anterior diagrama de momentos (figura 2.62).

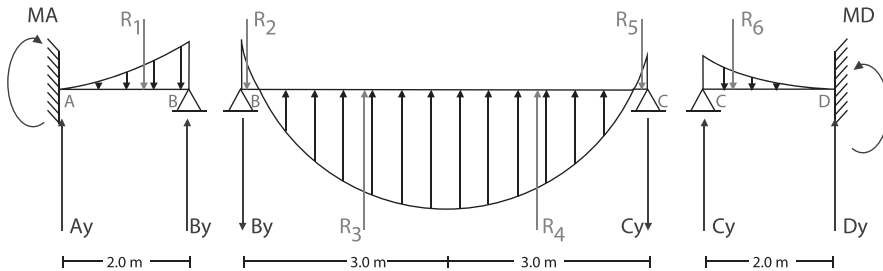
**Figura 2.62. Viga conjugada de la viga del ejemplo 4.3**



De este modo los voladizos A y D pasaron a ser empotramiento, y los apoyos B y C pasaron a ser articulaciones. Las cargas de la viga ahora son funciones, y estas no son otra cosa que las ecuaciones de momentos, las cuales son cuatro: la primera de 0 a 2, la segunda de 2 a 5, la tercera de 5 a 8, y la cuarta de 8 a 10.

Para empezar a solucionar separamos las tres vigas, las cuales están unidas por las articulaciones B y C (figura 2.63).

**Figura 2.63. Viga conjugada separada por efecto de la articulación de la viga del ejemplo 4.3**



Para determinar las resultantes de las cargas distribuidas, se utiliza lo definido en el inciso 1.5, en el cual se explicaba que la resultante de una carga distribuida como una función se halla con la integral definida entre los dos puntos.

Aunque los cortes  $2 \leq x \leq 5$  y  $5 \leq x \leq 8$  están definidos por una sola ecuación, se aprecia que en este tramo el diagrama de momentos (carga distribuida para el caso de la viga conjugada) pasa por cero y cambia la dirección. Esto nos indica que debemos determinar dos restantes distintas, lo cual se hará con la misma ecuación pero con distintos límites.

Puesto que solo conocemos los límites del corte, que son 2 y 5, lo que haremos será buscar el valor de  $x$  por el cual la función pasa por cero, y esto se determina igualando a cero la función así:

$$M(x)_2 = -1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784 = 0$$

$$-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784 = 0$$

Vemos que es una función cúbica; por lo tanto, nos dará tres soluciones, las cuales son:

$$x = \begin{cases} 20,15 \\ 7,89 \\ 1,96 \end{cases}$$

El valor que satisface la ecuación en el tramo es  $x=2,14$  para el segundo corte. Puesto que solo conocemos los límites, que son 5 y 8, lo que haremos será buscar el valor de  $x$  por el cual la función pasa por cero. Esto se determina igualando a cero la función así:

$$M(x)_3 = x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159 = 0$$

$$x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159 = 0$$

Vemos que es una función cúbica; por lo tanto, nos dará tres soluciones, las cuales son:

$$x = \begin{cases} 20,15 \\ 7,89 \\ 1,96 \end{cases}$$

El valor que satisface la ecuación en el tramo es  $x=7,89$  para el tercer corte. Hallando las resultantes, tenemos:

$$R_1 = \int_0^2 (-1,66x^3) dx$$

$$R_1 = 6,67 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_2 = \int_2^{2,14} (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx$$

$$R_2 = 0,96 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_3 = \int_{2,14}^5 (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx$$

$$R_3 = 259,7 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_4 = \int_5^{7,89} (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) dx$$

$$R_4 = 235,68 \text{ kN} \uparrow$$



$$R_5 = \int_{7,89}^8 (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) dx$$

$$R_5 = 0,43 \text{ kN} \downarrow$$

$$R_6 = \int_5^7 (x^3 - 30x^2 + 300x - 1.000) dx$$

$$R_6 = 4 \text{ kN} \downarrow$$

Ahora determinamos los centroides, o las distancias a las cuales están ubicadas las resultantes. Tenga en cuenta que el  $\bar{x}$  de la primera viga será a partir de cero y, por lo tanto, ese será el centroide real, pero para las cuatro resultantes que están en la segunda parte de la viga estos centroides hallados serán valores después de dos, que es la distancia de la primera parte de la viga ya que las ecuaciones de momentos se tomaron desde el inicio de la viga original. Lo mismo pasa para la tercera parte de la viga, la cual tiene distancia a partir de los 8 m. Por esta razón, los  $\bar{x}$  serán hallados restando dos al valor que dé por integrales para el segundo tramo de la viga, y restando ocho al valor obtenido por integrales para el tercer tramo de la viga, así:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 (-1,66x^3) x dx}{\int_0^2 (-1,66x^3) dx}$$

$$\bar{x}_1 = 1,6 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_2^{2,14} (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) x dx}{\int_2^{2,14} (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx} - 2$$

$$\bar{x}_2 = 0,04 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{2,14}^5 (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) x dx}{\int_{2,14}^5 (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx} - 2$$

$$\bar{x}_3 = 1,93 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_5^{7,89} (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) x dx}{\int_5^{7,89} (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) dx} - 2$$

$$\bar{x}_4 = 4,04 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{7,89}^8 (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) x \, dx}{\int_{7,89}^8 (x^3 - 30x^2 + 213,8892x - 311,1159) \, dx} - 2$$

$$\bar{x}_5 = 5,96 \, m$$

$$\bar{x} = \frac{\int_5^7 (x^3 - 30x^2 + 300x - 1.000) x \, dx}{\int_5^7 (x^3 - 30x^2 + 300x - 1.000) \, dx} - 8$$

$$\bar{x}_6 = 0,4 \, m$$

Para hallar las reacciones  $B_y$  y  $C_y$  del segundo tramo de la viga, se resuelve estáticamente como se aprendió en el capítulo 1.

La sumatoria de momentos positivos antihorarios o en contra del movimiento de las manecillas del reloj es:

$$\begin{aligned} +\circlearrowleft \Sigma M_B = & -(0,96 \, \text{kN} \cdot 0,04 \, \text{m}) + (259,7 \, \text{kN} \cdot 1,93 \, \text{m}) \\ & + (235,68 \, \text{kN} \cdot 4,04 \, \text{m}) - (0,43 \, \text{kN} \cdot 5,96 \, \text{m}) - C_y \cdot (6) = 0 \\ & -(0,96 \, \text{kN} \cdot 0,04 \, \text{m}) + (259,7 \, \text{kN} \cdot 1,93 \, \text{m}) \\ & + (235,68 \, \text{kN} \cdot 4,04 \, \text{m}) - (0,43 \, \text{kN} \cdot 5,96 \, \text{m}) - C_y \cdot (6) = 0 \end{aligned}$$

Despejando  $C_y$  de la ecuación, tenemos:

$$C_y = 241,79 \, \text{kN} \downarrow$$

Para la sumatoria de fuerzas solo existen fuerzas verticales; por lo tanto, se hará sumatoria de fuerzas en “y”, positivas en dirección hacia arriba:

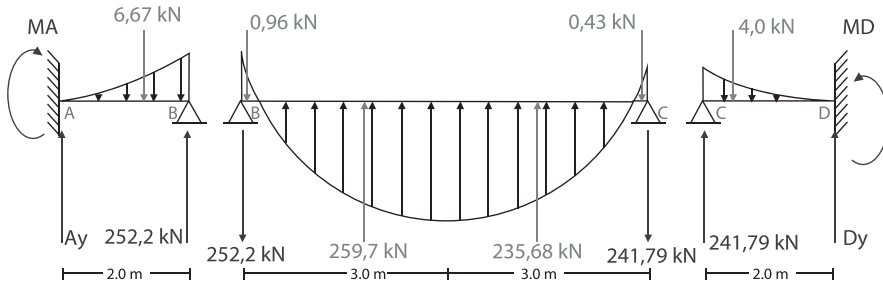
$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = & 259,7 + 235,68 - 0,96 - 0,43 - 241,79 - B_y = 0 \\ & 259,7 + 235,68 - 0,96 - 0,43 - 241,79 - B_y = 0 \end{aligned}$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, tenemos:

$$B_y = 252,2 \, \text{kN} \downarrow$$

El valor de  $B_y$  y el de  $C_y$  se trasladan de una viga a otra con el mismo signo, pero con sentido contrario.

**Figura 2.64. Resultantes de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3**

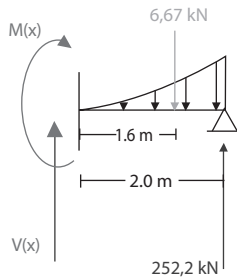


Para determinar los giros y deflexiones, se harán cortes en los lugares donde se necesite calcular esos desplazamientos. Así, el cortante  $V(x)$  será el giro ( $\theta$ ) y el momento  $M(x)$  será la deflexión ( $\Delta$ ). Las direcciones que tomarán el cortante y el momento en donde se corta serán las mismas aplicadas en la solución estática que se explicó anteriormente en esta misma guía.

***Deflexión y giro en el punto A***

Anteriormente no se hallaron las reacciones en A ya que no era necesario para determinar las deformaciones. Para este método el corte no se hace como una variación de la longitud, sino que  $x$  en este caso tendrá un valor numérico, que para el corte será 2 m:  $x=2$ .

**Figura 2.65. Corte en A de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3**



La sumatoria de momentos es:

$$+\sum M_A = (252,2 \cdot 2) - (6,67 \cdot 1,6) - M(2) = 0$$

$$(252,2 \cdot 2) - (6,67 \cdot 1,6) - M(2) = 0$$

Despejando  $M(2)$ , tenemos:

$$M(2) = 493,33$$

Lo que indica que:

$$\Delta_A = \frac{493,33}{EI} \uparrow$$

La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = V(2) - 6,67 + 252,2 = 0$$

$$V(2) - 6,67 + 252,2 = 0$$

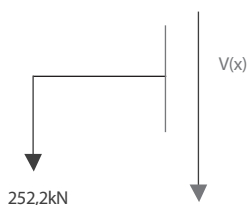
Despejando  $V(2)$ , tenemos:

$$V(2) = -245,53$$

Lo que indica que:

$$\theta_A = \frac{245,53}{EI} \text{ horario}$$

**Figura 2.66. Corte en B de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3**



Cuando cortamos en un punto donde solo se tiene una fuerza, se debe tener en cuenta que, como se está haciendo el corte justo sobre el punto, la distancia desde la fuerza hasta el corte será cero. Por lo tanto, la sumatoria de momentos será:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = (252,2 * 0) + M(0) = 0$$

Despejando  $M(0)$ , se tiene que:

$$M(0) = 0$$

Esto indica que en ese punto no hay desplazamiento, lo cual es cierto y se puede deducir desde el inicio ya que, en la viga original, en este punto existe un apoyo que impide la deflexión.

La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -V(0) - 252,2 = 0$$

$$-V(0) - 252,2 = 0$$

Despejando  $V(0)$ , tenemos:

$$V(0) = -252,2$$

Lo que indica que:

$$\theta_A = \frac{245,53}{EI} \text{ horario}$$

Como se demostró anteriormente, el desplazamiento en este punto es cero.

La *sumatoria de fuerzas* es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= V(0) - 241,79 = 0 \\ V(0) - 241,79 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando  $V(0)$ , tenemos:

$$V(0) = 241,79$$

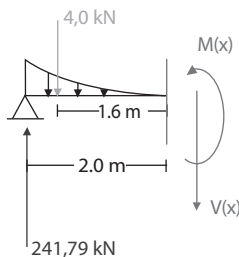
Lo que indica que:

$$\theta_B = \frac{252,2}{EI} \text{ horario}$$

### ***Deflexión y giro en el punto D***

Anteriormente no se hallaron las reacciones en D ya que no era necesario para determinar las deformaciones.

**Figura 2.68. Corte en D de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3**



La *sumatoria de momentos* es:

$$\begin{aligned} +\curvearrowright \Sigma M_D &= -(241,79 \cdot 2) + (4 \cdot 1,6) + M(2) = 0 \\ -(241,79 \cdot 2) + (4 \cdot 1,6) + M(2) &= 0 \end{aligned}$$

Despejando  $M(2)$ , tenemos:

$$M(2) = 477,18$$

Lo que indica que:

$$\Delta_D = \frac{477,18}{EI} \uparrow$$

La *sumatoria de fuerzas* es:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= -V(2) + 241,79 - 4 = 0 \\ -V(2) + 241,79 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando  $V(2)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y &= -V(2) + 241,79 - 4 = 0 \\ -V(2) + 241,79 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

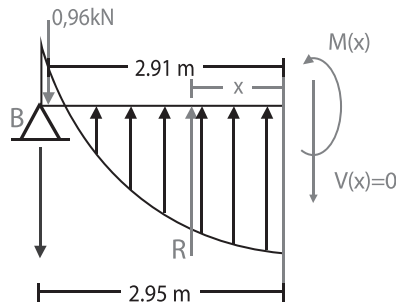
Lo que indica que:

$$\theta_D = \frac{237,79}{EI} \text{ antihorario}$$

La deflexión máxima de la luz se determina cuando el giro es nulo; en este caso, cuando el cortante es igual a cero. Por lo tanto, para hallar a qué distancia desde B está ubicada la deflexión máxima, se iguala la ecuación de cortante a cero como se observa enseguida.

Para la *sumatoria de fuerzas*, primero se determina la resultante por medio de integrales, suponiendo que está en tramo del segundo corte:

**Figura 2.69. Corte en  $x$  de la viga conjugada de la viga de ejemplo 4.3**



$$R = \int_{2,14}^x (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx$$

$$-0,4166x^4 + 56,9446x^2 - 227,7784x$$

Definida entre 2,14 y x, resolviendo se tiene que:

$$-0,4166x^4 + 56,9446x^2 - 227,7784x - 17,74 = 0$$

Hallando un posible valor de x, se tiene:

$$x = 4,95$$

El valor debe estar entre 2,14 y 5, por lo que  $x=4,95$  cumple con la condición. Sabiendo que este valor es para el segundo tramo de la viga, el valor del corte es 2,95 ya que los otros 2 m pertenecen al primer tramo, así como se aprecia en la figura 2.69.

Determinando el valor de la resultante y el centroide:

$$R = \int_{2,14}^{4,95} (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx$$

$$R = 253,03 \text{ kN } \uparrow$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{2,14}^{4,95} (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) x dx}{\int_{2,14}^{4,95} (-1,66x^3 + 113,8892x - 227,7784) dx} - 2$$

$$\bar{x} = 1,90 \text{ m}$$

Desde el corte sería:

$$\bar{x} = 2,95 - 1,90; \bar{x} = 1,05 \text{ m}$$

La *sumatoria de momentos* es:

$$+\sum M_x = M(2,95) + (0,96 \cdot 2,91) + (252,2 \cdot 2,95) - (253,03 \cdot 1,05) = 0$$

$$M(2,95) + (0,96 \cdot 2,91) + (252,2 \cdot 2,95) - (253,03 \cdot 1,05) = 0$$

Despejando  $M(2,95)$ , se tiene:

$$M(2,81) = -481,10$$

Lo que indica que:

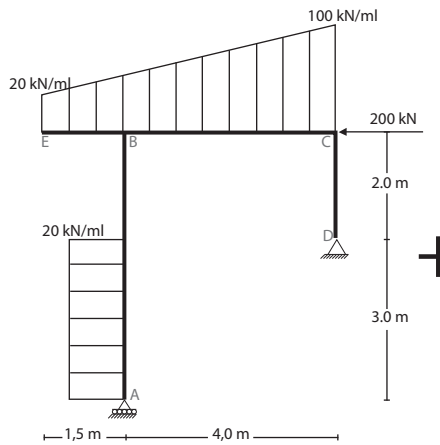
$$\Delta_{M\hat{A}X} = \frac{481,10}{EI} \downarrow$$

## 2.4. Principio de superposición

“Si los desplazamientos y esfuerzos en todos los puntos de una estructura son proporcionales a las cargas que los causan, los desplazamientos y los esfuerzos totales que resultan de la aplicación simultánea de varias cargas son la suma de los desplazamientos y esfuerzos causados por dichas cargas, aplicadas separadamente” (Uribe, 2000).

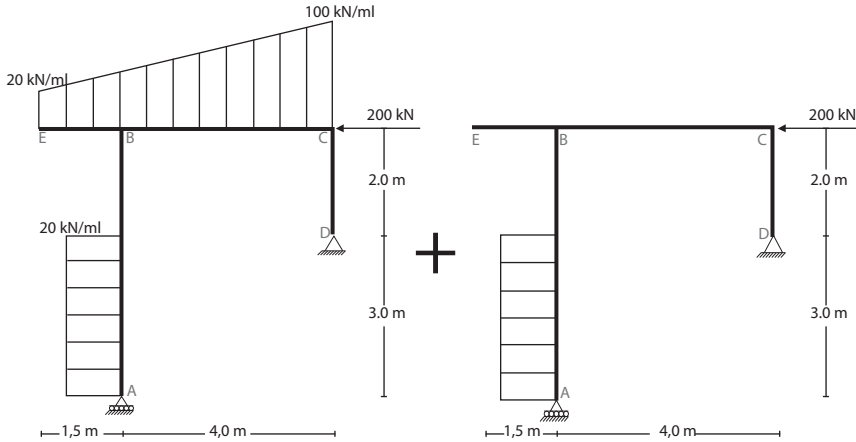
Según esto, para que se pueda aplicar la superposición es necesario que exista una relación lineal entre cargas, esfuerzos y deflexiones. Tal relación deja de ser lineal cuando las deformaciones en el material del que está hecha la estructura no son proporcionales a los esfuerzos, o sea, cuando el material no sigue la Ley de Hooke. Esto también sucede cuando la estructura es sometida a cargas y experimenta cambios en geometría que afectan las fuerzas internas en una forma que no se puede despreciar. Esto ocurre por ejemplo en los elementos a flexocompresión, también llamados viga-columna (Uribe, 2000).

**Figura 2.70. Ejemplo de superposición**



El pórtico de la figura 2.70 se puede solucionar, según el principio de superposición, como se observa en la figura 2.71.



**Figura 2.71. Simplificación del ejercicio por medio del principio de superposición**

## 2.5. Giros y deflexiones por métodos de energía

En el literal 2.3 de la presente guía se explicó como determinar giros y deflexiones por métodos geométricos (teoremas del área-momento y método de la viga conjugada). Para este apartado se mostrará que esas mismas deformaciones se pueden calcular aplicando el principio de la conservación de la energía. Con ese fin se presentarán dos métodos basados en dicho principio: trabajo virtual y primer teorema de Castigliano, los cuales pueden resultar más útiles que los geométricos para algunas estructuras complicadas debido a la simplicidad con que pueden establecerse las expresiones que nos permiten resolver el problema (McCormac, 2010).

### 2.5.1. Método del trabajo virtual

El principio del trabajo virtual, conocido también como el método de la carga unitaria, proporciona un medio general para obtener el desplazamiento y la pendiente en un punto específico de una estructura, ya sea una viga, un pórtico o una armadura (Hibbeler, 2012).

Según lo señalado por Uribe (2000), “Si una estructura deformable, en equilibrio bajo un sistema de cargas, es sometida a una deformación virtual como resultado de una acción adicional, el trabajo virtual externo hecho por el sistema de cargas es igual al trabajo virtual interno efectuado por las fuerzas internas causadas por él”, la aplicación en este caso se reduce entonces a evaluar ambas expresiones e igualarlas:

$$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

$$\theta_x = \int_0^L m(x)_a \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

Donde:

$M(x)$ : ecuación del diagrama de momentos de la estructura real.

$\Delta_x$ : deflexión en cierto punto de la estructura.

$m(x)$ : ecuación del diagrama de momentos de la estructura virtual cuando la carga unitaria es una fuerza.

$\theta_x$ : giro en cierto punto de la estructura.

$m(x)_a$ : ecuación del diagrama de momentos de la estructura virtual cuando la carga unitaria es un momento.

En definición, para calcular giros y deflexiones por el método del trabajo virtual se sigue el mismo procedimiento, por lo que la diferencia radica en la aplicación de la carga unitaria del trabajo virtual.

Si la carga unitaria es una fuerza  $P=1$ , se hallará el desplazamiento  $\Delta$  en ese punto. Por otra parte, si la carga unitaria aplicada es un momento  $M=1$ , entonces lo que se determinará será un giro  $\theta$  en el punto.

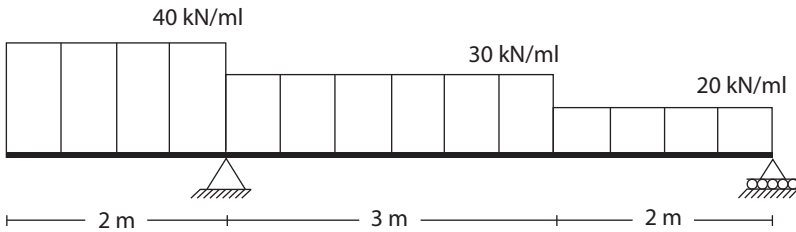
En cuanto a las direcciones de los giros y desplazamientos, estas se hallan por el método del trabajo virtual de la siguiente manera: se supone la carga unitaria (fuerza o momento) con una dirección y sentido; para las fuerzas: hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha o hacia la izquierda; y para los momentos: horario o antihorario. Si al solucionar por el método el giro o la deflexión da positiva, indica que la dirección de la carga unitaria fue supuesta de forma correcta; si da negativa, la carga unitaria supuesta fue incorrecta, lo que implica invertir la dirección de la deformación.

## 2.5.2. Ejercicios resueltos: trabajo virtual

### Ejemplo 5.1

Determinar el desplazamiento en el extremo del voladizo de la viga de la figura 2.72.

Figura 2.72. Viga del ejemplo 5.1



Traemos las ecuaciones del diagrama de momentos y la dirección en la que se hicieron los cortes:

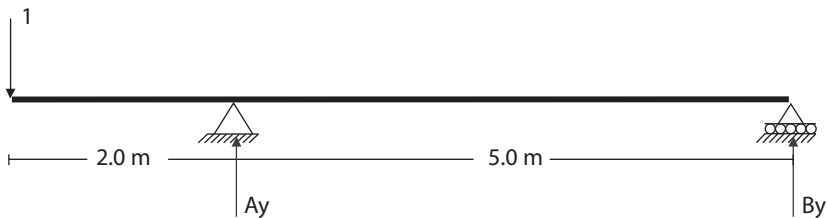
$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_1 = -20x^2$$

$$2 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$5 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

Se procede a realizar la viga virtual manteniendo las condiciones de apoyo, pero todas las cargas se omiten. Se determinará el desplazamiento en el voladizo, por lo que en este punto se pondrá una fuerza unitaria, tal y como se muestra en la figura 2.73.

Figura 2.73. Viga virtual de la viga de ejemplo 5.1



Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = (1 \cdot 2) + (B_y \cdot 5) = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, se tiene:

$$B_y = -0,4$$

$$B_y = 0,4 \downarrow$$

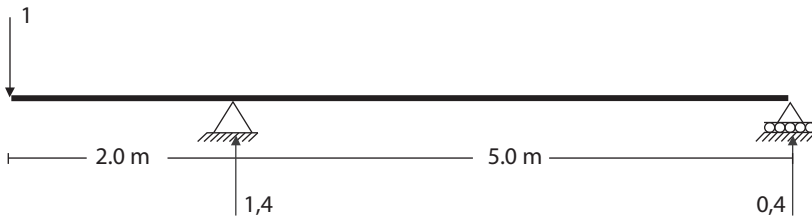
La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 1 - 0,4 = 0$$

Despejando  $A_y$  de la ecuación, se tiene:

$$A_y = 1,4 \uparrow$$

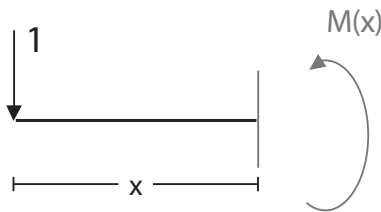
**Figura 2.74. Reacciones de la viga virtual de la viga del ejemplo 5.1**



Por lo tanto, la viga virtual queda tal como se observa en la figura 2.74, realizando los cortes para determinar las ecuaciones del diagrama de momentos, así como se explicó en el literal 1.6 de la presente guía:

$$0 \leq x \leq 2 \rightarrow$$

**Figura 2.75. Primer corte de la viga virtual del ejemplo 5.1**



Sumatoria de momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = m(x)_1 + 1 \cdot x = 0$$

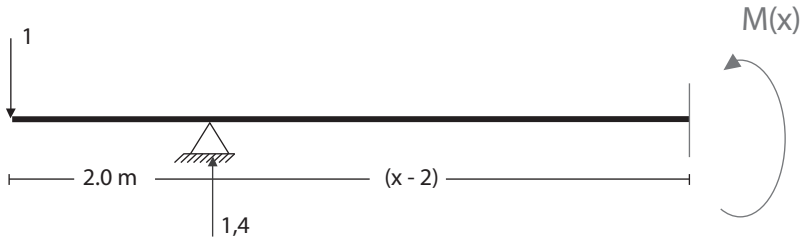
$$m(x)_1 + 1 \cdot x = 0$$

Despejando  $m(x)$ , se obtiene:

$$m(x)_1 = -x$$

$$2 \leq x \leq 7 \rightarrow$$

Figura 2.76. Segundo corte de la viga virtual del ejemplo 5.1



Sumatoria de momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = m(x)_2 + x - 1,4(x - 2) = 0$$

$$m(x)_2 + x - 1,4x + 2,8 = 0$$

Despejando  $m(x)$ , se obtiene:

$$m(x)_2 = 0,4x - 2,8$$

Aplicando la definición del trabajo virtual para hallar desplazamientos:

$$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

0-2

$$M(x)_1 = -20x^2$$

$$m(x)_1 = -x$$

$$\int_0^2 (-20x^2)(-x) dx = 80$$

2-5

$$M(x)_2 = -15x^2 + 147x - 314$$

$$m(x)_2 = 0,4x - 2,8$$

$$\int_2^5 (-15x^2 + 147x - 314)(0,4x - 2,8) dx = 14,7$$

5-7

$$M(x)_3 = -10x^2 + 97x - 189$$

$$m(x)_2 = 0,4x - 2,8$$

$$\int_5^7 (-10x^2 + 97x - 189)(0,4x - 2,8) dx = -29,8\overline{66}$$

Tramo	M(x)	m(x)	$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$
0-2	$-20x^2$	$-x$	80
2-5	$-15x^2 + 147x - 314$	$0,4x - 2,8$	14,7
2-7	$-10x^2 + 97x - 189$	$0,4x - 2,8$	$-29,8\overline{66}$
		$\Sigma$	$64,8\overline{33}$

Por lo tanto:

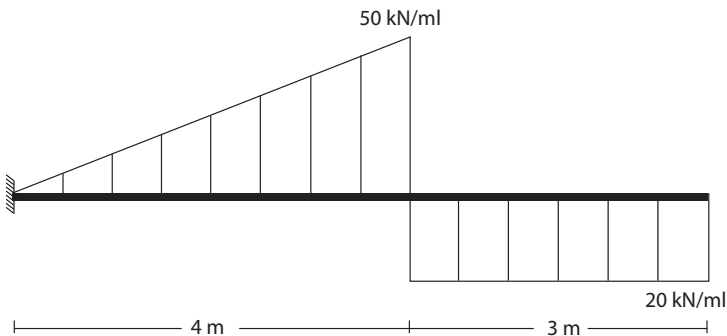
$$\Delta_A = \frac{64,833}{EI} \downarrow$$

Con dirección hacia abajo, porque al final la suma dio positiva, lo que indica que se supuso bien la carga unitaria en la viga virtual.

### Ejemplo 5.2

Determinar el giro en el extremo del voladizo de la viga de la figura 2.77.

Figura 2.77. Viga del ejemplo



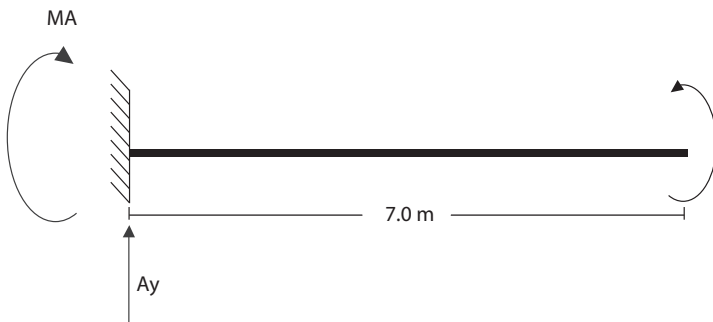
Traemos las ecuaciones del diagrama de momentos y la dirección en la que se hicieron los cortes:

$$0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = -2,0833 x^3 + 40 x + 63,33$$

$$4 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_2 = 10 x^2 - 140 x + 490$$

Se procede a realizar la viga virtual manteniendo las condiciones de apoyo, pero todas las cargas se omiten. Se determinará el giro en el voladizo, por lo que en este punto se pondrá un momento unitario, tal y como se muestra en la figura 2.78.

**Figura 2.78. Viga virtual de la viga del ejemplo 5.2**



Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 1 - M_A = 0$$

Despejando  $M_A$  de la ecuación, se tiene:

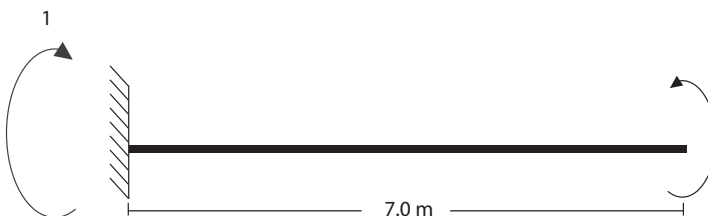
$$M_A = 1 \circlearrowleft$$

La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y = 0$$

$$A_y = 0$$

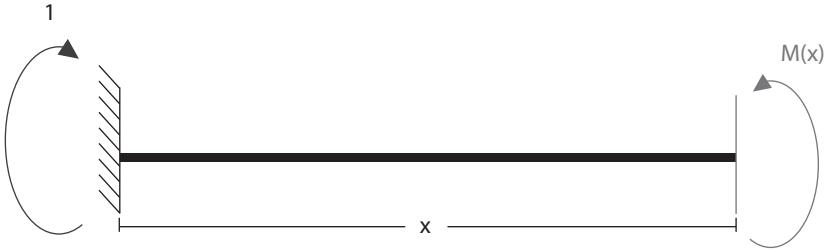
**Figura 2.79. Reacciones de la viga virtual del ejemplo 5.2**



Por lo tanto, la viga virtual queda tal como se observa en la figura 2.79, realizando los cortes para determinar las ecuaciones del diagrama de momentos, así como se explicó en el literal 1.6 de la presente guía.

$$0 \leq x \leq 7 \rightarrow$$

**Figura 2.80. Corte de viga virtual del ejemplo 5.2**



Sumatoria de momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = m(x)_a - 1 = 0$$

$$m(x)_a - 1 = 0$$

Despejando  $m(x)$ , se obtiene:

$$m(x)_a = 1$$

Aplicando la definición del trabajo virtual para hallar giros:

$$\theta_x = \int_0^L m(x)_a \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

0-4

$$M(x)_1 = -2,0833 x^3 + 40 x + 63,33$$

$$m(x)_a = 1$$

$$\int_0^4 (-2,08\overline{33} x^3 + 40 x + 63,3\overline{3})(1) dx = 440$$

4-7

$$M(x)_2 = 10 x^2 - 140 x + 490$$

$$m(x)_a = 1$$



$$\int_4^7 (10x^2 - 140x + 490)(1) dx = 90$$

Tramo	$M(x)$	$m(x)_a$	$\theta_x = \int_0^L m(x)_a \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$
0-4	$-2,08\overline{33}x^3 + 40x + 63,3\overline{3}$	1	440
4-7	$10x^2 - 140x + 490$	1	90
		$\Sigma$	530

Por lo tanto:

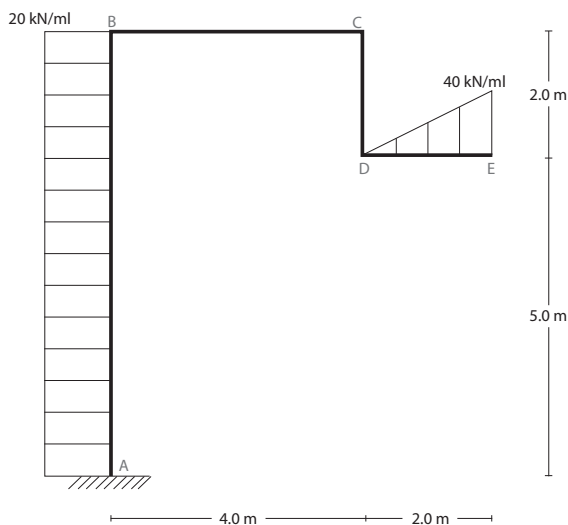
$$\theta_B = \frac{530}{EI} \text{ antihorario}$$

Con dirección antihoraria, porque al final la suma dio positiva, lo que indica que se supuso bien la carga unitaria en la viga virtual.

### Ejemplo 5.3

Determinar el giro en el nudo B y el desplazamiento vertical en el nudo E del pórtico de la figura 2.81.

Figura 2.81. Pórtico del ejemplo 5.3



Traemos las ecuaciones del diagrama de momentos y la dirección en la que se hicieron los cortes:

$$(B-C): 0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_1 = 40x - 213,33$$

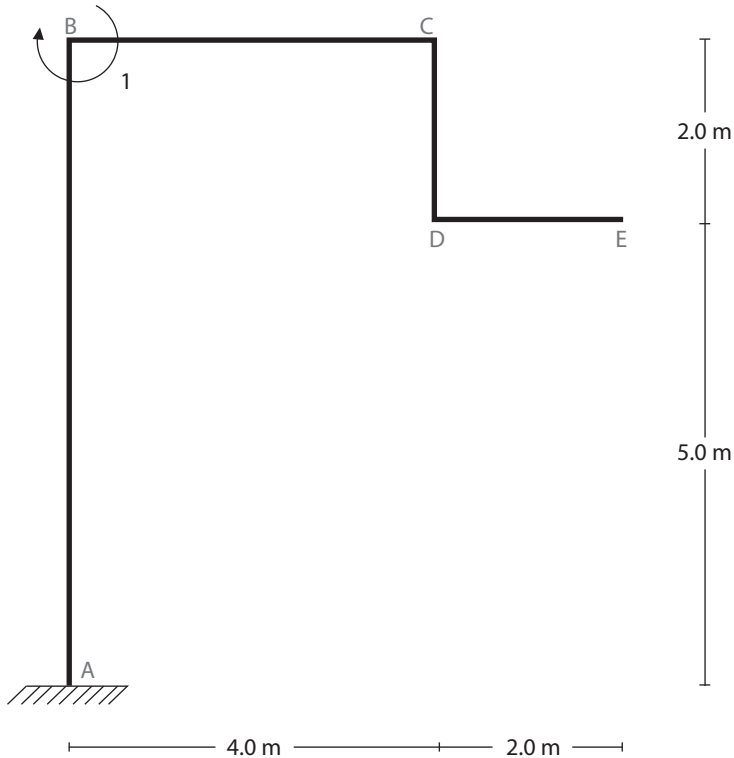
$$(D-E): 0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_2 = -3,33x^3 + 40x - 53,33$$

$$(A-B): 0 \leq x \leq 7 \rightarrow M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33$$

$$(C-D): 0 \leq x \leq 2 \rightarrow M(x)_4 = -53,33$$

Se procede a realizar el pórtico virtual manteniendo las condiciones de apoyo, pero todas las cargas se omiten. Se determinará el giro en el punto B, por lo que en este punto se pondrá un momento unitario, tal y como se muestra en la figura 2.82.

**Figura 2.82. Modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



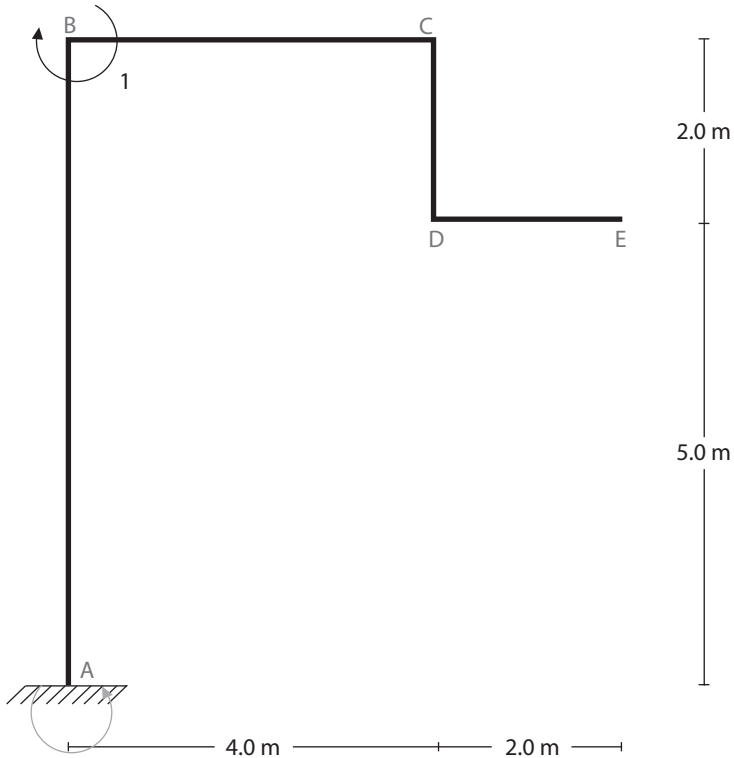
Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = M_A - 1 = 0$$

$$M_A = 1 \circlearrowleft$$

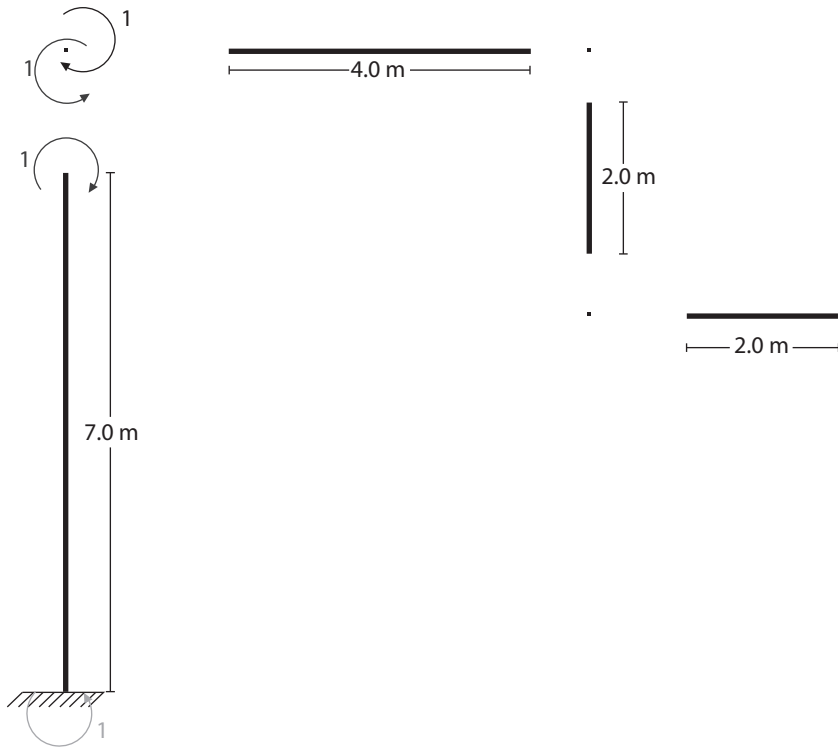
Como no hay fuerzas en el pórtico, las reacciones de fuerzas son cero. Por lo tanto, el modelo virtual queda tal como se observa en la figura 2.83.

**Figura 2.83. Reacciones del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Se hace el equilibrio del pórtico tal y como se enseñó anteriormente en esta guía (figura 2.84), realizando los cortes para determinar las ecuaciones del diagrama de momentos, así como se explicó en el literal 1.6.

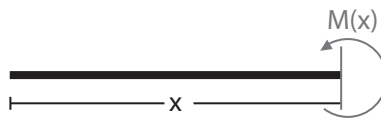
Figura 2.84. Equilibrio del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3



Tenga en cuenta que los cortes deben realizarse en las mismas direcciones en las que se hicieron en el pórtico original:

Corte 1 (B-C):  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

Figura 2.85. Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3



Variación de los momentos:

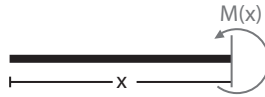
$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_1 = m(x) = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_1 = 0$$

Corte 2 (D-E):  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow$

**Figura 2.86. Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M(x)_2 = m(x) = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_2 = 0$$

Corte 3 (A-B):  $0 \leq x \leq 7 \uparrow$

**Figura 2.87. Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M(x)_3 = -m(x) + 1 = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_3 = 1$$

Corte 4 (C-D):  $0 \leq x \leq 2 \downarrow$

**Figura 2.88. Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_4 = m(x) = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_4 = 0$$

Aplicando la definición del trabajo virtual para hallar giros:

$$\theta_x = \int_0^L m(x)_a \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

(B-C): 0-4

$$M(x)_1 = 40x - 213,33$$

$$m(x)_1 = 0$$

$$\int_0^4 (40x - 213,33)(0) dx = 0$$

(D-E): 0-2

$$M(x)_2 = -3,33x^3 + 40x - 53,33$$

$$m(x)_2 = 0$$

$$\int_0^2 (-3,33x^3 + 40x - 53,33)(0) dx = 0$$

(A-B): 0-7

$$M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33$$

$$m(x)_3 = 1$$

$$\int_0^7 (10x^2 - 140x + 703,33)(1) dx = 2.636, \overline{66}$$

(C-D): 0-2

$$M(x)_4 = -53,33$$

$$m(x)_4 = 0$$

Tramo	M(x)	m(x) <sub>a</sub>	$\theta_x = \int_0^L m(x)_a \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$
0-4 B-C	40x-213,33	0	0
0-2 D-E	-3,33x <sup>3</sup> +40x-53,33	0	0
0-7 A-B	10x <sup>2</sup> -140x+703,33	1	2.636, $\overline{66}$
0-2 C-D	-53,33	0	0
		$\Sigma$	2.636, $\overline{66}$

Por lo tanto:

$$\theta_B = \frac{2.636,66}{EI} \text{ horario}$$

Con dirección horaria, porque al final la suma dio positiva, lo que indica que se supuso bien la carga unitaria en el modelo virtual.

Ahora se determinará la deflexión vertical en el punto E, por lo que en este punto se pondrá una fuerza unitaria, tal y como se muestra en la figura 2.89. Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía.

Sumatoria de fuerzas horizontales:

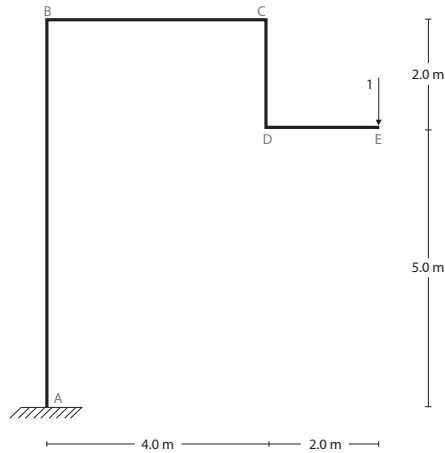
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0$$

Sumatoria de momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = M_A - 1 \cdot (4+2) = 0$$

$$M_A = 6 \circlearrowleft$$

Figura 2.89. Modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3



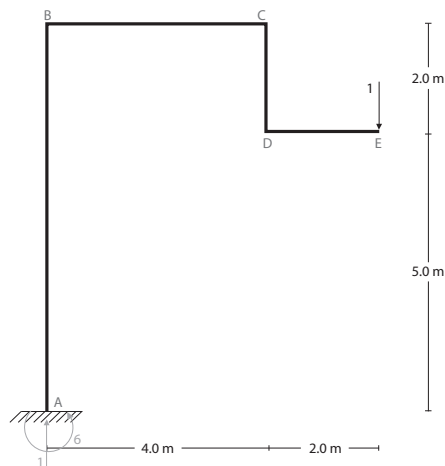
Sumatoria de fuerzas verticales:

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 1 = 0$$

$$A_y = 1 \uparrow$$

Por lo tanto, el modelo virtual queda tal como se observa en la figura 2.90.

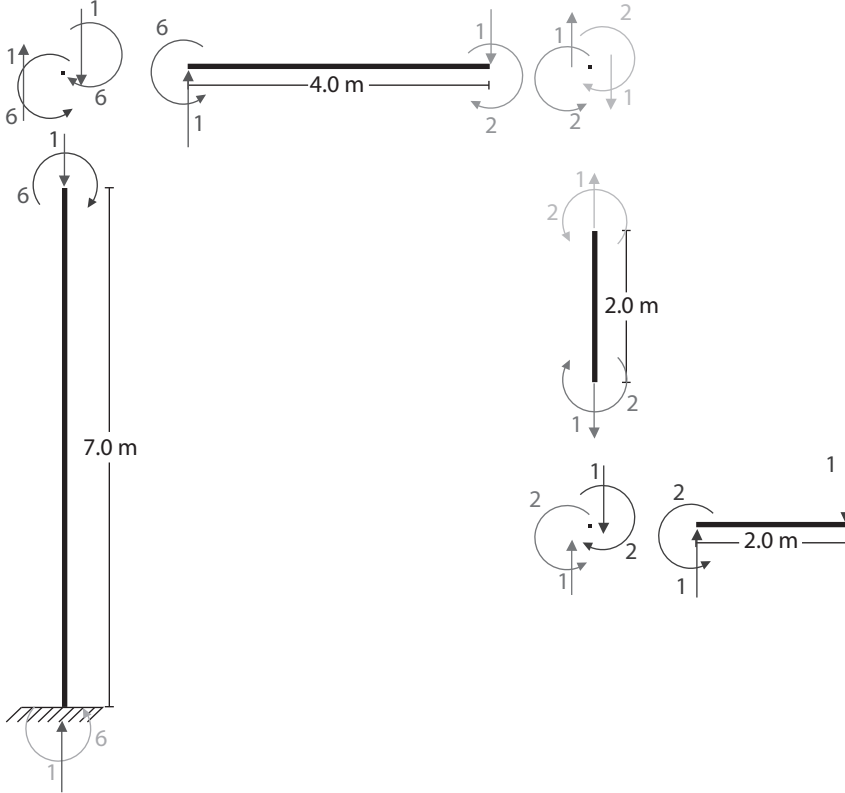
Figura 2.90. Reacciones del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3





Se realiza el equilibrio del pórtico, tal y como se enseñó anteriormente en esta guía. Como resultado, se obtiene la figura 2.91.

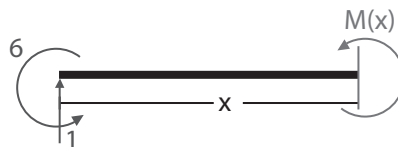
**Figura 2.91. Equilibrio del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Se realizaron los cortes para determinar las ecuaciones del diagrama de momentos, así como se explicó en el literal 1.6 de la presente guía. Tenga en cuenta que dichos cortes deben tener las mismas direcciones con las que se hicieron en el pórtico original.

*Corte 1 (B-C):*  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

**Figura 2.92. Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

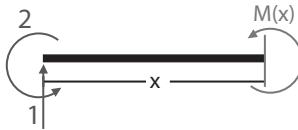
$$+\sum M(x)_1 = m(x) - (1 \cdot x) + 6 = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_1 = x - 6$$

Corte 2 (D-E):  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow$

**Figura 2.93. Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

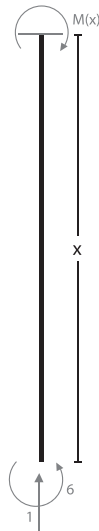
$$+\sum M(x)_2 = m(x) - (1 \cdot x) + 2 = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_2 = x - 2$$

Corte 3 (A-B):  $0 \leq x \leq 7 \uparrow$

**Figura 2.94. Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

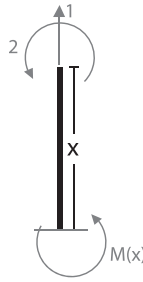
$$+\sum M(x)_3 = -m(x) + 6 = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_3 = 6$$

Corte 4 (C-D):  $0 \leq x \leq 2 \downarrow$

**Figura 2.95. Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.3**



Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_4 = m(x) + 2 = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_4 = -2$$

Aplicando la definición del trabajo virtual para hallar desplazamientos:

$$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

(B-C): 0-4

$$M(x)_1 = 40x - 213,33$$

$$m(x)_1 = x - 6$$

$$\int_0^4 (40x - 213,33)(x - 6) dx = 2.346,61$$

(D-E): 0 - 2

$$M(x)_2 = -3,33x^3 + 40x - 53,33$$

$$m(x)_2 = x - 2$$

$$\int_0^2 (-3,33x^3 + 40x - 53,33)(x - 2) dx = 58, \overline{66}$$

(A-B): 0 - 7

$$M(x)_3 = 10x^2 - 140x + 703,33$$

$$m(x)_3 = 6$$

$$\int_0^7 (10x^2 - 140x + 703,33)(6) dx = 15.819,99$$

(C-D): 0-2

$$M(x)_4 = -53,33$$

$$m(x)_4 = -2$$

$$\int_0^2 (-53,33)(-2) dx = 213,33$$

Tramo	M(x)	m(x)	$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$
0-4 B-C	40x-213,33	x-6	2.346,61
0-2 D-E	-3,33x <sup>3</sup> + 40x - 53,33	x-2	58,66
0-7 A-B	10x <sup>2</sup> - 140x + 703,33	6	15.819,99
0-2 C-D	-53,33	-2	213,33
		Σ	2.346,61

Por lo tanto:

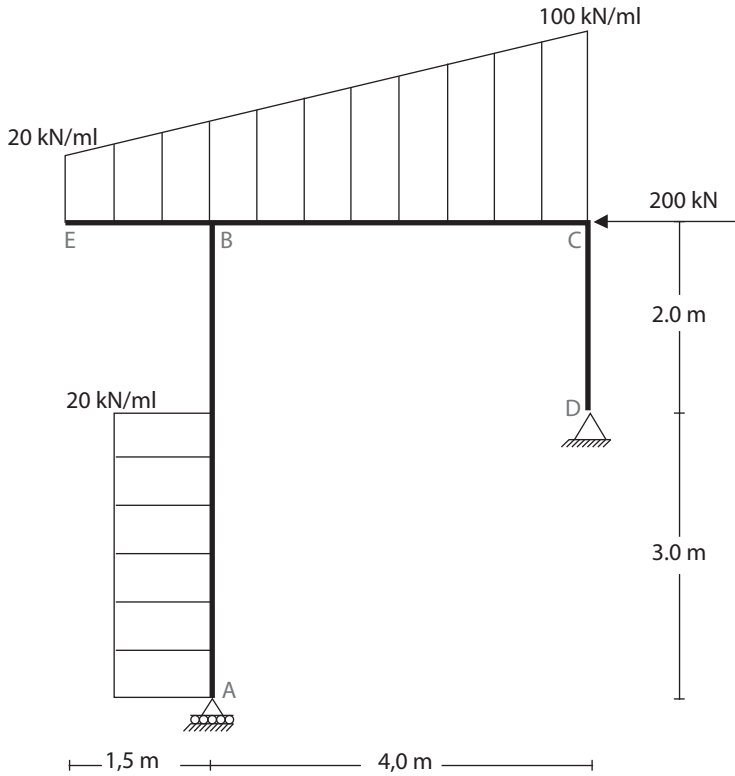
$$\Delta_{EV} = \frac{18.438,58}{EI} \downarrow$$

Con dirección hacia abajo porque al final la suma dio positiva, lo que indica que se supuso bien la carga unitaria en el modelo virtual.

### Ejemplo 5.4

Determinar el desplazamiento horizontal en el nudo A del pórtico de la figura 2.96.

Figura 2.96. Pórtico del ejemplo 5.4



Traemos las ecuaciones del diagrama de momentos y la dirección en la que se hicieron los cortes:

$$(A-B): 0 \leq x \leq 3 \rightarrow M(x)_1 = 10x^2$$

$$(A-B): 3 \leq x \leq 5 \rightarrow M(x)_2 = 60x - 90$$

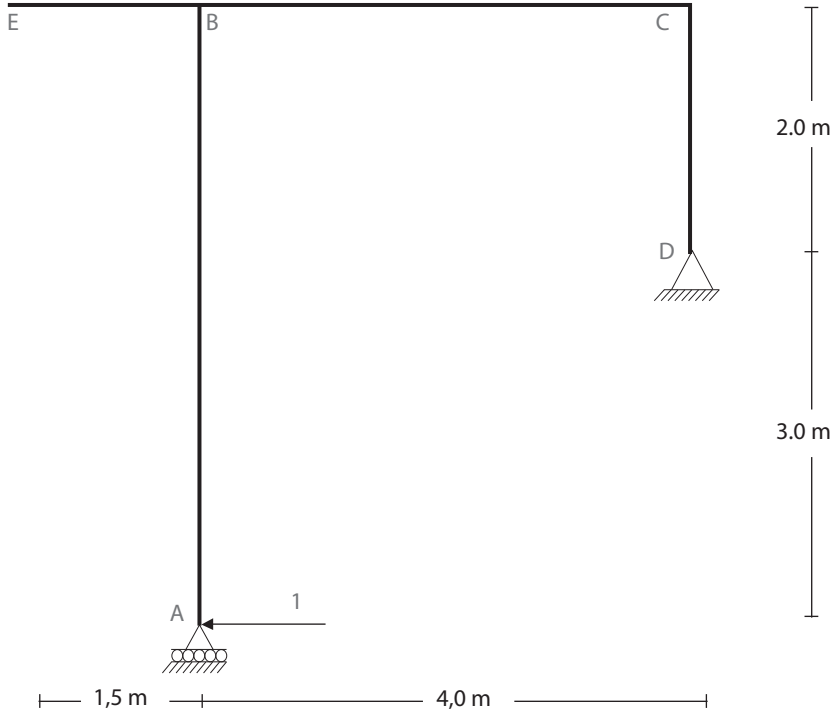
$$(C-D): 0 \leq x \leq 2 \uparrow M(x)_3 = 140x$$

$$(E-B): 0 \leq x \leq 1,5 \rightarrow M(x)_4 = -2,424x^3 - 10x^2$$

$$(B-C): 0 \leq x \leq 4 \rightarrow M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608$$

Se procede a realizar el pórtico virtual manteniendo las condiciones de apoyo, pero todas las cargas se omiten. Se determinará la deflexión horizontal en el punto A, por lo que en este se pondrá una fuerza unitaria, tal y como se muestra en la figura 2.97

Figura 2.97. Modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4



Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de fuerzas horizontales es:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = D_y - 1 = 0$$

$$D_y = 1 \rightarrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = (4 \cdot D_y) - (3 \cdot 1) = 0$$

$$D_y = 0,75 \uparrow$$

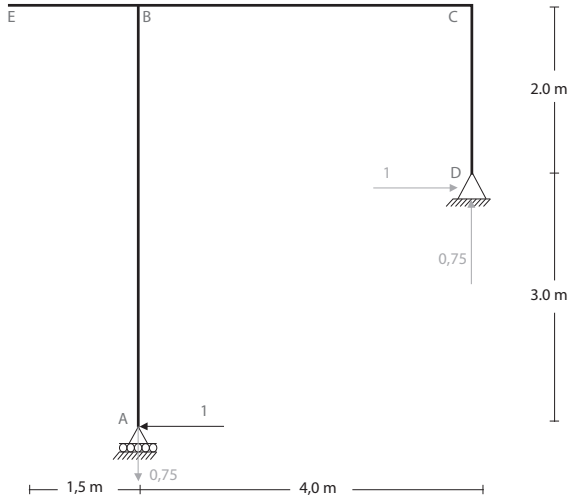
*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y + 0,75 = 0$$

$$A_y = 0,75 \downarrow$$

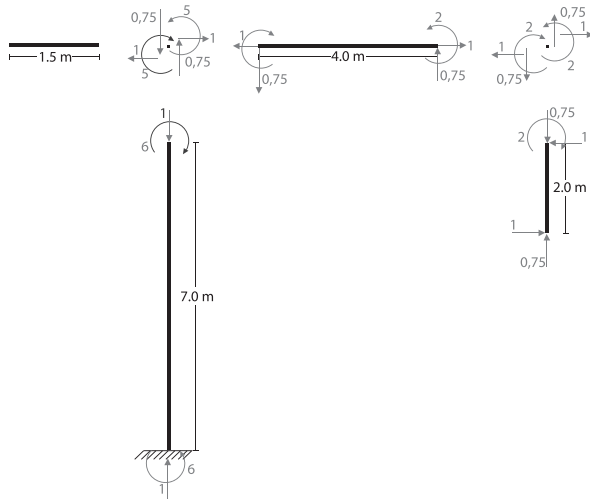
Por lo tanto, el modelo virtual queda como el que se presenta en la figura 2.98.

**Figura 2.98. Reacciones del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4**



Se realiza el equilibrio del pórtico, tal y como se enseñó anteriormente en esta guía (figura 2.99).

**Figura 2.99. Equilibrio del modelo virtual del pórtico del ejemplo**



Se realizaron los cortes para determinar las ecuaciones del diagrama de momentos, así como se explicó en el literal 1.6 de la presente guía. Tenga en cuenta que dichos cortes deben hacerse en las mismas direcciones con las que se hicieron en el pórtico original.

Corte 1 (A-B):  $0 \leq x \leq 5 \uparrow$

**Figura 2.100. Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4**



Variación de los momentos:

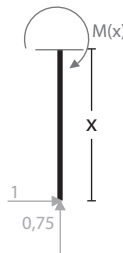
$$+\mathcal{U}\Sigma M(x)_1 = -m(x) - (1 \cdot x) = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_1 = -x$$

Corte 3 (C-D):  $0 \leq x \leq 2 \uparrow$

**Figura 2.101. Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4**



Variación de los momentos:

$$+\mathcal{U}\Sigma M(x)_2 = -m(x) + (1 \cdot x) = 0$$

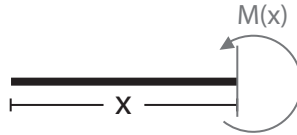
Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_2 = x$$



Corte 4 (E-B):  $0 \leq x \leq 1,5 \rightarrow$

Figura 2.102. Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4



Variación de los momentos:

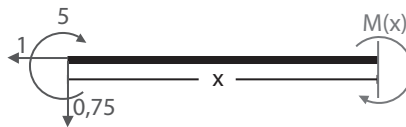
$$+\mathcal{U}\Sigma M(x)_3 = m(x) = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_3 = 0$$

Corte 5 (B-C):  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

Figura 2.103. Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 5.4



Variación de los momentos:

$$+\mathcal{U}\Sigma M(x)_4 = m(x) - 5 + (0,75 \cdot x) = 0$$

Despejando  $m(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$m(x)_4 = -0,75x + 5$$

Aplicando la definición del trabajo virtual para hallar desplazamientos:

$$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$$

(A-B): 0-3

$$M(x)_1 = 10x^2$$

$$m(x)_1 = -x$$

$$\int_0^3 (10x^2)(-x) dx = -202,5$$

(A-B): 3-5

$$M(x)_2 = 60x - 90$$

$$m(x)_1 = -x$$

$$\int_3^5 (60x - 90)(-x) dx = -1.240$$

(C-D): 0-2

$$M(x)_3 = 140x$$

$$m(x)_2 = x$$

$$\int_0^2 (140x)(x) dx = 373, \overline{33}$$

(E-B): 0-1,5

$$M(x)_4 = -2,424x^3 - 10x^2$$

$$m(x)_3 = 0$$

$$\int_0^{1,5} (-2,424x^3 - 10x^2)(0) dx = 0$$

(B-C): 0-4

$$M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608$$

$$m(x)_4 = -0,75x + 5$$

$$\int_0^2 (-2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,608)(-0,75x + 5) dx = 1063, \overline{33}$$

Tramo	M(x)	m(x)	$\Delta_x = \int_0^L m(x) \left( \frac{M(x)}{EI} \right) dx$
0-3 A-B	$10x^2$	-x	-202,5
3-5 A-B	$60x - 90$	-x	-1.240
0-2 C-D	$140x$	x	373,(33)
0-1,5 E-B	$-2,424x^3 - 10x^2$	0	0
0-4 B-C	$-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240,61$	$-0,75x + 5$	1.063,(33)
		$\Sigma$	-5,87

Por lo tanto:

$$\Delta_{AH} = \frac{5,87}{EI} \rightarrow$$

Con dirección hacia la derecha porque al final la suma dio negativa, lo que indica que se supuso mal la carga unitaria en el modelo virtual; en este caso, por tanto, solo se cambia la dirección.

### 2.5.3. Primer teorema de Castigliano

El primer teorema de Castigliano es el más complejo de los métodos vistos hasta el momento, pero con este se da la idea para el manejo del segundo teorema de Castigliano, con el cual se pueden abordar las estructuras hiperestáticas que se verán en el siguiente capítulo.

La aplicación del primer teorema de Castigliano implica igualar la deflexión de la primera derivada parcial del trabajo total de la estructura respecto a una carga situada en el punto donde se busca la deflexión. En este teorema, la primera derivada parcial del trabajo interno con respecto a cada redundante se hace igual a cero (McCormac, 2010).

El teorema es aplicable tanto a fuerzas como a momentos: en el primer caso se obtiene la deflexión de la estructura en la dirección de la fuerza, y en el segundo, la rotación en el sentido del momento. En caso de que los resultados sean negativos, solo será necesario cambiar la dirección de la fuerza o del momento, según sea el caso (Uribe, 2000).

Las anteriores definiciones nos llevan a las siguientes ecuaciones matemáticas:

- Para determinar desplazamientos:

$$\Delta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial P} \right) dx$$

- Para determinar giros:

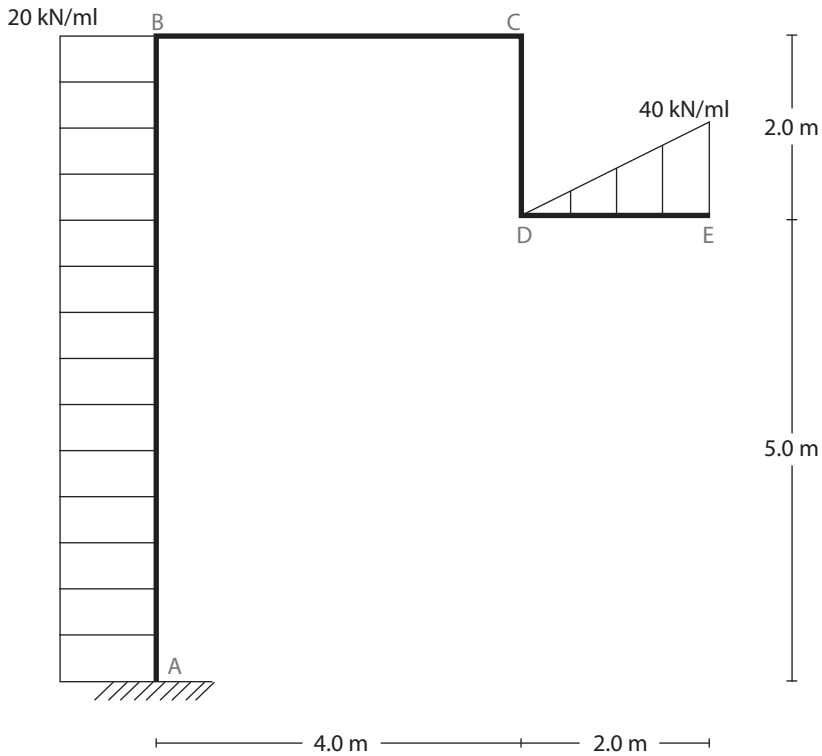
$$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial M} \right) dx$$

### 2.5.4. Ejercicios resueltos: primer teorema de Castigliano

#### Ejemplo 6.1

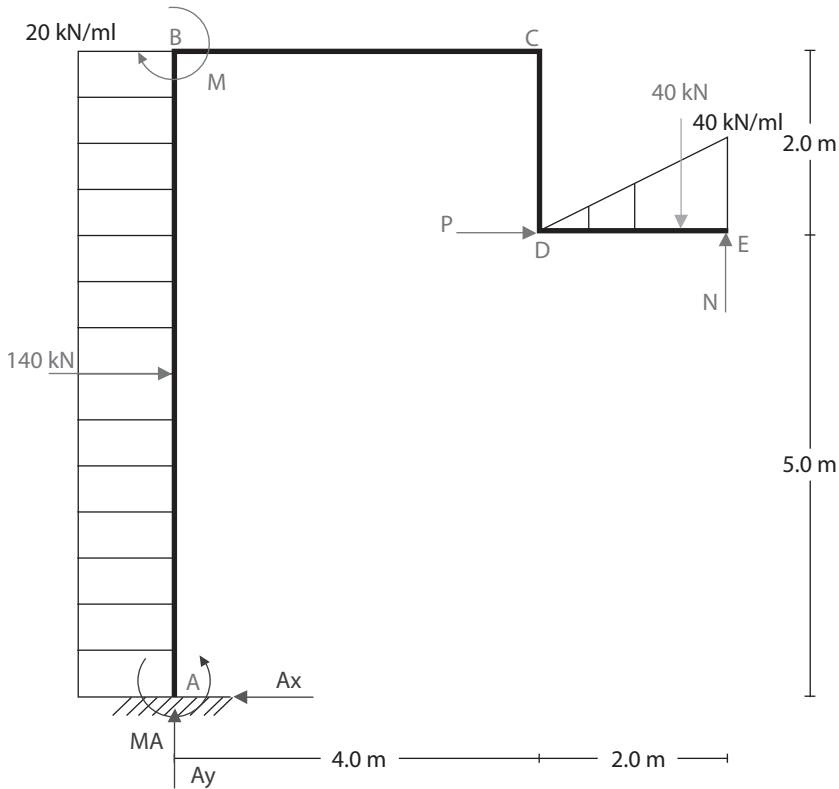
Determinar las siguientes deformaciones del pórtico de la figura 2.104: giro en el punto B, deflexión vertical en el punto E y deflexión horizontal en el punto D.

Figura 2.104. Pórtico del ejemplo 6.1



Para solucionar el ejercicio, se tiene que ubicar las redundantes, las cuales serán letras que representarán las fuerzas y los momentos. En el punto B suponemos un momento horario ( $M$ ); en el punto E, una fuerza hacia arriba ( $N$ ); y en el punto D, una fuerza hacia la derecha ( $P$ ). De esta forma el modelo queda tal como se muestra en la figura 2.105.

**Figura 2.105. Modelo con las redundantes del pórtico del ejemplo 6.1**



Se iniciará resolviendo las reacciones, como se explicó en el inciso 1.5 de la presente guía.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 140 + P - A_x = 0$$

$$A_x = 140 + P \leftarrow$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y + N - 40 = 0$$

$$A_y = 40 - N \uparrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = (6 \cdot N) - M - (5 \cdot P) - (40 \cdot 16/3) - (140 \cdot 3,5) + M_A = 0$$

$$M_A = 703,33 + M + 5P - 6N \circlearrowleft$$

Equilibrio del pórtico:

$$A_x = 140 + P; \quad A_y = 40 - N; \quad M_A = 703,33 + M + 5P - 6N$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = -M_{B1} - (7 * A_x) + (140 * 3,5) + M_A = 0$$

$$-M_{B1} - 7(140 + P) + 490 + 703,33 + M + 5P - 6N = 0$$

$$M_{B1} = 213,33 - 2P - 6N + M$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = M_{B1} + M_{B2} - M = 0$$

$$213,33 - 2P - 6N + M + M_{B2} - M = 0$$

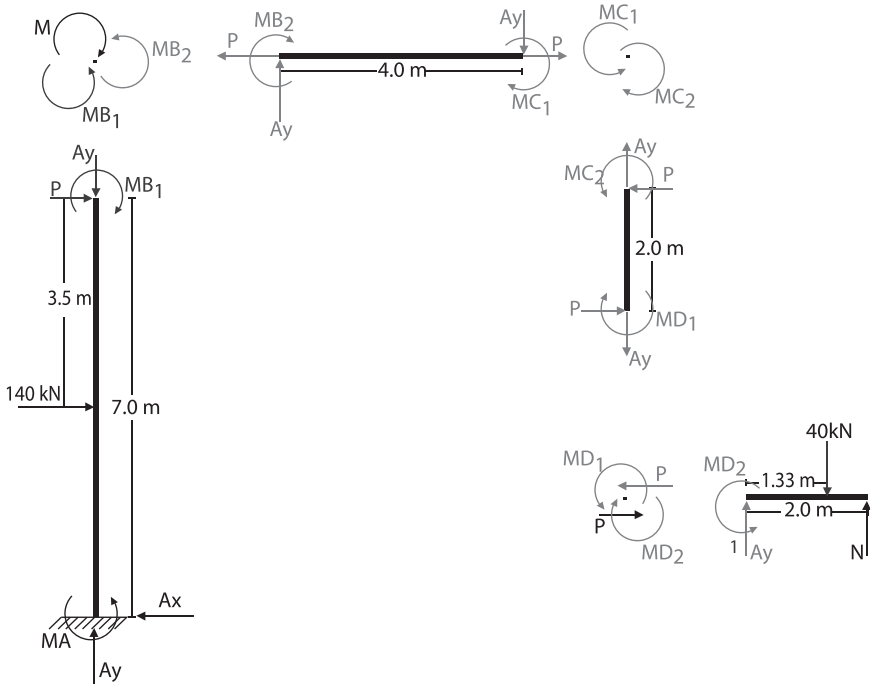
$$M_{B2} = -213,33 + 2P + 6N$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = -M_{C1} - M_{B2} - (4 * A_y) = 0$$

$$-M_{C1} - (-213,33 + 2P + 6N) - (4 * A_y) = 0$$

$$M_{C1} = 53,33 - 2P - 2N$$

Figura 2.106. Equilibrio del pórtico del ejemplo 6.1



$$+\circlearrowleft \sum M_D = M_{C2} - M_{D1} + (2 * P) = 0$$

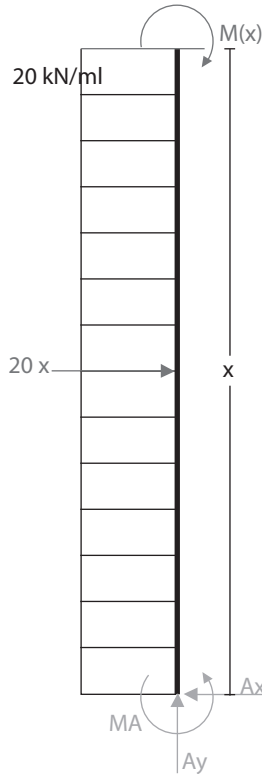
$$53,33 - 2P - 2N - M_{D1} + (2 * P) = 0$$

$$M_{D1} = 53,33 - 2N$$

Se realizan los cortes como se mostró en el inciso 1.6:

Corte 1 (A-B):  $0 \leq x \leq 7\uparrow$

**Figura 2.107. Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1**



Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_1 = -M(x) - (Ax * x) + M_A + 20x * \left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$-M(x) - x(140 + P) + 703,33 + M + 5P - 6N + 10x^2 = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_1 = 10x^2 - 140x + 703,33 - Px + 5P - 6N + M$$

Igualando a cero las redundantes:

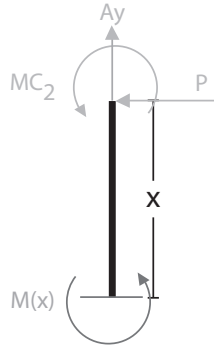
$$M(x)_1 = 10x^2 - 140x + 703,33$$

Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x + 5; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -6; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 1$$

Corte 2 (C-D):  $0 \leq x \leq 2 \downarrow$

**Figura 2.108. Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1**



Variación de los momentos:

$$\begin{aligned} +\circlearrowleft \Sigma M(x)_2 &= -M(x) + (P \cdot x) + M_{C2} = 0 \\ -M(x) + Px + 53,33 - 2P - 2N &= 0 \end{aligned}$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_2 = -53,33 - Px + 2P + 2N$$

Igualando a cero las redundantes:

$$M(x)_2 = -53,33$$

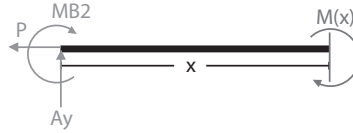
Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = -x + 2; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = 2; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$



Corte 3 (B-C):  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

**Figura 2.109. Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1**



Variación de los momentos:

$$+\oint \Sigma M(x)_3 = M(x) - (A_y \cdot x) - M_{B2} = 0$$

$$M(x) - x(40 - N) - (-213,33 + 2P + 6N) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_3 = -213,33 + 40x + 2P - Nx + 6N$$

Igualando a cero las redundantes:

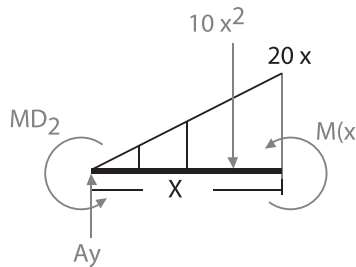
$$M(x)_3 = -213,33 + 40x$$

Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = 2; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -x + 6; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$

Corte 4 (D-E):  $0 \leq x \leq 2 \rightarrow$

**Figura 2.110. Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.1**



Variación de los momentos:

$$+\oint \Sigma M(x)_4 = M(x) - (A_y \cdot x) + M_{D2} = 0$$

$$M(x) - x(40 - N) + 53,33 - 2N + 10x^2 \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_4 = -3,33x^3 + 40x - 53,33 - Nx + 2N$$

Igualando a cero las redundantes:

$$M(x)_4 = -3,33x^3 + 40x - 53,33$$

Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -x + 2; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$

Ahora procedemos a ordenar una tabla para cada una de las redundantes, con las cuales se hallarán el giro y las deflexiones. El procedimiento para la solución de las integrales es similar al realizado en el método del trabajo virtual.

Para hallar el giro en el punto B, solo traemos las ecuaciones de momento cuando las redundantes son cero y las derivadas parciales respecto a la redundante, que para el giro es el momento ubicado en el nudo B. Luego se emplea la definición del primer teorema de Castigliano según su aplicación matemática por integrales.

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{\partial M}$	$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial M} \right) dx$
0-7 A-B	$10x^2 - 140x + 703,33$	1	$2.636, \overline{66}$
0-2 C-D	-53,33	0	0
0-4 B-C	$40x - 213,33$	0	0
0-2 D-E	$-3,33x^3 + 40x - 53,33$	0	0
		$\Sigma$	$2.636, \overline{66}$

Por lo tanto:

$$\theta_B = \frac{2.636, \overline{66}}{EI} \text{ horario}$$

Para hallar la deflexión horizontal en el punto D, solo traemos las ecuaciones de momento cuando las redundantes son cero y las derivadas parciales respecto a la redundante, que para la deflexión horizontal es la fuerza ubicada en el nudo D. Luego se aplica la definición del primer teorema de Castigliano.

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{\partial P}$	$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial M} \right) dx$
0-7 A-B	$10x^2-140x+703,33$	$-x+5$	5.955,83
0-2 C-D	-53,33	$-x+2$	$-106,66$
0-4 B-C	$40x-213,33$	2	-1.066,64
0-2 D-E	$-3,33x^3+40x-53,33$	0	0
		$\Sigma$	4.782,63

Por lo tanto:

$$\Delta_{DH} = \frac{4.782,63}{EI} \rightarrow$$

Para hallar la deflexión vertical en el punto E, solo traemos las ecuaciones de momento cuando las redundantes son cero y las derivadas parciales respecto a la redundante, que para la deflexión vertical es la fuerza ubicada en el nudo E. Luego se aplica la definición del primer teorema de Castigliano.

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{\partial N}$	$\Delta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial N} \right) dx$
0-7 A-B	$10x^2-140x+703,33$	-6	-15.819,(99)
0-2 C-D	-53,33	2	-213,(33)
0-4 B-C	$40x-213,33$	$-x+6$	-2.346,61
0-2 D-E	$-3,33x^3+40x-53,33$	$-x+2$	-58,(66)
		$\Sigma$	-18.438,58

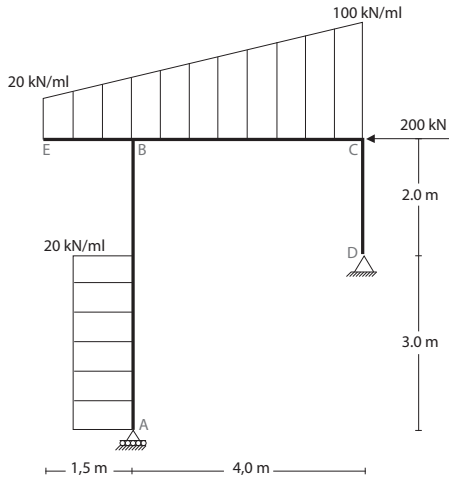
Por lo tanto:

$$\Delta_{EV} = \frac{18.438,58}{EI} \downarrow$$

**Ejemplo 6.2**

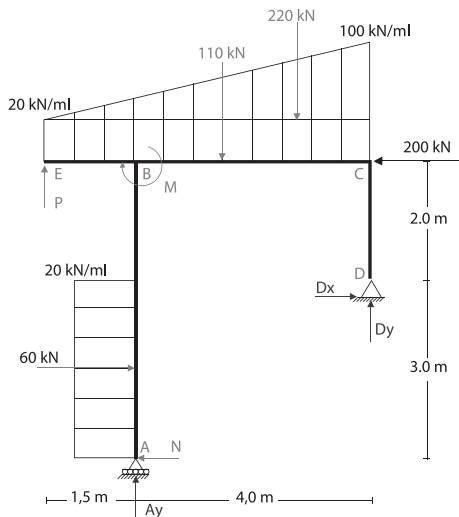
Determinar las siguientes deformaciones del pórtico de la figura 2.111: giro en el punto B, deflexión vertical en el punto E y deflexión horizontal en el punto A.

**Figura 2.111. Pórtico del ejemplo 6.2**



Para solucionar el ejercicio, se tiene que ubicar las redundantes, las cuales serán letras que representarán las fuerzas y los momentos. En el uno B suponemos un momento horario ( $M$ ); en el punto E, una fuerza hacia arriba ( $P$ ); y en el punto A, una fuerza hacia la izquierda ( $N$ ).

**Figura 2.112. Modelo con las redundantes del pórtico del ejemplo 6.2**



Se iniciará resolviendo las reacciones, como se explicó en el inciso 1.5.

*Sumatoria de fuerzas horizontales:*

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 60 - 200 - N + D_x = 0$$

$$D_x = 140 + N \rightarrow$$

*Sumatoria de momentos:*

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = (200 \cdot 5) - (60 \cdot 1,5) - (1,5 \cdot P) - (110 \cdot 1,25) - (220 \cdot 2,166) - (140 \cdot 3) - (3 \cdot N) - M - (4 \cdot D_y) = 0$$

$$D_y = 31,04 + 0,375P + 0,75N + 0,25M \uparrow$$

*Sumatoria de fuerzas verticales:*

$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - 110 - 220 + P + 31,04 + 0,375P + 0,75N + 0,25M = 0$$

$$A_y = 298,96 - 1,375P - 0,75N - 0,25M \uparrow$$

El equilibrio del pórtico se puede observar en la figura 2.113, donde:

$$A_y = 298,96 - 1,375P - 0,75N - 0,25M$$

$$D_y = 31,04 + 0,375P + 0,75N + 0,25M$$

$$D_x = 140 + N$$

$$B_{x_1} = 60 - N$$

$$B_{y_2} = 46,36 - P$$

$$B_{y_3} = 252,6 - 0,375P - 0,75N - 0,25M$$

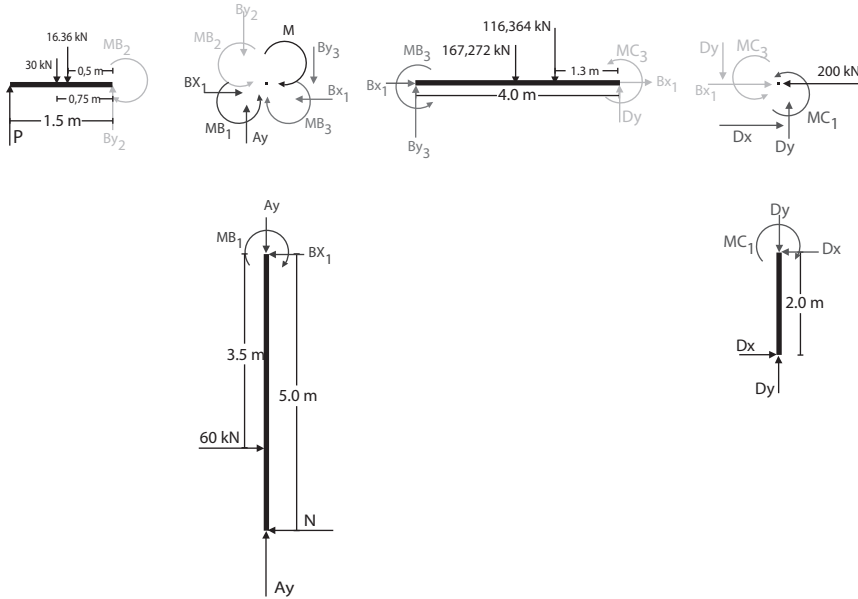
$$M_{B_1} = 210 - 5N$$

$$M_{B_2} = 30,68 - 1,5P$$

$$M_{B_3} = 240,68 - 5N - 1,5P - M$$

$$M_{C_1} = M_{C_3} = 280 + 2N$$

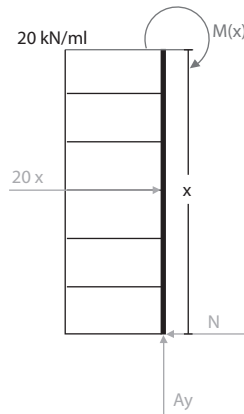
**Figura 2.113. Equilibrio del pórtico del ejemplo 6.2**



Se realizan los cortes como se mostró en el inciso 1.6:

Corte 1 (A-B):  $0 \leq x \leq 3 \uparrow$

**Figura 2.114. Corte 1 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2**



Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \sum M(x)_1 = -M(x) + 20x \cdot (0,5x) - (N \cdot x) = 0$$

$$-M(x) + 10x^2 - Nx = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_1 = 10x^2 - Nx$$

Igualando a cero las redundantes:

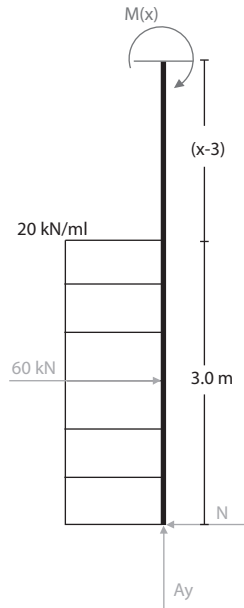
$$M(x)_1 = 10x^2$$

Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$

Corte 2 (A-B):  $3 \leq x \leq 5 \uparrow$

**Figura 2.115. Corte 2 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2**



Variación de los momentos:

$$\begin{aligned} +\circlearrowleft \Sigma M(x)_2 &= -M(x) + 60(x-1,5) - (N \cdot x) = 0 \\ &= -M(x) + 60x - 90 - Nx = 0 \end{aligned}$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_2 = 60x - 90 - Nx$$

Igualando a cero las redundantes:

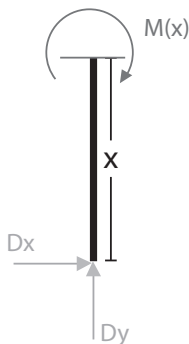
$$M(x)_2 = 60x - 90$$

Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$

Corte 3 (C-D):  $0 \leq x \leq 2\uparrow$

**Figura 2.116. Corte 3 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2**



Variación de los momentos:

$$+\cup \Sigma M(x)_3 = -M(x) + (Dx \cdot x) = 0$$

$$-M(x) + x(140 + N) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_3 = 140x + Nx$$

Igualando a cero las redundantes:

$$M(x)_3 = 140x$$

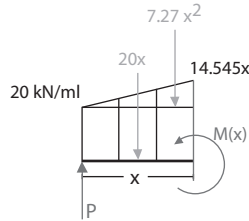
Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$



Corte 4 (E-B):  $0 \leq x \leq 1,5 \rightarrow$

**Figura 2.117. Corte 4 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2**



Haciendo relación de triángulos para determinar la variación de la carga respecto a x:

$$\frac{80}{5,5} = \frac{y}{x}$$

$$y = \frac{80}{5,5} * x$$

$$y = 14,545x$$

Hallamos la resultante:

$$R = \frac{(14,545x) * (x)}{2} = 7,27x^2: \text{resultante del triángulo}$$

$$R = 20 * x = 20x: \text{resultante del rectángulo}$$

Variación de los momentos:

$$+\sum M(x)_4 = M(x) + 20x(0,5x) + 7,27x^2 (x/3) - (P * x) = 0$$

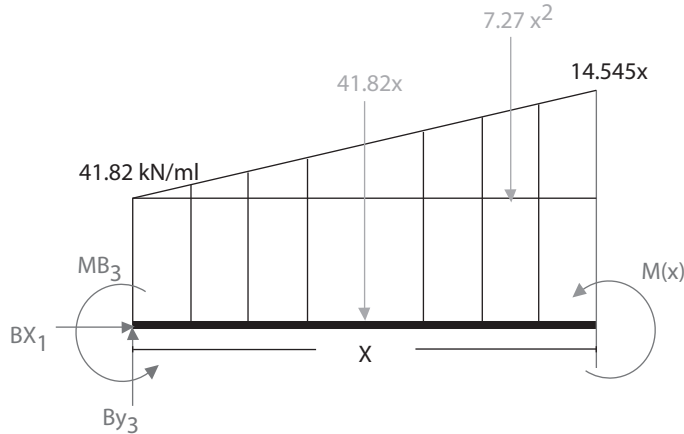
Despejando M(x) de la ecuación, tenemos:

$$+\sum M(x)_4 = M(x) + 20x(0,5x) + 7,27x^2(x/3) - (P * x) = 0$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = 0$$

Corte 5 (B-C):  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$

Figura 2.118. Corte 5 del modelo virtual del pórtico del ejemplo 6.2



La relación de triángulos es la misma que la del corte anterior, por lo que la resultante del triángulo será la misma, mientras que la resultante del rectángulo será:

$$R = 41,82 \cdot x = 41,82x$$

Variación de los momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M(x)_5 = M(x) + M_{B3} - (By_3 \cdot x) + 7,27x^2(x/3) + 41,82x(0,5x) = 0$$

$$M(x) + 240,68 - 5N - 1,5P - M - x(252,6 - 0,375P - 0,75N - 0,25M) + 7,27x^2(x/3) + 41,82x(0,5x) = 0$$

Despejando  $M(x)$  de la ecuación, tenemos:

$$M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,68 - 0,375Px - 0,75Nx - 0,25Mx + 1,5P + 5N + M$$

Igualando a cero las redundantes:

$$M(x)_5 = -2,424x^3 - 20,909x^2 + 252,576x - 240,68$$

Derivando respecto a cada redundante:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial P} = -0,375x + 1,5; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial N} = -0,75x + 5; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial M} = -0,25x + 1$$

Ahora procedemos a ordenar una tabla para cada una de las redundantes, con las cuales se hallarán el giro y las deflexiones. El procedimiento para la solución de las integrales es similar al realizado en el método del trabajo virtual.

Para hallar el giro en el punto B, solo traemos las ecuaciones de momento cuando las redundantes son cero y las derivadas parciales respecto a la redundante, que para el giro es el momento ubicado en el nudo B. Luego se emplea la definición del primer teorema de Castigliano según su aplicación matemática por integrales.

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{\partial M}$	$\theta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial M} \right) dx$
0-3 A-B	$10x^2$	0	0
3-5 A-B	$60x-90$	0	0
0-2 C-D	$140x$	0	0
0-1,5 E-B	$-2,424x^3 - 10x^2$	0	0
0-4 B-C	$-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240,61$	$-0,25x+1$	49,78
		$\Sigma$	49,78

Por lo tanto:

$$\theta_B = \frac{49,78}{EI} \text{ horario}$$

Para hallar la deflexión horizontal en el punto A, solo traemos las ecuaciones de momento cuando las redundantes son cero y las derivadas parciales respecto a la redundante, que para la deflexión horizontal es la fuerza ubicada en el nudo A. Luego se aplica la definición del primer teorema de Castigliano.

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{\partial N}$	$\Delta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial P} \right) dx$
0-3 A-B	$10x^2$	-x	-202,5
3-5 A-B	$60x-90$	-x	-1240
0-2 C-D	$140x$	x	373,33
0-1,5 E-B	$-2,424x^3 - 10x^2$	0	0
0-4 B-C	$-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240,61$	$-0,75x+5$	1.063,3
		$\Sigma$	-5,87

Por lo tanto:

$$\Delta_{AH} = \frac{5,87}{EI} \rightarrow$$

Para hallar la deflexión vertical en el punto E, solo traemos las ecuaciones de momento cuando las redundantes son cero y las derivadas parciales respecto a la redundante, que para la deflexión vertical es la fuerza ubicada en el nudo E. Luego se aplica la definición del primer teorema de Castigliano.

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{\partial N}$	$\Delta_x = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \left( \frac{\partial M(x)}{\partial P} \right) dx$
0-3 A-B	$10x^2$	0	0
3-5 A-B	$60x-90$	0	0
0-2 C-D	$140x$	0	0
0-1,5 E-B	$-2,424x^3 - 10x^2$	x	-16,338
0-4 B-C	$-2,42x^3 - 20,91x^2 + 252,58x - 240$	$-0,375x+5$	74,667
		$\Sigma$	58,33

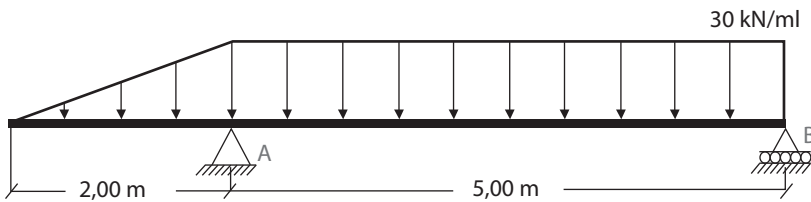
Por lo tanto:

$$\Delta_{EV} = \frac{58,33}{EI} \uparrow$$

## 2.6. Ejercicios propuestos

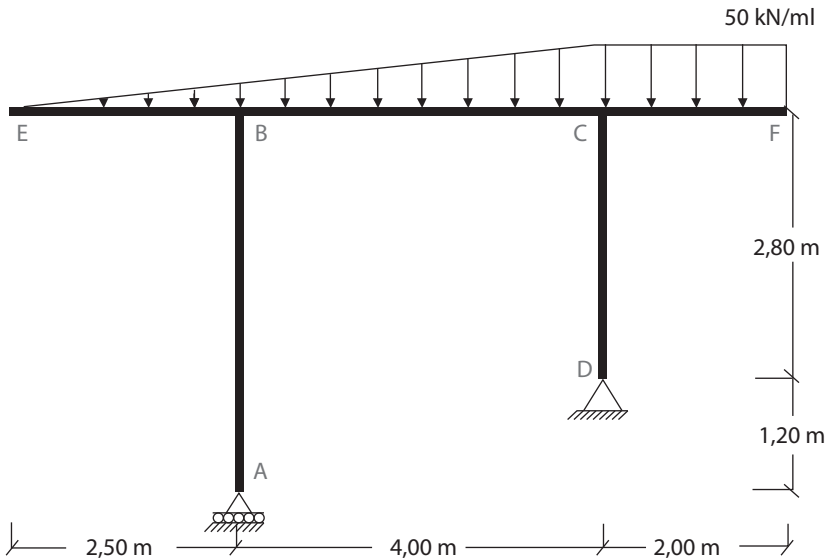
- Determinar el giro en el apoyo A y el desplazamiento en la mitad de la luz (2,5 m desde A) utilizando el método de área-momento, y hallar el giro del apoyo B empleando el método de la viga conjugada.

**Figura 2.119. Ejercicio propuesto 1**



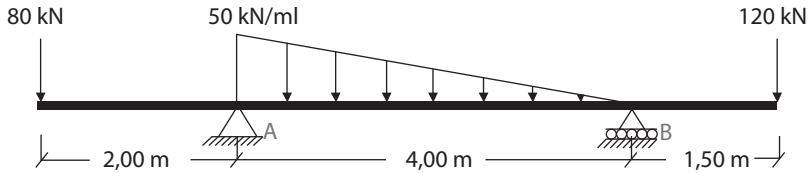
- Por medio de método de trabajo virtual, determinar el desplazamiento vertical en el nudo E, el desplazamiento horizontal en el apoyo A y el giro en los apoyos C y D.

**Figura 2.120. Ejercicio propuesto 2**



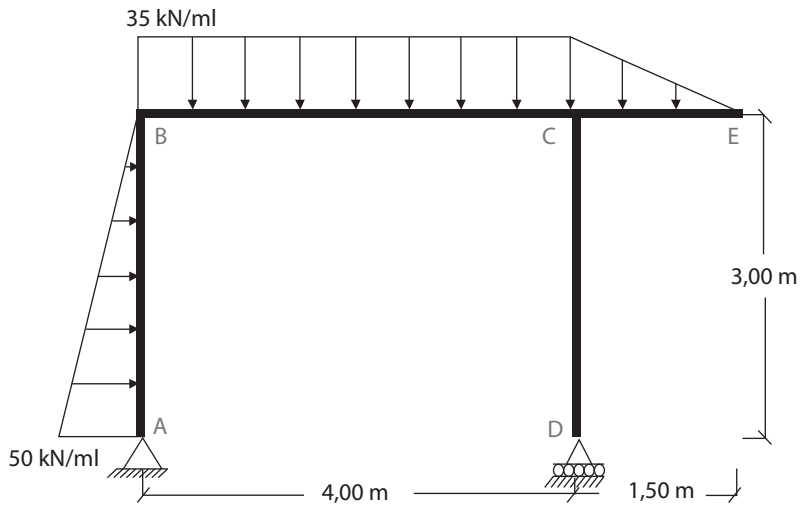
- Usando el método de doble integración, hallar las ecuaciones de giro y desplazamiento de la siguiente viga.

**Figura 2.121. Ejercicio propuesto 3**



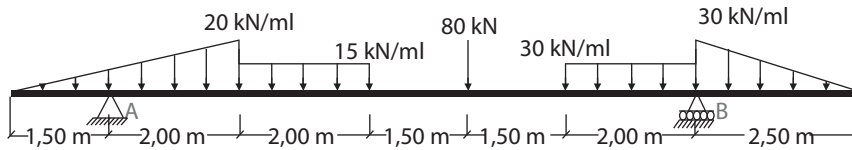
- A través del método del primer teorema de Castigliano, determinar el giro en los nudos B y E, el desplazamiento horizontal en el apoyo D y el desplazamiento vertical en el nudo E.

**Figura 2.122. Ejercicio propuesto 4**



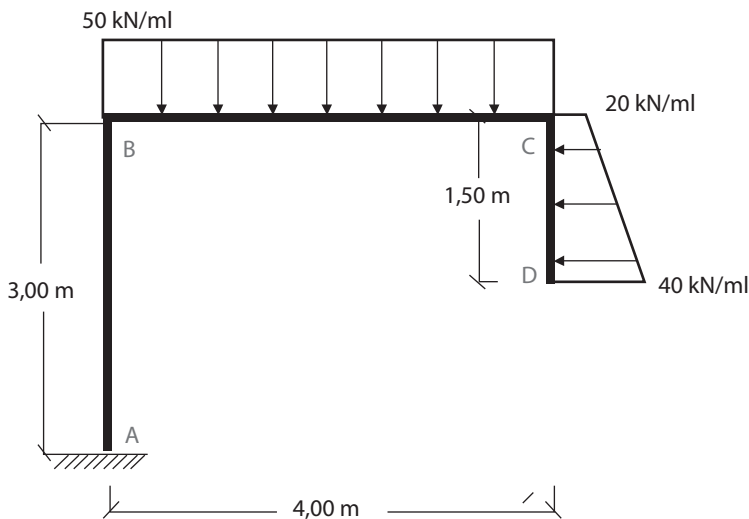
- Determinar las ecuaciones de giro y desplazamiento por el método de doble integración, y establecer el desplazamiento vertical en el centro de la luz, es decir, bajo la carga de 80 kN.

**Figura 2.123. Ejercicio propuesto 5**



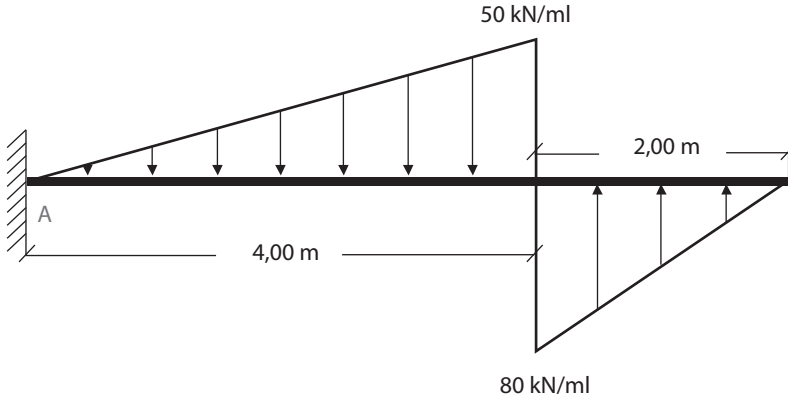
- Hallar el desplazamiento horizontal y vertical en el nudo E usando el método de trabajo virtual, y el giro de los nudos B y C por el método de área-momento.

**Figura 2.124. Ejercicio propuesto 6**



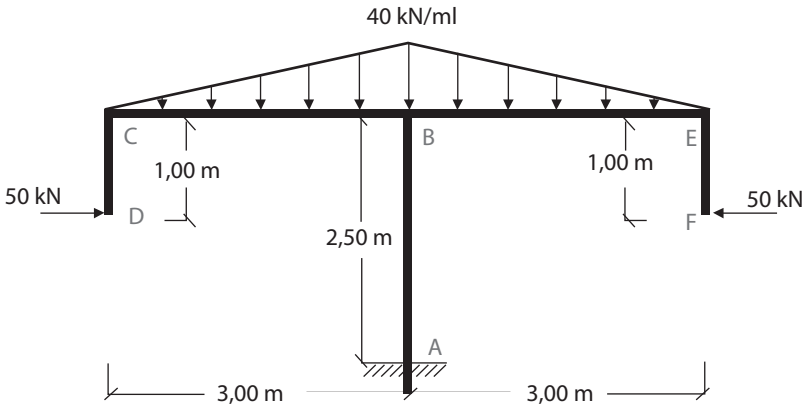
- Hallar el giro y el desplazamiento en la punta del voladizo utilizando el método de área-momento, el método de viga conjugada, el método de trabajo virtual y el método del primer teorema de Castigliano. Comparar resultados e identificar si existe una similitud entre ellos.

**Figura 2.125. Ejercicio propuesto 7**



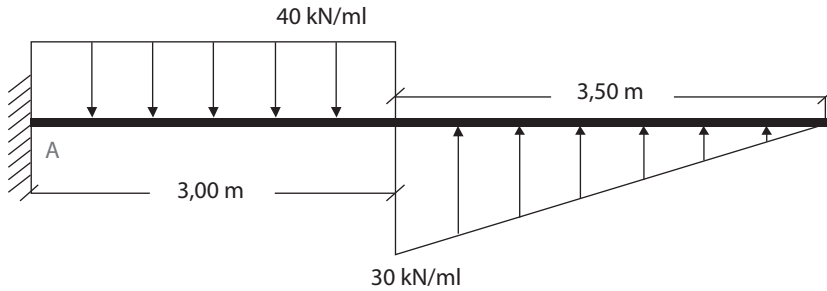
- Calcular el giro en el nudo B utilizando el método de área-momento, y determinar el giro y el desplazamiento horizontal en los nudos D y F por los métodos de trabajo virtual y primer teorema de Castigliano.

**Figura 2.126. Ejercicio propuesto 8**

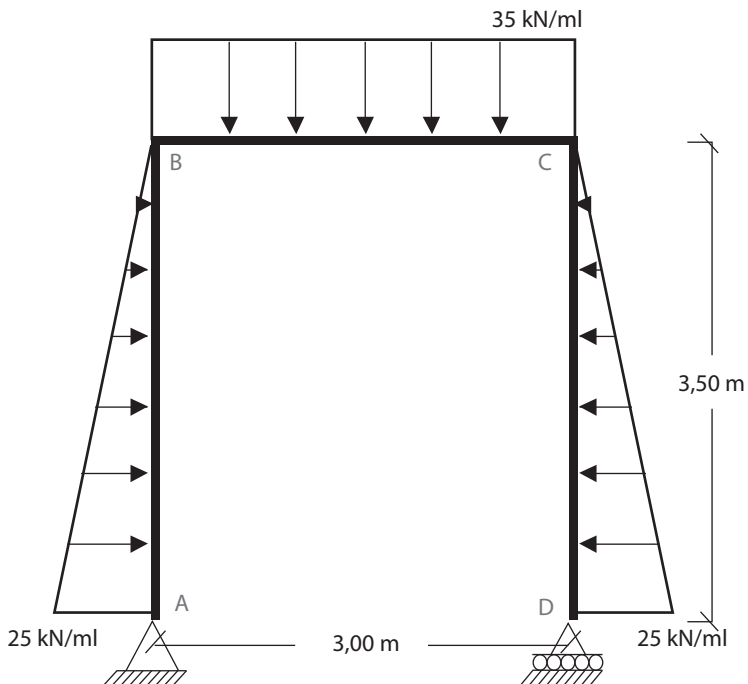


- Calcular las ecuaciones de giro y desplazamiento por el método de doble integración y determinar el desplazamiento máximo en todo el elemento utilizando los métodos de área-momento y viga conjugada.



**Figura 2.127. Ejercicio propuesto 9**

- Calcular el desplazamiento horizontal en el apoyo D por medio del método de área-momento, y determinar por los métodos de primer teorema de Castigliano y de trabajo virtual el giro en los nudos B y C.

**Figura 2.128. Ejercicio propuesto 10**

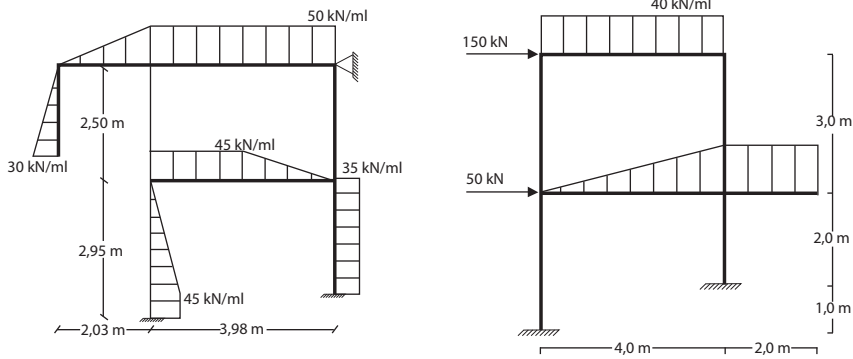
## CAPÍTULO 3

# MÉTODOS DE ANÁLISIS PARA ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

### 3.1. Introducción a las estructuras hiperestáticas

Cuando una estructura tiene más reacciones externas o fuerzas internas que las que pueden determinarse con las ecuaciones de la estática, es denominada como una estructura hiperestática o estáticamente indeterminada (McCormac, 2010). Por lo tanto, se trata de una estructura que no puede ser solucionada de forma manual usando los postulados tradicionales de la estática, es decir, hay que usar ciertas metodologías para plantear soluciones o los problemas de este tipo.

Casi todas las estructuras de concreto, como las losas, las vigas de apoyo y las columnas, son estáticamente indeterminadas (McCormac, 2010). Hasta el siglo XX, la ingeniería estadounidense evitaba el empleo de estructuras hiperestáticas, lo cual fue cambiado por tres grandes desarrollos: la soldadura de arco en las estructuras de acero; las estructuras monolíticas de concreto reforzado; y el avance tecnológico, lo que facilitó el análisis de dichas estructuras (McCormac, 2010). En la figura 3.1 se observan algunos ejemplos de estructuras hiperestáticas.

**Figura 3.1. Ejemplos de estructuras hiperestáticas**

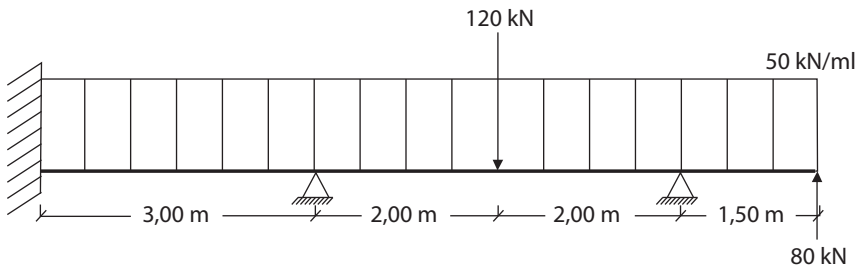
## 3.2. Aplicación del principio de superposición

Dentro de los teoremas que fundamentan el principio de superposición está la teoría de deflexión, en la cual se agrupan los métodos de análisis estructurales que se pueden aplicar a aquellas estructuras en las que no es posible despreciar los cambios geométricos producidos por las cargas. Por lo tanto, para evaluar las reacciones y fuerzas internas, es necesario partir de la situación de la deformada de la estructura.

Para mejor comprensión del uso del principio de superposición en elementos hiperestáticos para el cálculo de las reacciones, se presenta a continuación un ejemplo didáctico.

### 3.2.1. Ejemplo de principio de superposición

Determinar las reacciones en la figura 3.2 utilizando el principio de superposición.

**Figura 3.2. Ejemplo de principio de superposición**

Para iniciar con la solución del ejercicio, se halla el grado de indeterminación de la viga haciendo uso de la siguiente ecuación.

$$GI=R-(Ec.+Art.)$$

$$GI=4-(2+0)=0$$

Como el grado de indeterminación (GI) es mayor que cero, se estima que la viga es estáticamente indeterminada, es decir, hiperestática.

El principio de superposición nos indica que hay que separar el ejercicio complejo en varios ejercicios más simplificados cuya suma sea la misma que el ejercicio complejo.

El número de vigas en las que se debe separar la viga original está dado por:

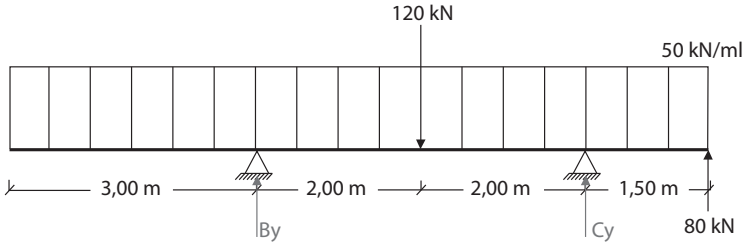
$$\#Vigas=GI+1=2+1=3$$

Lo anterior nos indica que la viga original debe ser separada en tres vigas simplificadas.

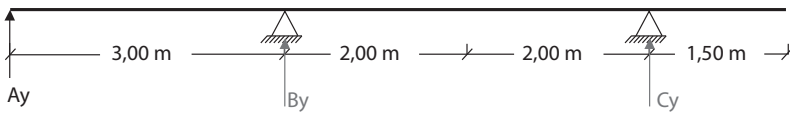
Para construir las nuevas vigas simplificadas que satisfagan a la original, se procede a seguir el proceso que se muestra a continuación:

- *Viga 1:* para construir la primera viga, se procede a quitarle a la viga original el número de reacciones que corresponde al grado de indeterminación (GI). Es decir, para el caso del presente ejercicio se deben quitar dos reacciones. Esta viga conserva todas las cargas. El ejercicio cuenta con dos apoyos articulados y con uno empotrado. Para efectos de solución del ejercicio, se procederá a quitar el empotramiento, el cual tiene dos reacciones (una fuerza vertical y un momento) (figura 3.3).
- *Viga 2:* se dibuja la viga solo con los apoyos escogidos, es decir, sin el empotramiento, se escoge una de las dos reacciones que se decidió quitar y se ubica en forma de incógnita. En esta viga se colocará el momento como una reacción MA. La viga no lleva cargas (figura 3.4).
- *Viga 3:* se dibuja la viga solo con los apoyos escogidos, es decir, sin el empotramiento, se escoge la otra reacción que se decidió quitar y se ubica en forma de incógnita. En esta viga se colocará la fuerza vertical como una reacción Ay. La viga no lleva cargas (figura 3.5).

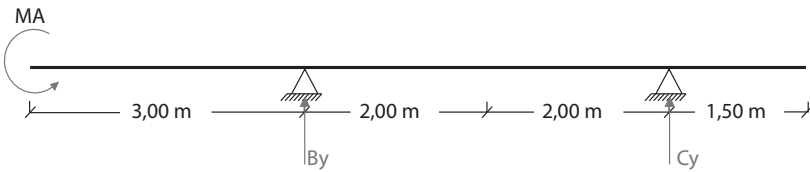
**Figura 3.3. Viga 1. Ejemplo de principio de superposición**



**Figura 3.4. Viga 2. Ejemplo de principio de superposición**



**Figura 3.5. Viga 3. Ejemplo de principio de superposición**



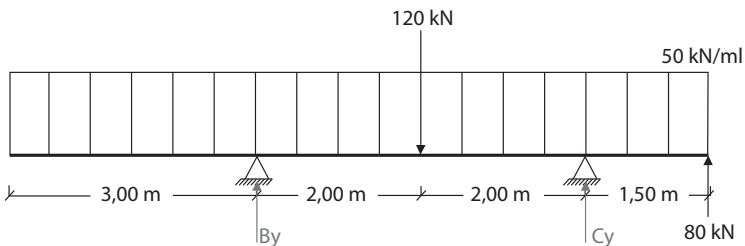
Hay que tener en cuenta que, aunque no existe ningún apoyo al inicio de las vigas 1, 2 y 3, es decir, a una distancia cero, si se presenta un empotramiento en la viga original. Entonces las tres vigas, al sumarse, deben satisfacer lo siguiente:

$$\Delta_A = \Delta_{A1} + \Delta_{A2} + \Delta_{A3} = 0$$

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} + \theta_{A3} = 0$$

**Viga 1**

**Figura 3.6. Viga 1. Determinación de incógnitas  $B_{y1}$  y  $C_{y1}$**



Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = (80 \text{ kN} \cdot 5,5 \text{ m}) - (425 \text{ kN} \cdot 1,25 \text{ m}) - (120 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m}) + 4C_y = 0$$

Despejando  $C_y$  de la ecuación, se tiene:

$$C_{y1} = 82,81 \text{ KN}\uparrow$$

La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = B_y + 82,81 \text{ kN} + 80 \text{ kN} - 120 \text{ kN} - 425 \text{ kN} = 0$$

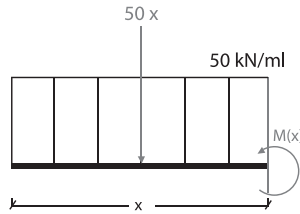
Despejando  $B_y$  de la ecuación, se tiene:

$$B_{y1} = 382,19 \text{ KN}\uparrow$$

Se realizan los cortes para determinar las ecuaciones del diagrama de momentos, así como se explicó en el literal 1.6 de la presente guía.

Corte  $0 \leq x \leq 3 \rightarrow$

**Figura 3.7. Primer corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición**



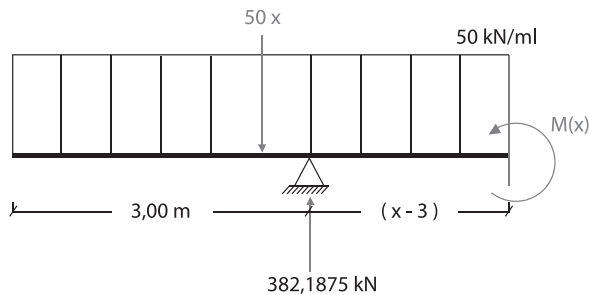
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = M(x) + 25x^2 = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_1 = -25x^2$$

Corte  $3 \leq x \leq 5 \rightarrow$

**Figura 3.8. Segundo corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición**



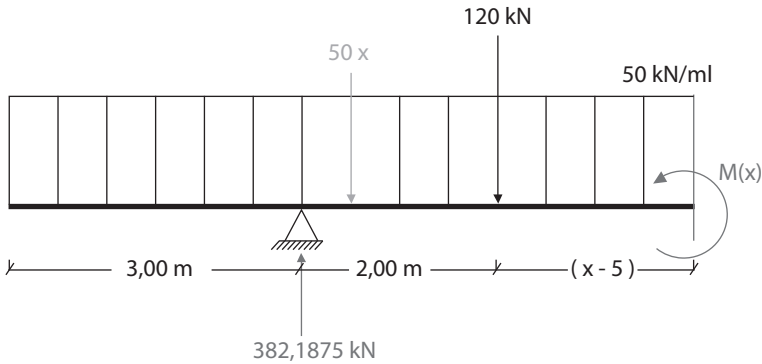
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = M(x) + 25x^2 - 382,19(x-3) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_2 = -25x^2 + 382,19x - 1.146,57$$

Corte  $5 \leq x \leq 7 \rightarrow$

**Figura 3.9. Tercer corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición**



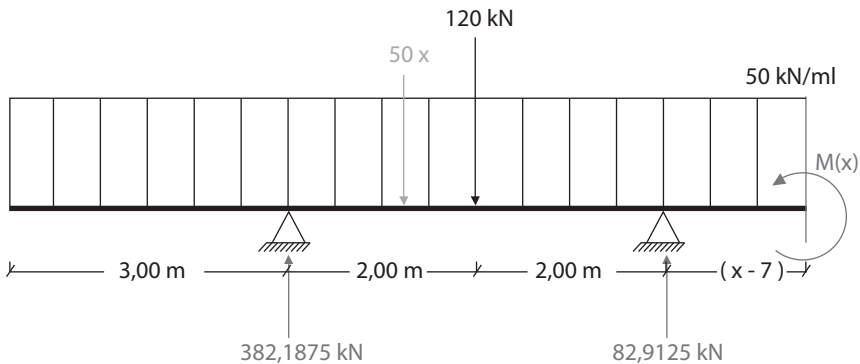
$$+\Sigma M_3 = M(x) + 25x^2 - 382,19(x-3) + 120(x-5) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_3 = -25x^2 + 262,19x - 546,57$$

Corte  $7 \leq x \leq 8.5 \rightarrow$

**Figura 3.10. Cuarto corte viga 1. Ejemplo de principio de superposición**



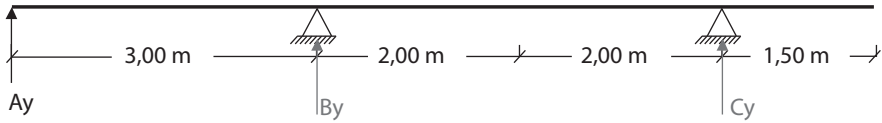
$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = M(x) + 25x^2 - 382,19(x-3) + 120(x-5) - 82,81(x-7) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_3 = -25x^2 + 345x - 1.126,24$$

## Viga 2

Figura 3.11. Viga 2. Determinación de incógnitas  $B_{y2}$  y  $C_{y2}$



Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -3A_y + 4C_y = 0$$

Despejando  $C_y$  de la ecuación, se tiene:

$$C_{y2} = \frac{3}{4} A_y \uparrow$$

La sumatoria de fuerzas es:

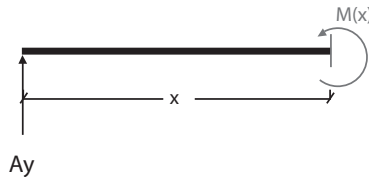
$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y - B_y + \frac{3}{4} A_y = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, se tiene:

$$B_{y2} = \frac{7}{4} A_y \downarrow$$

Corte  $0 \leq x \leq 3 \rightarrow$

Figura 3.12. Primer corte viga 2. Ejemplo de principio de superposición



$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = M(x) - A_y x = 0$$

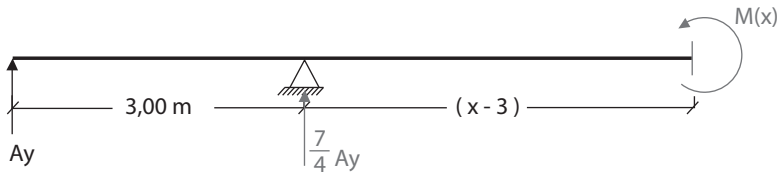


Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_1 = Ayx$$

Corte  $3 \leq x \leq 7 \rightarrow$

**Figura 3.13. Segundo corte viga 2. Ejemplo de principio de superposición**



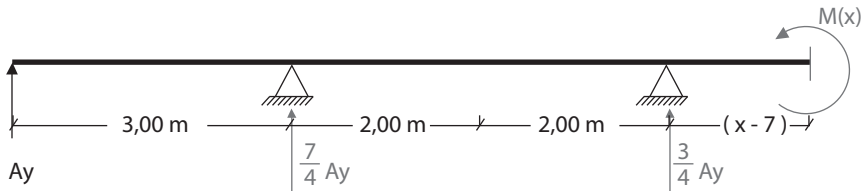
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = M(x) - Ayx + \frac{7}{4}Ay(x-3) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_2 = \frac{3}{4}Ay(7-x)$$

Corte  $7 \leq x \leq 8,5 \rightarrow$

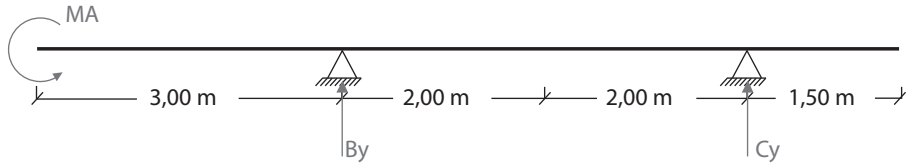
**Figura 3.14. Tercer corte viga 2. Ejemplo de principio de superposición**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = M(x) - Ayx + \frac{7}{4}Ay(x-3) - \frac{3}{4}Ay(x-7) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_3 = 0$$

**Viga 3****Figura 3.15. Viga 3. Determinación de incógnitas  $B_{y3}$  y  $C_{y3}$** 

Se hallan las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía. Así pues, la sumatoria de momentos es:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -4C_y + M_A = 0$$

Despejando  $C_y$  de la ecuación, se tiene:

$$C_{y3} = \frac{1}{4} M_A \uparrow$$

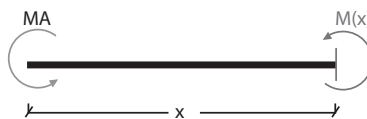
La sumatoria de fuerzas es:

$$+\uparrow \Sigma F_y = -B_y + \frac{1}{4} M_A = 0$$

Despejando  $B_y$  de la ecuación, se tiene:

$$B_{y3} = \frac{1}{4} M_A \downarrow$$

Corte  $0 \leq x \leq 3 \rightarrow$

**Figura 3.16. Primer corte viga 3. Ejemplo de principio de superposición**

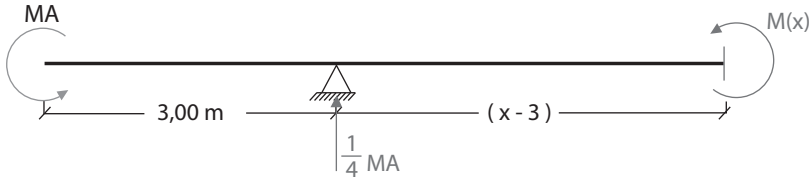
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = M(x) + M_A = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_1 = -M_A$$

Corte  $3 \leq x \leq 7 \rightarrow$

**Figura 3.17. Segundo corte viga 3. Ejemplo de principio de superposición**



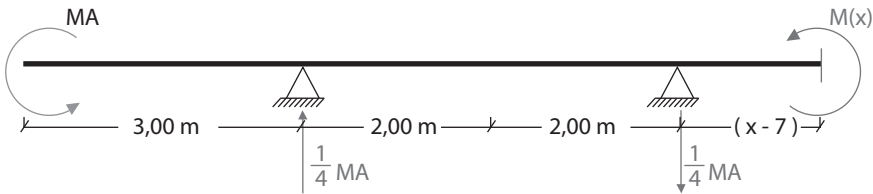
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = M(x) + M_A - 1/4 M_A (x-3) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_2 = \frac{1}{4} M_A (x - 7)$$

Corte  $7 \leq x \leq 8,5 \rightarrow$

**Figura 3.18. Tercer corte viga 3. Ejemplo de principio de superposición**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = M(x) + M_A - \frac{1}{4} M_A (x - 3) + \frac{1}{4} M_A (x - 7) = 0$$

Despejando  $M(x)$ , se obtiene:

$$M(x)_3 = 0$$

Se procede a determinar los giros y desplazamientos en el punto inicial de la viga. Esto se debe a que en ese punto se encuentra un empotramiento en la viga original, el cual fue eliminado para dar solución al ejercicio.

Los giros y desplazamientos se pueden hallar por cualquiera de los métodos que se han usado en la presente guía para solucionar elementos isostáticos. Para efectos de solución se usará el método del trabajo virtual. Al respecto, tenemos que:

- El modelo real de la viga 2 es igual al modelo virtual de  $\Delta_A$  cuando  $Ay=1$ .  
 $0 \leq x \leq 3 \quad \partial M(x)_1 = x$   
 $3 \leq x \leq 7 \quad \partial M(x)_2 = 3/4 (7-x)$   
 $7 \leq x \leq 8,5 \quad \partial M(x)_3 = 0$
- El modelo real de la viga 3 es igual al modelo virtual  $\theta_A$  cuando  $M_A=1$ .  
 $0 \leq x \leq 3 \quad \partial M(x)_1 = -1$   
 $3 \leq x \leq 7 \quad \partial M(x)_2 = 1/4 (x-7)$   
 $7 \leq x \leq 8,5 \quad \partial M(x)_3 = 0$

Entonces, para hallar  $\Delta_A$  se deben sumar los desplazamientos  $\Delta_A$  producidos por cada una de las vigas, y después igualar a cero con el fin de hallar las incógnitas.

Con la viga 1  $\Delta_{A1}$ :

Tramo	M(x)	$\partial M(x)$	$\int_0^L M(x) \partial M(x) dx$
0-3	$-25x^2$	x	-506,25
3-5	$-25x^2 + 382,19x - 1.146,57$	$\frac{3}{4}(7-x)$	-208,74
5-7	$-25x^2 + 345x - 1.126,24$	0	196,26
			<b>-518,72</b>

$$\Delta_{A1} = 518,72 \downarrow$$

Con la viga 2  $\Delta_{A2}$ :

Tramo	M(x)	$\partial M(x)(\Delta)$	$\int_0^L M(x) \partial M(x) dx$
0-3	$Ayx$	x	$9Ay$
0-7	$\frac{3}{4}Ay(7-x)$	$\frac{3}{4}(7-x)$	$12Ay$
			$21Ay$

$$\Delta_{A2} = 21Ay \uparrow$$

Con la viga 3  $\Delta_{A3}$ :

Tramo	$M(x)$	$\partial M(x)(\Delta)$	$\int_0^L M(x)\partial M(x)dx$
0-3	$-M_A$	$x$	$-4,5M_A$
0-7	$\frac{1}{4}M_A(x-7)$	$\frac{3}{4}(7-x)$	$-4M_A$
			<b><math>-8,5M_A</math></b>

$$\Delta_{A3} = 8,5M_A \downarrow$$

Según la hipótesis hecha al iniciar la solución del ejercicio:

$$\Delta_A = \Delta_{A1} + \Delta_{A2} + \Delta_{A3} = 0$$

Con la viga 1  $\theta_{A1}$ :

Tramo	$M(x)$	$\partial M(x)$	$\int_0^L M(x)\partial M(x)dx$
0-3	$-25x^2$	$-1$	225
3-5	$-25x^2 + 382,19x - 1.146,57$	$\frac{1}{4}(x-7)$	69,58
5-7	$-25x^2 + 345x - 1.126,24$	0	-65,42
			<b>229,16</b>

$$\theta_{A1} = 229,16 \text{ antihorario}$$

Con la viga 2  $\theta_{A2}$ :

Tramo	$M(x)$	$\partial M(x)(\theta)$	$\int_0^L M(x)\partial M(x)dx$
0-3	$Ayx$	$-1$	$-4,5Ay$
0-7	$\frac{3}{4}Ay(7-x)$	$\frac{1}{4}(x-7)$	$-4Ay$
			<b><math>-8,5Ay</math></b>

$$\theta_{A2} = 8,5Ay \text{ horario}$$

Con la viga 3  $\Rightarrow \Delta_{A3}, \theta_{A3}$ :

Tramo	$M(x)$	$\partial M(x)(\theta)$	$\int_0^L M(x)\partial M(x)dx$
0-3	$-M_A$	-1	$3M_A$
0-7	$\frac{1}{4}M_A(x-7)$	$\frac{1}{4}(x-7)$	$\frac{4}{3}M_A$
			$\frac{13}{3}M_A$

$$\theta_{A3} = \frac{13}{3}M_A \text{ antihorario}$$

Según la hipótesis hecha al iniciar la solución del ejercicio:

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} + \theta_{A3} = 0$$

$$229,16 - 8,5Ay + \frac{13}{3}M_A = 0 \text{ (Ec. 3.2.1.2)}$$

Realizando la solución del sistema de ecuación de 2 x 2:

$$-518,72 + 21Ay - 8,5M_A = 0$$

$$229,16 - 8,5Ay + \frac{13}{3}M_A = 0$$

En respuesta se tiene:

$$Ay = 16\text{kN}\uparrow; M_A = 21,52 \text{ kNm}\curvearrowright$$

Para determinar los valores de  $B_y$  y  $C_y$  de la viga original, se procede a hacer una suma entre las reacciones de cada una de las vigas simplificadas:

$$B_y = B_{y1} + B_{y2} + B_{y3}$$

$$B_y = 382,19 - \frac{7}{4}Ay + \frac{1}{4}M_A$$

$$B_y = 382,19 - \frac{7}{4}(16) + \frac{1}{4}(-21,49)$$

$$B_y = 348,815 \text{ kN}\uparrow$$

$$C_y = C_{y1} + C_{y2} + C_{y3}$$

$$C_y = 82,81 + \frac{3}{4}Ay - \frac{1}{4}M_A$$

$$C_y = 82,81 + \frac{3}{4}(16) - \frac{1}{4}(-21,49)$$

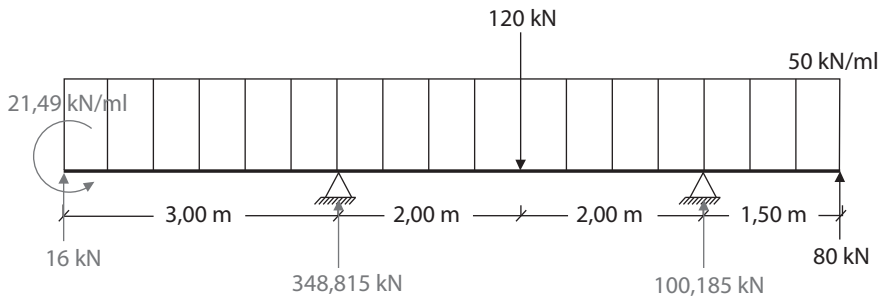
$$C_y = 100,185 \text{ kN}\uparrow$$

En respuesta se tiene:

$$B_y = 348,815 \text{ kN}\uparrow; C_y = 100,185 \text{ kN}\uparrow$$

Por lo tanto, para la viga hiperestática propuesta, las reacciones son las que se representan en la figura 3.19.

**Figura 3.19. Reacciones del ejemplo de principio de superposición**



### 3.3. Segundo teorema de Castigliano

El segundo teorema de Castigliano, conocido como el método del trabajo mínimo, está relacionado con el método de las deformaciones compatible y además es muy efectivo para el análisis de estructuras hiperestáticas o estáticamente indeterminadas (McCormac, 2010).

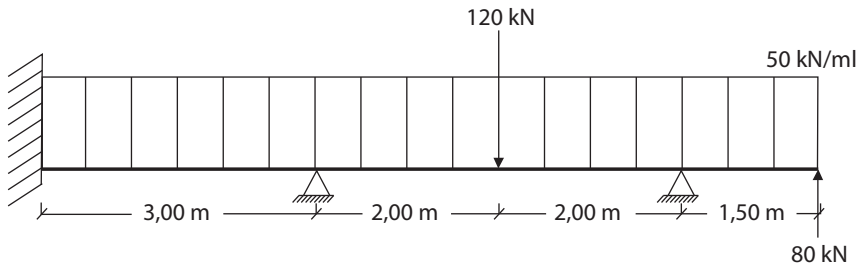
En la presente guía se habló acerca del primer teorema de Castigliano en el apartado 2.5.3, en donde se mostró que la primera derivada parcial del trabajo interno total con respecto a una carga redundante —ya sea real o imaginaria—, aplicada en algún punto de la estructura, es igual a la deflexión en la dirección de la redundante (McCormac, 2010). Por lo tanto, el método del segundo teorema de Castigliano consiste en escribir ecuaciones en términos de una redundante que puede ser para cualquier punto restringido de una estructura estáticamente indeterminada, de tal forma que, al conocerse los desplazamientos en los puntos considerados (ya que estos son apoyos a los cuales se les pueden identificar las deformaciones), las incógnitas en las ecuaciones no serían otras que las reacciones que debería tener el sistema para que exista una coherencia con lo planteado.

Para una mejor comprensión de lo señalado anteriormente, se propone el ejercicio de una viga hiperestática con grado de indeterminación igual a dos, a la cual ya se le han hallado las reacciones usando el principio de superposición con ayuda del método de trabajo virtual, y con el que se pretende hacer una comparación con el segundo teorema de Castigliano.

### 3.3.1. Ejercicio: segundo teorema de Castigliano

Determinar las reacciones del ejercicio de la figura 3.20 usando el método del segundo teorema de Castigliano.

**Figura 3.20. Ejercicio de segundo teorema de Castigliano**



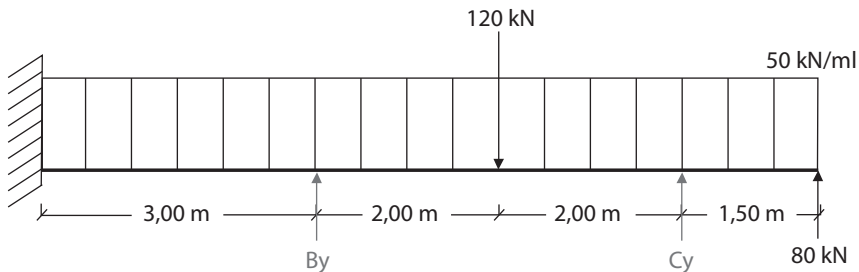
Primero se determina el grado de indeterminación de la estructura:

$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 4 - (2 + 0) = 2$$

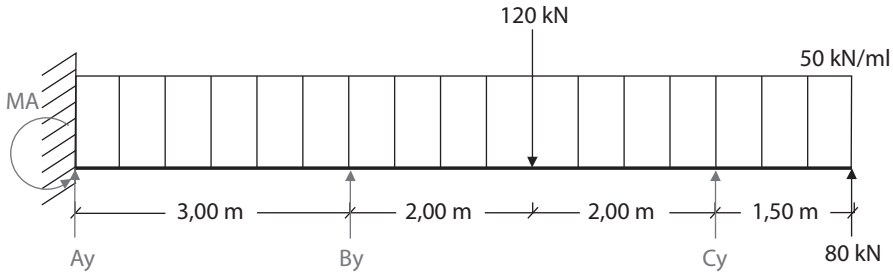
El siguiente paso es tomar dos reacciones, sin importar cuáles sean, y transformarlas en fuerzas o momentos redundantes, como incógnitas, tal y como se muestra en la figura 3.21.

**Figura 3.21. Ejercicio ubicando las redundantes segundo teorema de Castigliano**



Luego se procede a determinar las reacciones como se enseñó en el literal 1.5 de la presente guía.



**Figura 3.22. Ejercicio con reacciones ubicadas. Segundo teorema de Castigliano**

Sumatoria de momentos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = M_A + 3B_y + 7C_y + (80 \text{ kN} \cdot 8,5\text{m}) - (120 \text{ kN} \cdot 5\text{m}) - (425 \text{ kN} \cdot 4,25\text{m}) = 0$$

Despejando  $M_A$  de la ecuación, tenemos:

$$M_A = 1.726,25 - 3B_y - 7C_y$$

Sumatoria de fuerzas:

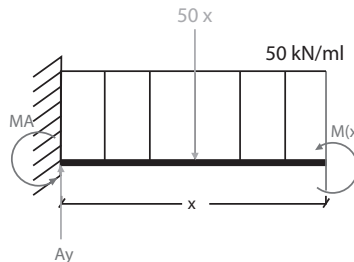
$$+\uparrow \Sigma F_y = A_y + B_y + C_y + 80 \text{ kN} - 425 \text{ kN} - 120 \text{ kN} = 0$$

Despejando  $A_y$  de la ecuación, se tiene:

$$A_y = 465 - B_y - C_y$$

Se procede a determinar las ecuaciones de momentos realizando los cortes, así como se explicó en el literal 1.6 de la presente guía.

Corte  $0 \leq x \leq 3 \rightarrow$

**Figura 3.23. Primer corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano**

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = M(x) + 25x^2 - A_y x + M_A = 0$$

Se despeja  $M(x)_1$  de la ecuación:

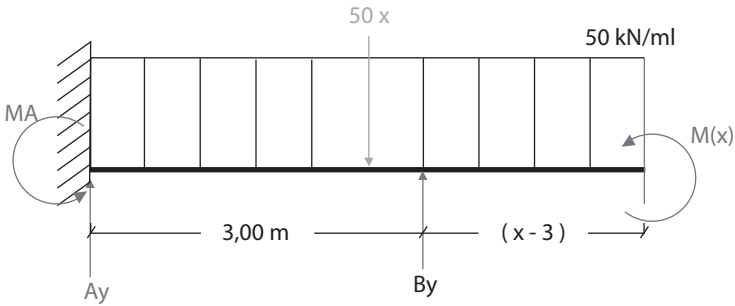
$$M(x)_1 = -25x^2 + 465x - 1.726,25 + 3B_y - B_y x + 7C_y - C_y x$$

Luego se deriva con respecto a las redundantes:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial B_y} = 3 - x; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial C_y} = 7 - x$$

Corte  $3 \leq x \leq 5 \rightarrow$

**Figura 3.24. Segundo corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = M(x) + 25x^2 - A_yx + M_A - B_y(x-3) = 0$$

Se despeja  $M(x)_2$  de la ecuación:

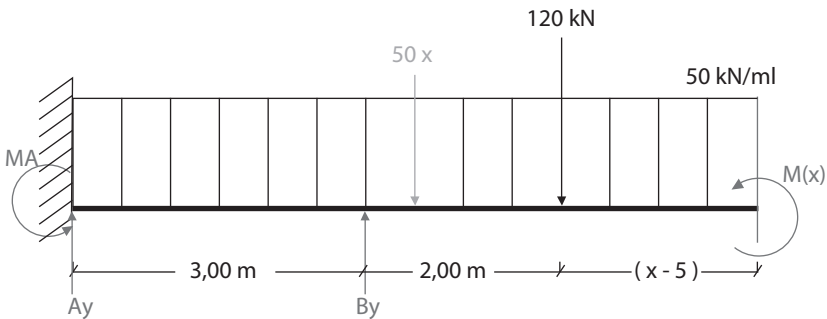
$$M(x)_2 = -25x^2 + 465x - 1.726,25 + 7C_y - C_yx$$

Luego se deriva con respecto a las redundantes:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial B_y} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial C_y} = 7 - x$$

Corte  $5 \leq x \leq 7 \rightarrow$

**Figura 3.25. Tercer corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano**



$$+\mathcal{U}\Sigma M_3 = M(x) + 25x^2 - Ayx + M_A - By(x-3) + 120(x-5) = 0$$

Se despeja  $M(x)_3$  de la ecuación:

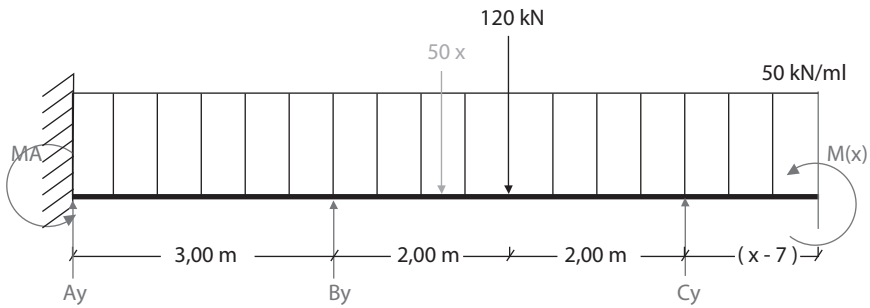
$$M(x)_3 = -25x^2 + 345x - 1.126,25 + 7Cy - Cyx$$

Luego se deriva con respecto a las redundantes:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial By} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial Cy} = 7 - x$$

Corte  $7 \leq x \leq 8,5 \rightarrow$

**Figura 3.26. Cuarto corte. Ejercicio segundo teorema de Castigliano**



$$+\mathcal{U}\Sigma M_3 = M(x) + 25x^2 - Ayx + M_A - By(x-3) + 120(x-5) - Cy(x-7) = 0$$

Se despeja  $M(x)_4$  de la ecuación:

$$M(x)_4 = -25x^2 + 345x - 1.126,25$$

Luego se deriva con respecto a las redundantes:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial By} = 0; \quad \frac{\partial M(x)}{\partial Cy} = 0$$

Se organizan las ecuaciones de momentos y las ecuaciones diferenciales que se crearon a partir de derivar las ecuaciones de momento con respecto a cada una de las incógnitas:

Tramo	M(x)	$\frac{\partial M(x)}{dBy}$	$\frac{\partial M(x)}{dCy}$
0-3	$-25x^2 + 465x - 1.726,25 + 3By - Byx + 7Cy - Cyx$	$3-x$	$7-x$
3-5	$-25x^2 + 465x - 1.726,25 + 7Cy - Cyx$	0	$7-x$
5-7	$-25x^2 + 345x - 1.126,25 + 7Cy - Cyx$	0	$7-x$
7-8.5	$-25x^2 + 345x - 1.126,25$	0	0

Se procede a organizar las integrales según lo indica el método del segundo teorema de Castigliano, lo cual se hace de la siguiente manera: primero se toma la expresión para determinar la ecuación con respecto a la redundante  $By$ :

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M(x)}{dBy} dx$$

El número de integrales que se deben sumar será el número de grado de indeterminación más 1, es decir, para el presente ejercicio es de 3.

Las integrales quedan de la siguiente forma:

$$\int_0^3 (-25x^2 + 465x - 1.726,25)(3-x) dx + \int_0^3 (3By - Byx)(3-x) dx + \int_0^3 (7Cy - Cyx)(3-x) dx$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} & -5.844,375 + 9By + 27Cy \\ & 9By + 27Cy = 5.844,375 \text{ (Ec.3.3.1)} \end{aligned}$$

La expresión para determinar la ecuación con respecto a redundante  $Cy$  es:

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M(x)}{dCy} dx$$

Para organizar las integrales de esta sección, se sigue el mismo paso explicado anteriormente, con la particularidad de que aquí hay que tomar en cuenta los tres tramos debido a que las integrales tienen valor numérico.

Primera suma de integrales:

$$\int_0^3 (-25x^2 + 465x - 1.726,25)(7 - x)dx + \int_0^3 (3By - Byx)(7 - x)dx \\ + \int_0^3 (7Cy - Cyx)(7 - x)dx$$

Resolviendo:

$$-19.089,375 + 27By + 93Cy$$

Segunda suma de integrales:

$$\int_3^5 (-25x^2 + 465x - 1.726,25)(7 - x)dx + \int_3^5 (0)(7 - x)dx + Cy \int_3^5 (7 - x)(7 - x)dx$$

Resolviendo:

$$-1.824,167 + 18,667Cy$$

Tercera suma de integrales:

$$\int_5^7 (-25x^2 + 465x - 1.726,25)(7 - x)dx + \int_5^7 (0)(7 - x)dx + \int_5^7 (7Cy - xCy)(7 - x)dx$$

Resolviendo:

$$40,833 + 2,667Cy$$

Sumando los tres efectos, se tiene:

$$-19.089,375 + 27By + 93Cy + -1.824,167 + 18,667Cy + 40,833 + 2,667Cy$$

Simplificando:

$$27By + 114,334Cy = 20.872,709 \text{ (Ec.3.3.2)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de 2 x 2 con la Ec.3.3.1 y la Ec.3.3.2:

$$9By + 27Cy = 5.844,375$$

$$27By + 114,334Cy = 20.872,709$$

Se obtiene:

$$By = 348,82 \text{ kN}\uparrow; Cy = 100,18 \text{ kN}\uparrow$$

Reemplazando  $B_y$  y  $C_y$  en las ecuaciones de las reacciones:

$$M_A = 1.726,25 - 3B_y - 7C_y$$

$$M_A = 1.726,25 - 3(348,82) - 7(100,18)$$

$$A_y = 16 \text{ kN}$$

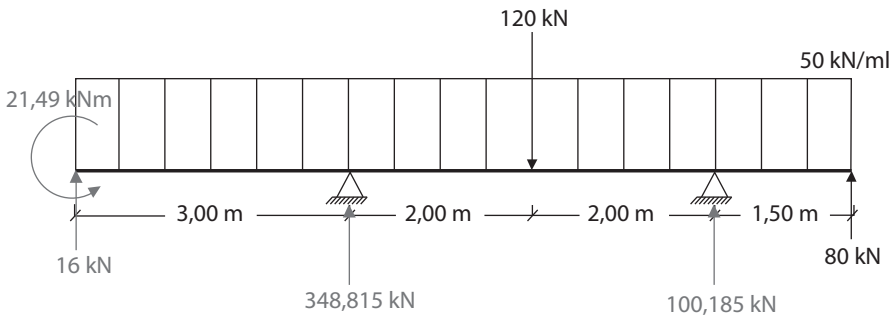
$$A_y = 465 - B_y - C_y$$

$$A_y = 465 - (348,82) - (100,18)$$

$$M_A = 21,47 \text{ kNm}$$

$$A_y = 16 \text{ kN} \uparrow; M_A = 21,47 \text{ kNm} \curvearrowright$$


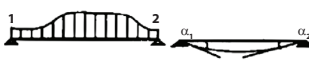
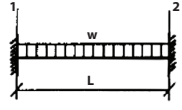
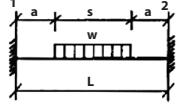
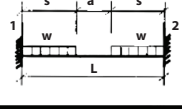
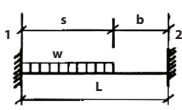
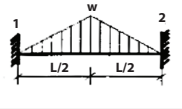
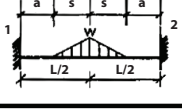
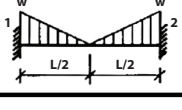
**Figura 3.27. Reacciones del ejercicio de segundo teorema de Castigliano**



### 3.4. Vigas con momentos de empotramiento


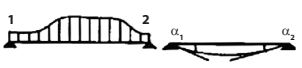
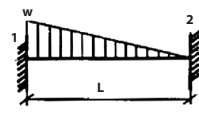
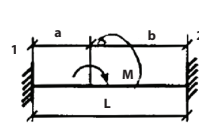
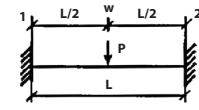
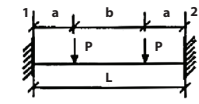
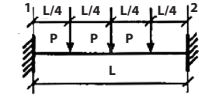
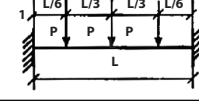
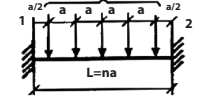
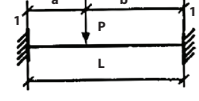
Las tablas 3.1 y 3.2 corresponden a vigas con empotramiento perfecto y son extraídas del libro de análisis de estructuras de Jairo Uribe Escamilla (2000).

**Tabla 3.1. Momentos de empotramiento y rotaciones en los apoyos para casos comunes de carga**

Diagramas de carga		
	$M_1 = -M_2 = \frac{wL^2}{12}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{wL^2}{24}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws}{24L} (3L^2 - s^2)$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{ws}{48} (3L^2 - s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws^2}{6L} (2L - a)$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{ws^2}{12} (2L - a)$
	$M_1 = \frac{ws^2}{12L^2} [2L(3L - 4s) + 3s^2]$ $M_2 = \frac{ws^3}{12L^2} (4L - 3s)$	$\alpha_1 = \frac{ws^2}{24L^2} (2L - s)^2$ $\alpha_2 = \frac{ws^2}{24L} (2L^2 - s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{5wL^2}{96}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{5wL^3}{192}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{ws}{24L} (3L^2 - 2s^2)$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{ws}{48} (3L^2 - 2s^2)$
	$M_1 = -M_2 = \frac{wL^2}{32}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{wL^3}{64}$

Fuente: Uribe (2000).

Tabla 3.2. Momentos de empotramiento y rotaciones en los apoyos para casos comunes de carga

Diagrama de carga		
	$M_1 = \frac{wL^2}{20}$ $M_2 = \frac{wL^2}{30}$	$\alpha_1 = \frac{wL^3}{45}$ $\alpha_2 = \frac{7wL^3}{360}$
	$M_1 = M \frac{b}{L} (2 - \frac{3b}{L})$ $M_2 = M \frac{a}{L} (2 - \frac{3a}{L})$	$\alpha_1 = M \frac{L}{6} (\frac{3b^2}{L^2} - 1)$ $\alpha_2 = M \frac{L}{6} (1 - \frac{3a^2}{L^2})$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{8}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{PL^2}{16}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{Pa(L-a)}{L}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{Pa(L-a)}{2}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{5PL}{16}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{5PL^2}{32}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{19PL}{72}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{19PL^2}{144}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{PL}{24} \cdot \frac{2n^2+1}{n}$	$\alpha_1 = -\alpha_2 = \frac{PL^2}{48} \cdot \frac{2n^2+1}{n}$
	$M_1 = -M_2 = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_1 = -M_2 = \frac{Pa^2b}{L^2}$	$\alpha_1 = \frac{Pab}{6L} (b+L)$ $\alpha_2 = \frac{Pab}{6L} (a+L)$

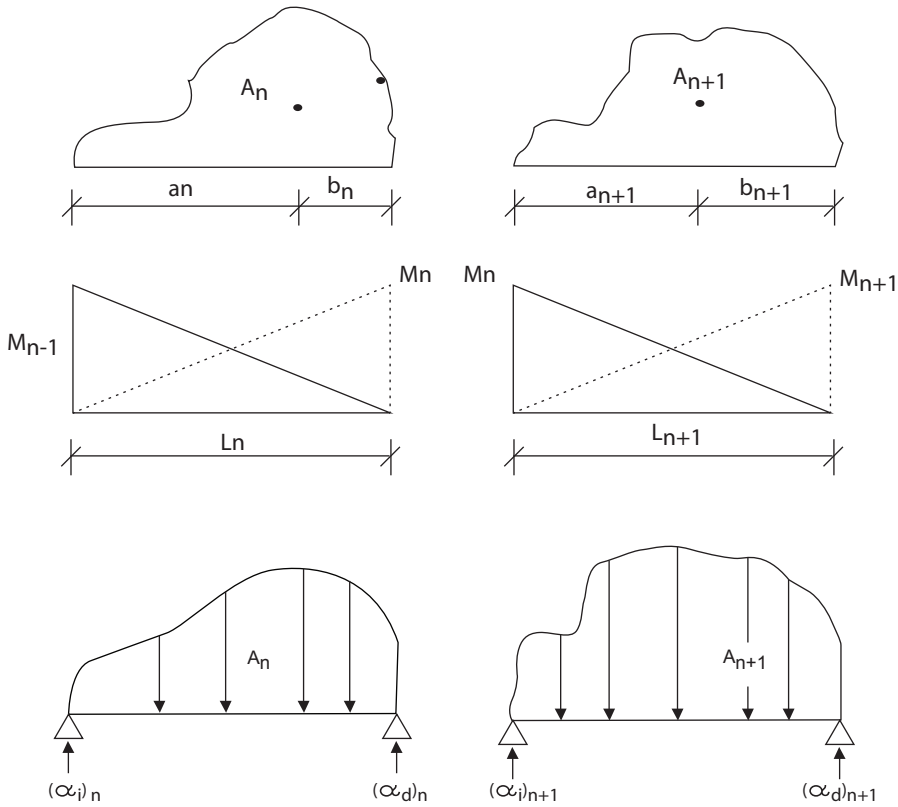
Fuente: Uribe (2000).



### 3.5. Método de los tres momentos

Los diagramas de momentos debidos a las fuerzas aplicadas tendrán áreas  $A_n$  y  $A_{n+1}$  con sus centroides localizados como se indica en la figura 3.28, además del dibujo de los diagramas de momentos en los apoyos. Se debe tomar en cuenta que los signos son los internos en las vigas (Uribe, 2000).

Figura 3.28. Teorema de los tres momentos



Fuente: Uribe (2000).

Aplicando el segundo teorema del área-momento, se tiene lo siguiente:

$$ab(EI)_n = (A_n a_n) + M_{n-1} \frac{L_n}{2} \times \frac{L_n}{3} + M_n \frac{L_n}{2} \times \frac{2L_n}{3}$$

$$cd(EI)_{n+1} = (A_{n+1} b_{n+1}) + M_n \frac{L_{n+1}}{2} \times \frac{2L_{n+1}}{3} + M_{n+1} \frac{L_{n+1}}{2} \times \frac{L_{n+1}}{3}$$

Si la viga tiene inercia constante en toda su longitud, se contaría con la siguiente ecuación:

$$(A_n a_n) L_{n+1} + M_{n-1} \frac{(L_n)^2}{6} L_{n+1} + M_n \frac{(L_n)^2}{3} L_{n+1} \\ = -(A_{n+1} b_{n+1}) L_n - M_n \frac{(L_{n+1})^2}{3} L_n + M_{n+1} \frac{(L_{n+1})^2}{6} L_n$$

Dividiendo ambos lados por  $L_n L_{(n+1)}$ , se obtiene:

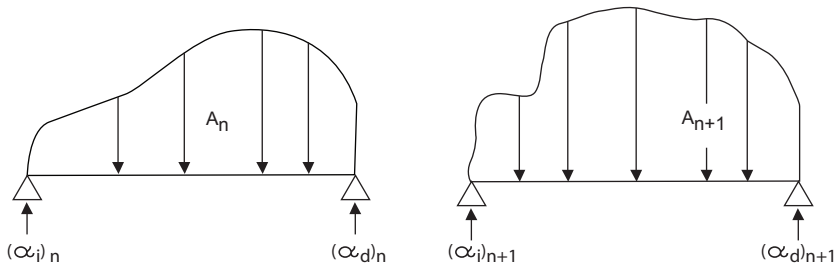
$$M_{n-1} \frac{L_n}{6} + M_n \frac{L_n}{3} + M_n \frac{L_{n+1}}{3} + M_{n+1} \frac{L_{n+1}}{6} = -A_n \frac{a_n}{L_n} - A_{n+1} \frac{b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

Finalmente, se multiplican por seis todos los valores de la ecuación, lo cual daría como resultado la siguiente ecuación:

$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -\frac{6A_n a_n}{L_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

Esta ecuación constituye la de los tres momentos para vigas continuas de sección constante. Una forma alterna de la ecuación de los tres momentos se obtiene al determinar que los valores de la derecha de la ecuación simplemente son reacciones de las vigas conjugadas multiplicadas por  $EI$  (Uribe, 2000) (figura 3.29).

**Figura 3.29. Deducción gráfica de ecuación del método de los tres momentos**



Fuente: Uribe (2000).

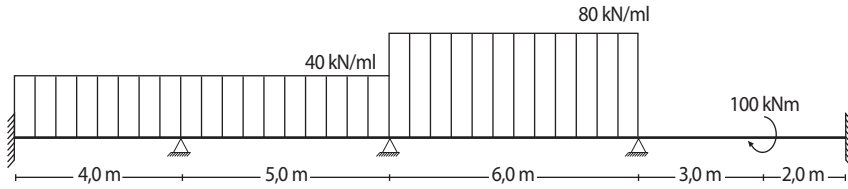
Así pues, se tiene:

$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}$$

### 3.5.1. Ejercicio: método de los tres momentos

Determinar las reacciones y el diagrama de momento del ejercicio de la figura 3.30 usando el método de los tres momentos.

**Figura 3.30. Ejercicio del método de los tres momentos**



Primero se determina el grado de indeterminación de la estructura:

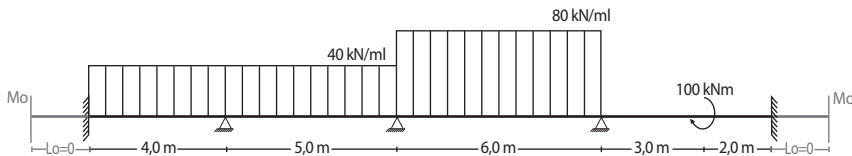
$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 7 - (2 + 0) = 5$$

La estructura es hiperestática. Enseguida se procede a aplicar las ecuaciones de los tres momentos.

Cuando al inicio y/o al final del elemento se tiene un empotramiento, se debe extender el elemento con un tramo de distancia  $L_0=0$ , como se muestra en la figura 3.31.

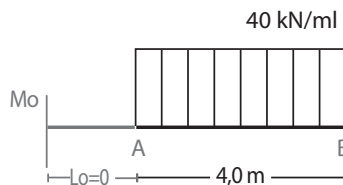
**Figura 3.31. Ejercicio del método de los tres momentos con extensión del elemento en los empotramientos**



La ecuación de los tres momentos solo analiza a dos tramos cada vez; por lo tanto, se procede a aplicar las ecuaciones por tramos de dos barras, tal cual como se muestra a continuación.

Tramo 0-A-B

**Figura 3.32. Ejercicio del método de los tres momentos: tramo 0-A-B**



$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{(n+1)}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}$$

Donde:

$$M_{n-1} = M_0; M_n = M_A; M_{n+1} = M_B$$

$$L_n = L_0 = 0; L_{n+1} = 4 \text{ m}$$

$$\alpha_d = \alpha_{Ad} = 0; \alpha_i = \alpha_{Ai} = \left[ \frac{WL^3}{24} \right] = \frac{40 * 4^3}{24}$$

Reemplazando los valores en la ecuación, se tiene:

$$M_0(L_0) + 2M_A(L_0 + 4) + M_B(4) = -6(\alpha_{Ad})_{0A} - 6(\alpha_{Ai})_{0B}$$

$$8M_A + 4M_B = -6 \left( \frac{40 * 4^3}{24} \right)$$

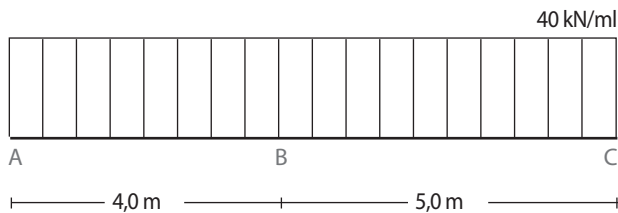
$$8M_A + 4M_B = -640$$

Dividiendo todo entre cuatro, se tiene:

$$2M_A + M_B = -160 \text{ "(Ec.3.5.1.1)"}$$

Tramo A-B-C

**Figura 3.33. Ejercicio del método de los tres momentos: tramo A-B-C**



$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}$$

Donde:

$$M_{n-1} = M_A; M_n = M_B; M_{n+1} = M_C$$

$$L_n = 4 \text{ m}; L_{n+1} = 5 \text{ m}$$

$$\alpha_d = \alpha_{Bd} = \left[ \frac{WL^3}{24} \right] = \frac{40 * 4^3}{24}; \alpha_i = \alpha_{Bi} = \left[ \frac{WL^3}{24} \right] = \frac{40 * 5^3}{24}$$

Reemplazando los valores en la ecuación, se tiene:

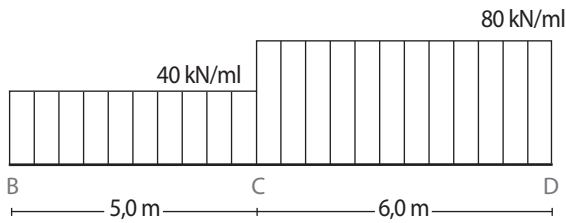
$$M_A(4) + 2M_B(4 + 5) + M_C(5) = -6(\alpha_{Bd})_{AB} - 6(\alpha_{Bi})_{BC}$$

$$4M_A + 18M_B + 5M_C = -6\left(\frac{40 * 4^3}{24}\right) - 6\left(\frac{40 * 5^3}{24}\right)$$

$$4M_A + 18M_B + 5M_C = -1.890 \text{ "(Ec.3.5.1.2)"}$$

Tramo B-C-D

**Figura 3.34. Ejercicio del método de los tres momentos: tramo B-C-D**



$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}$$

Donde:

$$M_{n-1} = M_B; M_n = M_C; M_{n+1} = M_D$$

$$L_n = 5 \text{ m}; L_{n+1} = 6 \text{ m}$$

$$\alpha_d = \alpha_{Cd} = \left[ \frac{WL^3}{24} \right] = \frac{40 * 5^3}{24}; \alpha_i = \alpha_{Ci} = \left[ \frac{WL^3}{24} \right] = \frac{80 * 6^3}{24}$$

Reemplazando los valores en la ecuación, se tiene:

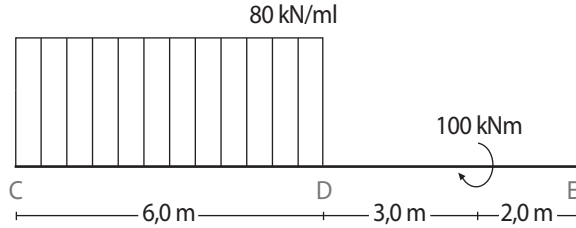
$$M_B(5) + 2M_C(5 + 6) + M_D(6) = -6(\alpha_{Cd})_{BC} - 6(\alpha_{Ci})_{CD}$$

$$5M_B + 22M_C + 6M_D = -6\left(\frac{40 * 5^3}{24}\right) - 6\left(\frac{40 * 6^3}{24}\right)$$

$$5M_B + 22M_C + 6M_D = -5.570 \text{ (Ec.3.5.1.3)}$$

Tramo C-D-E

**Figura 3.35. Ejercicio del método de los tres momentos: tramo C-D-E**



$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}$$

Donde:

$$M_{n-1} = M_C; M_n = M_D; M_{n+1} = M_E$$

$$L_n = 6 \text{ m}; L_{n+1} = 3 \text{ m}$$

$$\alpha_d = \alpha_{Dd} = \left[ \frac{WL^3}{24} \right] = \frac{80 * 6^3}{24}; \alpha_i = \alpha_{Di} = \left[ M \frac{L}{6} \left( 1 - \frac{3a^2}{L^2} \right) \right] = -100 * \frac{5}{6} \left( 1 - \frac{3 * 2^2}{5^2} \right)$$

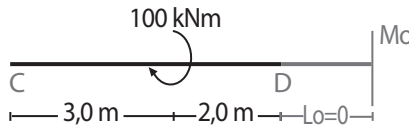
Reemplazando los valores en la ecuación, se tiene:

$$5M_C + 22M_D + 5M_E = -6 \left( \frac{80 * 6^3}{24} \right) - 6 \left[ -100 * \frac{5}{6} \left( 1 - \frac{3 * 2^2}{5^2} \right) \right]$$

$$5M_C + 22M_D + 5M_E = -4060 \text{ (Ec.3.5.1.4)}$$

Tramo D-E-O

**Figura 3.36. Ejercicio del método de los tres momentos: tramo D-E-O**



$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -6(\alpha_d)_n - 6(\alpha_i)_{n+1}$$

Donde:

$$M_{n-1} = M_D; M_n = M_E; M_{n+1} = M_O$$

$$L_n = 5\text{m}; L_{n+1} = 0$$

$$\alpha_d = \alpha_{Ed} = \left[ M \frac{L}{6} \left( 1 - \frac{3a^2}{L^2} \right) \right] = -100 * \frac{5}{6} \left( 1 - \frac{3 * 2^2}{5^2} \right); \alpha_i = \alpha_{Ei} = 0$$

Reemplazando los valores en la ecuación, se tiene:

$$M_D(5) + 2M_E(5 + L_O) + M_O(L_O) = -6(\alpha_{Ed})_{DE} - 6(\alpha_{Ei})_{EO}$$

$$5M_D + 10M_E = -6 \left[ -100 * \frac{5}{6} \left( \frac{3 * 3^2}{5^2} - 1 \right) \right]$$

$$5M_D + 10M_E = 40$$

Dividiendo toda la ecuación entre cinco:

$$M_D + 2M_E = 8 \text{ (Ec.3.5.1.5)}$$

La matriz sería la siguiente:

$M_A$	$M_B$	$M_C$	$M_D$	$M_E$		$M_A$		$M_C$		$M_D$		$M_E$		
2	1	0	0	0										-160
4	18	5	0	0										-1.890
0	5	22	6	0	*									-5.570
0	0	6	22	5										-4.060
0	0	0	1	2										8

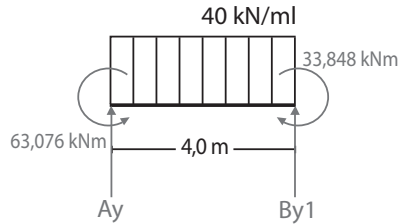
$$M_A = -63,08 \text{ kNm}; M_B = -33,85 \text{ kNm};$$

$$M_C = -205,69 \text{ kNm}; M_D = -145,94 \text{ kNm};$$

$$M_E = 76,97 \text{ kNm}$$

**Solución estática**

Viga 1:

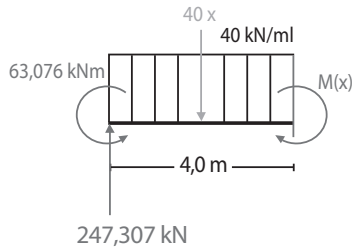
**Figura 3.37. Ejercicio del método de los tres momentos: viga 1**

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 63,08 \text{ kNm} - 33,85 \text{ kNm} - (160 \text{ kN} \cdot 2\text{m}) + 4B_y = 0$$

$$B_y = 72,69 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = A_y + 72,69 \text{ kN} - 160 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = 87,31 \text{ kN} \uparrow$$

Corte  $0 \leq x \leq 4 \rightarrow$ **Figura 3.38. Ejercicio del método de los tres momentos: corte 1: 0 a 4 m**

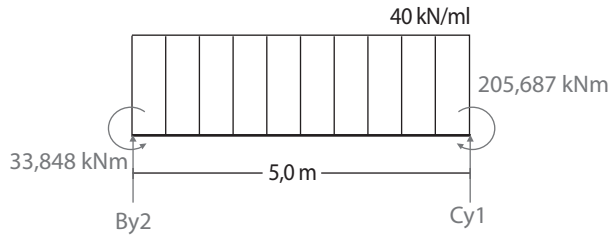
$$+\circlearrowleft \sum M_1 = M(x) + 20x^2 + 63,08 - 87,31x = 0$$

$$M(x)_1 = -20x^2 + 87,31x - 63,08$$



Viga 2:

**Figura 3.39. Ejercicio del método de los tres momentos: viga 2**



$$+\circlearrowleft \sum M_B = -33,85 \text{ kNm} - (200 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m}) - 205,69 \text{ kNm} + 5C_y = 0$$

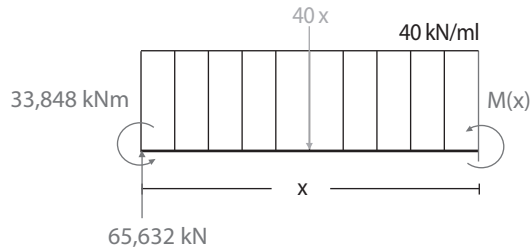
$$C_y = 134,37 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = B_y + 134,37 \text{ kN} - 200 \text{ kN} = 0$$

$$B_y = 65,63 \text{ kN} \uparrow$$

Corte  $0 \leq x \leq 5 \rightarrow$

**Figura 3.40. Ejercicio del método de los tres momentos: corte 2: 0 a 5 m**

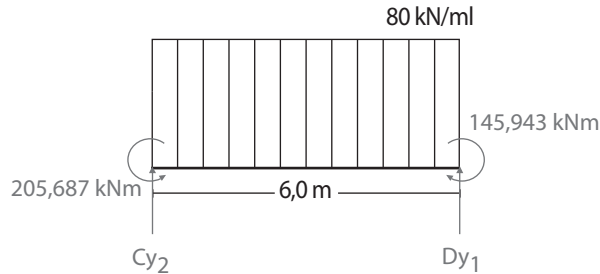


$$+\circlearrowleft \sum M_2 = M(x) + 20x^2 + 33,85 - 65,63x = 0$$

$$M(x)_2 = -20x^2 + 65,63x - 33,85$$

Viga 3:

**Figura 3.41. Ejercicio del método de los tres momentos: viga 3**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = -205,69 \text{ kNm} - (480 \text{ kN} \cdot 3\text{m}) - 145,94 \text{ kNm} + 6Dy = 0$$

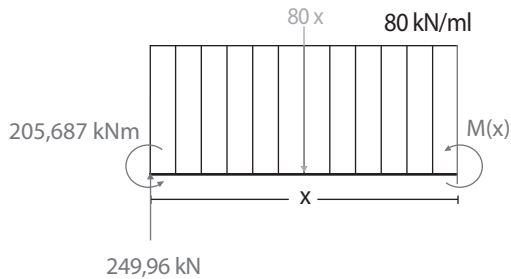
$$Dy = 230,04 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma Fy = Cy + 230,04 \text{ kN} - 480 \text{ kN} = 0$$

$$Cy = 249,96 \text{ kN} \uparrow$$

Corte  $0 \leq x \leq 6 \rightarrow$

**Figura 3.42. Ejercicio del método de los tres momentos: corte 3: 0 a 6 m**

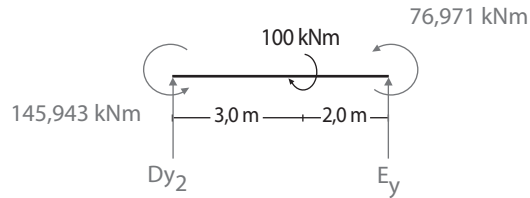


$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = M(x) + 40x^2 + 205,96 - 249,96x = 0$$

$$M(x)_3 = -40x^2 + 249,96x - 205,96$$

Viga 4:

**Figura 3.43. Ejercicio del método de los tres momentos: viga 4**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = -145,94 \text{ kNm} + 76,97 \text{ kN} - 100 \text{ kNm} + 5E_y = 0$$

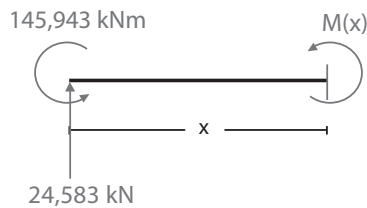
$$E_y = 24,58 \text{ kN} \downarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = D_y - 24,58 \text{ kN} = 0$$

$$D_y = 24,58 \text{ kN} \uparrow$$

$$\text{Corte } 0 \leq x \leq 3 \rightarrow$$

**Figura 3.44. Ejercicio del método de los tres momentos: corte 4: 0 a 3 m**

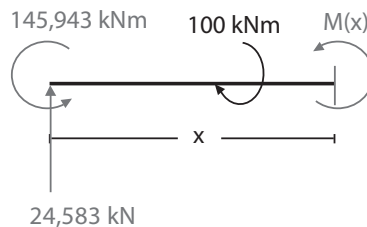


$$+\circlearrowleft \Sigma M_4 = M(x) + 145,94 - 24,58x = 0$$

$$M(x)_4 = 24,58x - 145,94$$

$$\text{Corte } 3 \leq x \leq 5 \rightarrow$$

**Figura 3.45. Ejercicio del método de los tres momentos: corte 5: 3 m a 5 m**

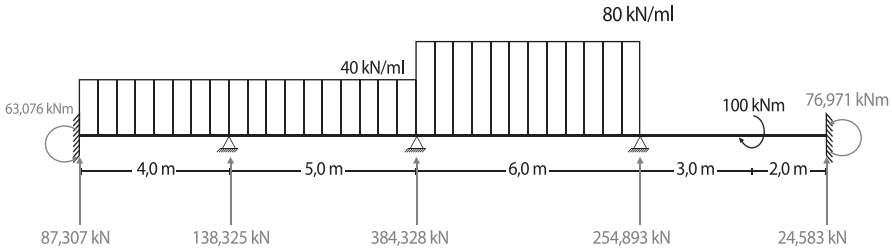


$$+\circlearrowleft \sum M_5 = M(x) + 145,94 - 24,58x - 100 = 0$$

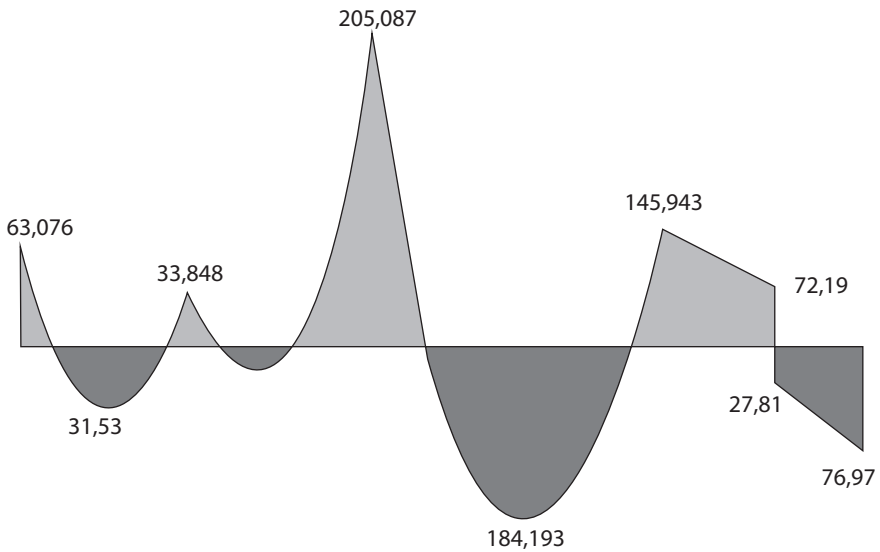
$$M(x)_5 = 24,58x - 45,94$$

En las figuras 3.46 y 3.47 se muestran las reacciones y el diagrama de momentos del ejercicio.

**Figura 3.46. Reacciones del ejercicio del método de los tres momentos**



**Figura 3.47. Diagrama de momentos del ejercicio del método de los tres momentos**



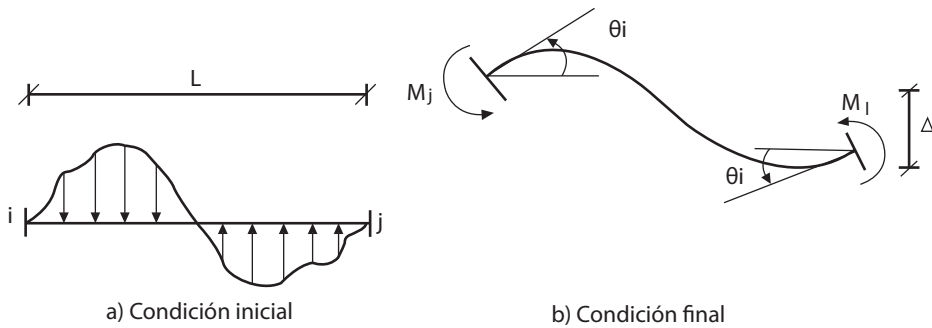
### 3.6. Método de pendiente-deflexión

Los orígenes de este método se atribuyen a Mohr, quien lo aplicó en 1892 en la solución de un problema de esfuerzos secundarios (Uribe, 2000). Sin embargo, fue hasta 1915 que George A. Maney, profesor de la Universidad de Minnesota, presentó un desarrollo del método que, durante 15 años y hasta la aparición de la

distribución de momentos, fue el procedimiento “exacto” utilizado para analizar vigas y pórticos en los Estados Unidos (McCormac, 2010).

El nombre de “pendiente-deflexión” que recibe el método se debe a que los momentos en los extremos de los elementos de una estructura estáticamente indeterminada se expresan en términos de la pendiente (o giro de rotación) y la deflexión en cada uno de sus nudos (Uribe, 2000).

**Figura 3.48. Deducción del método de pendiente-deflexión**

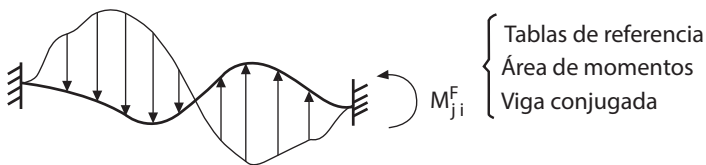


Fuente: Uribe (2000)

En la figura 3.48, en la parte izquierda (a) se observa un elemento antes de ser sometido a cargas externas, mientras que en la parte derecha (b) se aprecia la misma viga de la imagen (a) deformada, es decir, después de ser sometida a cargas externas.

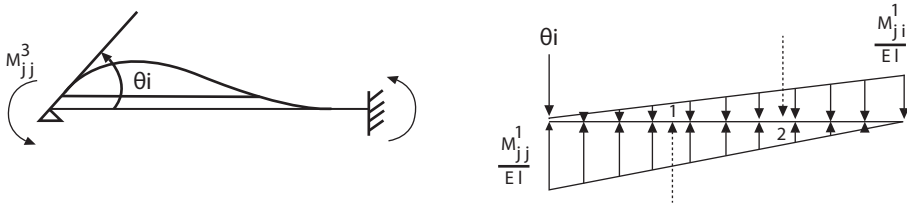
Para deducir las ecuaciones de pendiente-deflexión se tienen en cuenta cuatro efectos, los cuales se muestran en las figuras 3.49, 3.50, 3.51 y 3.52.

**Figura 3.49. Efecto de las cargas sobre el elemento**



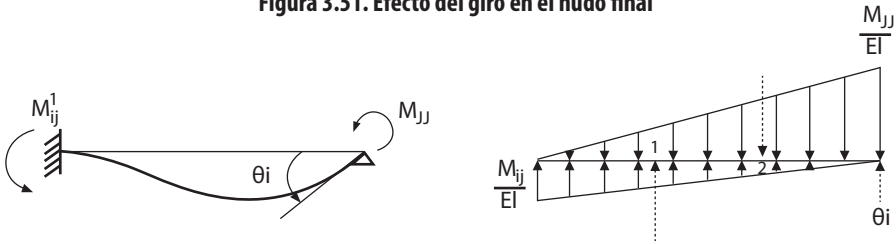
Fuente: Uribe (2000)

**Figura 3.50. Efecto del giro en el nudo inicial**



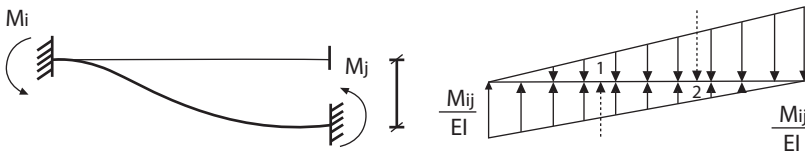
Fuente: Uribe (2000)

**Figura 3.51. Efecto del giro en el nudo final**



Fuente: Uribe (2000).

**Figura 3.52. Efecto del desplazamiento relativo**



Fuente: Uribe (2000).

Despreciando las deformaciones axiales, se estudia el efecto del giro en cada nudo y la deformación relativa perpendicular al eje del elemento estudiado en su posición original, todos ellos independientes unos de otros. Luego, aplicando el principio de superposición, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + M'_{ii} + M'_{ij} + M''_{ij}$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + M'_{ji} + M'_{jj} + M''_{ji}$$

Estas ecuaciones son generales. Cada momento significa:

$M_{ij} \rightarrow$  momento definitivo en el nudo inicial.

$M_{ij}^F \rightarrow$  momento de fijación en el nudo inicial, causado por la aplicación de cargas.

$M'_{ii} \rightarrow$  momento en el nudo inicial, causado por el giro al inicio.

$M'_{ij} \rightarrow$  momento en el nudo inicial, causado por la aplicación del momento  $M'_{jj}$ .

$M'_{ij} \rightarrow$  momento en el nudo inicial, causado por el desplazamiento relativo.

$M_{ji} \rightarrow$  momento definitivo en el nudo final.

$M_{ji}^F \rightarrow$  momento de fijación en el nudo final, causado por la aplicación de cargas.

$M'_{ji} \rightarrow$  momento en el nudo final, causado por la aplicación del momento  $M'_{ii} \rightarrow$ .

$M'_{jj} \rightarrow$  momento en el nudo final, causado por el giro al final.

$M''_{ji} \rightarrow$  momento en el nudo final, causado por el desplazamiento relativo.

En el caso de elementos prismáticos, las ecuaciones de pendiente-deflexión se pueden evaluar utilizando el método de viga conjugada. Para la primera ecuación, y tomando momentos con respecto al punto final, se obtiene:

$$\theta_i = \left(\frac{2L}{3}\right) = \left(\frac{M'_{ii}L}{2EI}\right) * \left(\frac{L}{3}\right) \rightarrow M'_{ii} = \frac{4EI}{L}\theta_i$$

Tomando momentos con respecto al punto inicial:

$$\theta_j = \left(\frac{L}{3}\right) = \left(\frac{M'_{ji}L}{2EI}\right) * \left(\frac{L}{3}\right) \rightarrow M'_{ji} = \frac{2EI}{L}\theta_j$$

Considerando de igual forma la segunda ecuación, se tiene:

$$M'_{jj} = \frac{4EI}{L}\theta_j \rightarrow M'_{ij} = \frac{2EI}{L}\theta_i$$

El desplazamiento relativo es el mismo para ambas ecuaciones; por lo tanto:

$$M''_{ij} = M''_{ji}$$

Aplicando el segundo teorema de la viga:

$$\left(\frac{M''_{ij}L}{2EI}\right) * \left(\frac{L}{3}\right) = \Delta$$

$$M''_{ij} = M''_{ji} = \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

Finalmente, reemplazado cada uno de los términos en las ecuaciones generales, se tiene:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{2EI}{L} \theta_j + \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + \frac{2EI}{L} \theta_i + \frac{4EI}{L} \theta_j + \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

Simplificando las ecuaciones:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + \frac{2EI}{L} \left(2\theta_i + \theta_j + \frac{3}{L} \Delta\right)$$

$$M_{ji} = M_{ji}^F + \frac{2EI}{L} \left(\theta_i + 2\theta_j + \frac{3}{L} \Delta\right)$$

Reemplazando:

$$K = \frac{2EI}{L}$$

Se tienen finalmente las siguientes ecuaciones de pendiente-deflexión:

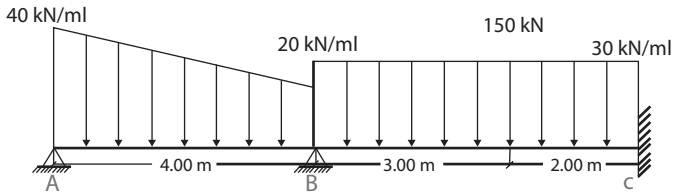
$$M_{ij} = M_{ij}^F + K \left(2\theta_i + \theta_j + \frac{3}{L} \Delta\right); M_{ji} = M_{ji}^F + K \left(\theta_i + 2\theta_j + \frac{3}{L} \Delta\right)$$

Esta demostración fue tomada de Uribe (2000).

### **3.6.1. Ejercicio 1: método de pendiente-deflexión**

Determinar las reacciones, los giros y los desplazamientos de la viga hiperestática de la figura 3.53.



**Figura 3.53. Ejercicio 1 del método de pendiente-deflexión**

La sección de todo el elemento es de forma cuadrada, con una base de 30 cm y una altura de 30 cm. El material que se va a utilizar es un concreto de  $f_c = 21$  MPa con un módulo de elasticidad de  $E = 21.538.106$  kN/m<sup>2</sup>.

Primero se determina el grado de indeterminación de la estructura:

$$GI = R - (E_c + A_r)$$

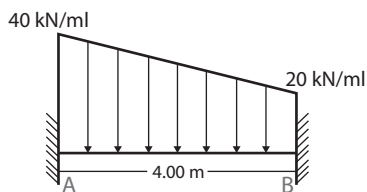
$$GI = 4 - (2 + 0) = 0$$

Como  $GI$  es mayor a 0, entonces se tiene que la viga es hiperestática.

Para aplicar el método, se deben determinar las variables que influyen en las ecuaciones principales de pendiente-deflexión para cada una de las barras actuantes, es decir, cada tramo de nudo a nudo. Esto implica determinar los momentos de fijación en cada punto y el valor de la constante  $K$  para cada barra.

### Tramo A-B

Para determinar los momentos de fijación, se supone que el tramo tiene un empotramiento perfecto, es decir, que sus dos extremos están empotrados (figura 3.54).

**Figura 3.54. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo A-B**

Se aplica el principio de superposición para separar el elemento complejo en dos elementos más sencillos de manejar y así poder aplicar las ecuaciones de los momentos de empotramiento (figura 3.55). De esta manera será posible determinar los momentos de fijación en cada punto.

**Figura 3.55. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión tramo A-B separado por principio de superposición**



Al aplicar las ecuaciones de momentos de empotramiento, los momentos de fijación son los siguientes:

$$M_{AB}^F = \frac{20(4^2)}{12} + \frac{20(4^2)}{20} = 42,667$$

$$M_{BA}^F = -\frac{20(4^2)}{12} - \frac{20(4^2)}{30} = -37,333$$

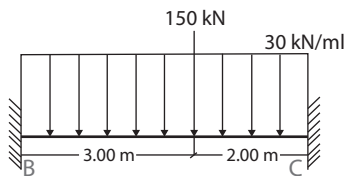
La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{AB} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{4} = 7.269$$

### Tramo B-C

Para determinar los momentos de fijación, se supone que el tramo tiene un empotramiento perfecto, es decir, que sus dos extremos están empotrados (figura 3.56).

**Figura 3.56. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo B-C**



Se aplica el principio de superposición para separar el elemento complejo en dos elementos más sencillos de manejar y así poder aplicar las ecuaciones de los momentos de empotramiento (figura 3.57). De esta manera será posible determinar los momentos de fijación en cada punto.

**Figura 3.57. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión separado por principio de superposición, tramo B-C**



Al aplicar las ecuaciones de momentos de empotramiento, los momentos de fijación son los siguientes:

$$M_{BC}^F = \frac{30(5^2)}{12} + \frac{150(3)(2^2)}{(5^2)} = 134,5$$

$$M_{CB}^F = -\frac{30(5^2)}{12} - \frac{150(3^2)(2)}{(5^2)} = 170,5$$

La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{BC} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{5} = 5.815$$

Se procede a hacer uso de las dos ecuaciones principales de método de pendiente-deflexión:

$$M_{ij} = M_{ij}^F + K \left( 2\theta_i + \theta_j + \frac{3}{L} \Delta \right); M_{ji} = M_{ji}^F + K \left( \theta_i + 2\theta_j + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

### Ecuaciones del tramo A-B

$$M_{AB} = M_{AB}^F + K_{AB} \left( 2\theta_A + \theta_B + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

Como el apoyo A y el apoyo B no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{AB} = 42,667 + 7.269 \left( 2\theta_A + \theta_B + \frac{3}{L} (0) \right)$$

$$M_{AB} = 42,667 + 14.538\theta_A + 7.269\theta_B$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto B con respecto al punto A, se tiene:

$$M_{BA} = M_{BA}^F + K_{AB} \left( \theta_A + 2\theta_B + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

Como el apoyo A y el apoyo B no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{BA} = -37,333 + 7.269 \left( \theta_A + 2\theta_B + \frac{3}{L} (0) \right)$$

$$M_{BA} = -37,333 + 7.269\theta_A + 14.538\theta_B$$

### Ecuaciones del tramo B-C

$$M_{BC} = M_{BC}^F + K_{BC} \left( 2\theta_B + \theta_C + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

Como el apoyo B y el apoyo C no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero. En el apoyo C, al ser un empotramiento, se tiene que el  $\theta_C=0$ .

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{BC} = 134,5 + 5.815 \left( 2\theta_B + (0) + \frac{3}{L} (0) \right)$$

$$M_{BC} = 134,5 + 11.630 \theta_B$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto C con respecto al punto B, se tiene:

$$M_{CB} = M_{CB}^F + K_{BC} \left( \theta_B + 2\theta_C + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

Como el apoyo B y el apoyo C no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a 0. En el apoyo C, al ser un empotramiento, se tiene que el  $\theta_C=0$ .

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{CB} = -170,5 + 5.815 \left( \theta_B + 2(0) + \frac{3}{L} (0) \right)$$

$$M_{CB} = -170,5 + 5.815 \theta_B$$

Siguiendo las condiciones de equilibrio que debe tener una estructura, y teniendo en cuenta el tipo de apoyo al inicio y al final del elemento, se procede a aplicar lo siguiente: al inicio, el apoyo es articulado de segundo orden; por lo tanto, restringe desplazamiento, y el momento en ese punto es igual a cero:

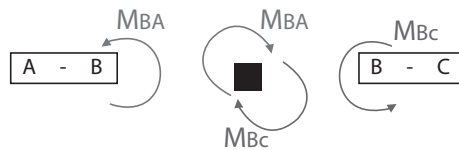
$$M_{AB} = 0$$

$$M_{AB} = 42,667 + 14.538 \theta_A + 7.269 \theta_B = 0$$

$$14.538\theta_A + 7.269\theta_B = -42,667 \text{ (Ec.3.6.1.1)}$$

El método dice que todos los momentos deben asumirse positivos en las barras, con el fin de identificar cual será la dirección correcta de las incógnitas de giros y desplazamientos. Siguiendo las convenciones estipuladas para la presente guía, los momentos en sentido antihorario, es decir, en contra de la rotación de las manecillas del reloj, serán positivos.

**Figura 3.58. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión: equilibrio en B**



Se realiza *sumatoria de momentos*:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$-37,333 + 7.269\theta_A + 14.538\theta_B + 134,5 + 11.630\theta_B = 0$$

$$7.269\theta_A + 26.168\theta_B = -97,167 \text{ (Ec.3.6.1.2)}$$

$\theta_A$	$\theta_B$	*	$\theta_A$	=	-42,667
14538	7269		$\theta_B$		-97,167
7269	26168				

$$\theta_A = -0,00125 \text{ rad}; \theta_B = -0,003365 \text{ rad}$$

Se procede a determinar los momentos en cada uno de los puntos reemplazando los giros hallados:

$$M_{AB} = 42,667 + 14,538\theta_A + 7,269\theta_B$$

$$M_{AB} = 42,667 + 14,538(-0,00125) + 7,269(-0,003365)$$

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} = -37,333 + 7,269\theta_A + 14,538\theta_B$$

$$M_{BA} = -37,333 + 7,269(-0,00125) + 14,538(-0,003365)$$

$$M_{BA} = -95,34 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = 134,5 + 11,630\theta_B$$

$$M_{BC} = 134,5 + 11,630(-0,003365)$$

$$M_{BC} = 95,34 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = -170,5 + 5,815\theta_B$$

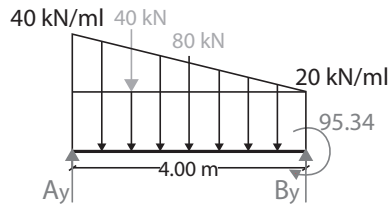
$$M_{CB} = -170,5 + 5,815(-0,003365)$$

$$M_{CB} = -190,05 \text{ kNm}$$

Para determinar las reacciones de la viga, se utilizan los momentos hallados anteriormente, proceso que se debe realizar por tramos:

Tramo A-B

**Figura 3.59. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo A-B**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = -40(4/3) - 80(2) - 95,34 + 4B_y = 0$$

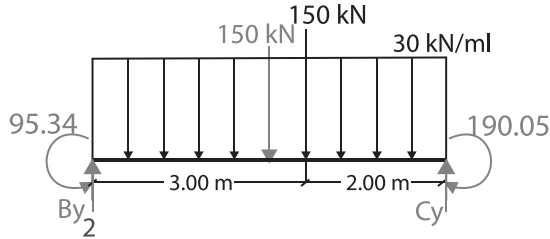
$$B_y = 77,168$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = -40 - 80 + 77,168 + A_y = 0$$

$$A_y = 42,832$$

Tramo B-C

**Figura 3.60. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, tramo B-C**



$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 95,34 - 190,05 - 150(3) - 150(2,5) + 5C_y = 0$$

$$C_y = 183,942$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = -150 - 150 + 183,942 + B_{y_2} = 0$$

$$B_{y_2} = 116,058$$

Las reacciones son:

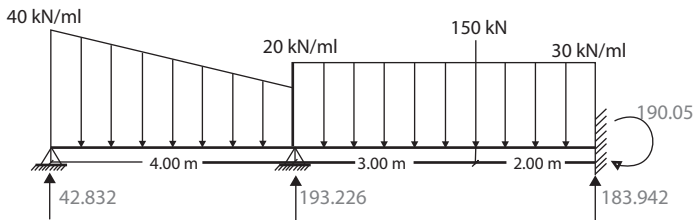
$$A_y = 42,832$$

$$B_y = B_{y_1} + B_{y_2} = 77,168 + 116,058 = 193,226$$

$$C_y = 183,942$$

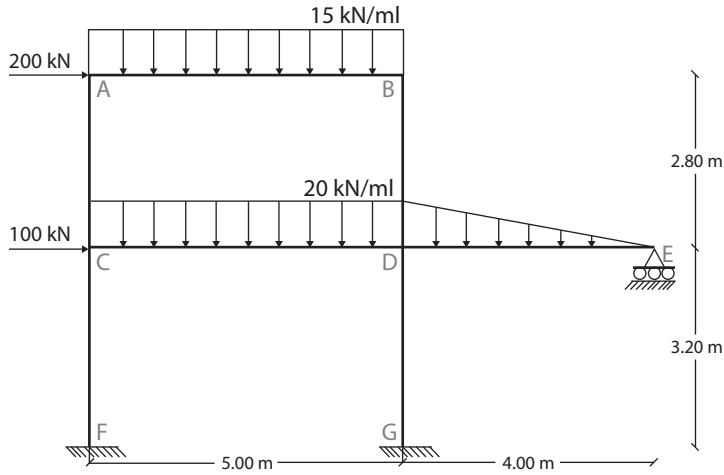
$$M_c = 190,05$$

**Figura 3.61. Ejercicio 1 método de pendiente-deflexión, reacciones**



### 3.6.2. Ejercicio 2: método de pendiente-deflexión

Determinar los giros, desplazamientos y diagrama de momentos del pórtico hiperestático de la figura 3.62.

**Figura 3.62. Ejercicio 2 del método de pendiente-deflexión**

La sección de todos los elementos es de forma cuadrada, con una base de 30 cm y una altura de 30 cm. El material que se va a utilizar es un concreto de  $f'_c = 21$  MPa con un módulo de elasticidad de  $E = 21.538.106$  kN/m<sup>2</sup>.

Primero se determina el grado de indeterminación de la estructura:

$$GI = R - (Ec. + Art.)$$

$$GI = 7 - (3 + 0) = 4$$

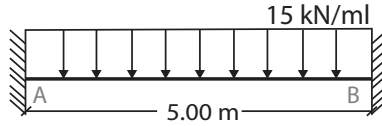
Como  $GI$  es mayor a cero, entonces se tiene que el pórtico es hiperestático.

Para aplicar el método, se deben determinar las variables que influyen en las ecuaciones principales de pendiente deflexión para cada una de las barras actuantes, es decir, cada tramo de nudo a nudo, lo cual implica determinar los momentos de fijación en cada punto y el valor de la constante  $K$  para cada barra.

### Tramo A-B

Para determinar los momentos de fijación, se supone que el tramo tiene un empotramiento perfecto, es decir, que sus dos extremos están empotrados (figura 3.63).



**Figura 3.63. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, tramo A-B**

Al aplicar las ecuaciones de momentos de empotramiento, los momentos de fijación son los siguientes:

$$M_{AB}^F = \frac{15(5^2)}{12} = 31,25$$

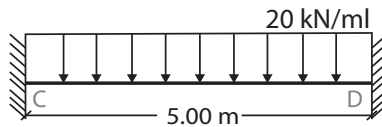
$$M_{BA}^F = -\frac{15(5^2)}{12} = -31,25$$

La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{AB} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{5} = 5.815$$

### Tramo C-D

Para determinar los momentos de fijación, se supone que el tramo tiene un empotramiento perfecto, es decir, que sus dos extremos están empotrados (figura 3.64).

**Figura 3.64. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, tramo C-D**

Al aplicar las ecuaciones de momentos de empotramiento, los momentos de fijación son los siguientes:

$$M_{CD}^F = \frac{20(5^2)}{12} = 41,667$$

$$M_{DC}^F = -\frac{20(5^2)}{12} = -41,667$$

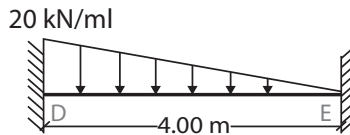
La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{CD} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{5} = 5.815$$

### Tramo D-E

Para determinar los momentos de fijación, se supone que el tramo tiene un empotramiento perfecto, es decir, que sus dos extremos están empotrados (figura 3.65).

Figura 3.65. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, tramo D-E



Al aplicar las ecuaciones de momentos de empotramiento, los momentos de fijación son los siguientes:

$$M_{DE}^F = \frac{20(5^2)}{12} = 41,667$$

$$M_{ED}^F = -\frac{20(5^2)}{12} = -41,667$$

La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{DE} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{4} = 7.269$$

### Tramo A-C y B-D

En este tramo no hay cargas dentro del elemento; por lo tanto, los momentos de fijación son iguales a cero.

La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{AC} = K_{BD} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{2,8} = 10.384$$

### Tramo C-F y D-G

En este tramo no hay cargas dentro del elemento; por lo tanto, los momentos de fijación son iguales a cero.

La rigidez del tramo, dada por la constante K, es:

$$K_{CF} = K_{DG} = \frac{2(21.538.106)[(1/12)(0,3)(0,3^3)]}{3,2} = 9.086$$

### Ecuaciones del tramo A-B

$$M_{AB} = M_{AB}^F + K_{AB} \left( 2\theta_A + \theta_B + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

Como el apoyo A y el apoyo B no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{AB} = 31,25 + 5.815 \left( 2\theta_A + \theta_B + \frac{3}{L}(0) \right)$$

$$M_{AB} = 31,25 + 11.630\theta_A + 5.815\theta_B$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto B con respecto al punto A, se tiene:

$$M_{BA} = M_{BA}^F + K_{AB} \left( \theta_A + 2\theta_B + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

Como el apoyo A y el apoyo B no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{BA} = -31,25 + 5.815 \left( \theta_A + 2\theta_B + \frac{3}{L}(0) \right)$$

$$M_{BA} = -31,25 + 5.815\theta_A + 11.630\theta_B$$

### Ecuaciones del tramo C-D

$$M_{CD} = M_{CD}^F + K_{CD} \left( 2\theta_C + \theta_D + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

Como el apoyo C y el apoyo D no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{CD} = 41,667 + 5.815 \left( 2\theta_C + \theta_D + \frac{3}{L}(0) \right)$$

$$M_{CD} = 41,667 + 11.630\theta_C + 5.815\theta_D$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto D con respecto al punto C, se tiene:

$$M_{DC} = M_{DC}^F + K_{CD} \left( \theta_C + 2\theta_D + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

Como el apoyo C y el apoyo D no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{DC} = -41,667 + 5.815 \left( \theta_C + 2\theta_D + \frac{3}{L}(0) \right)$$

$$M_{DC} = -41,667 + 5.815\theta_C + 11.630\theta_D$$

### **Ecuaciones del tramo D-E**

$$M_{DE} = M_{DE}^F + K_{DE} \left( 2\theta_D + \theta_E + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

Como el apoyo D y el apoyo E no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{DE} = 16 + 7.269 \left( 2\theta_D + \theta_E + \frac{3}{L}(0) \right)$$

$$M_{DE} = 16 + 14.538\theta_D + 7.269\theta_E$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto E con respecto al punto D, se tiene:

$$M_{ED} = M_{ED}^F + K_{DE} \left( \theta_D + 2\theta_E + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

Como el apoyo D y el apoyo E no tienen desplazamiento, entonces el desplazamiento relativo ( $\Delta$ ) es igual a cero.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{ED} = -10,667 + 7.269 \left( \theta_D + 2\theta_E + \frac{3}{L}(0) \right)$$

$$M_{ED} = -10,667 + 7.269\theta_D + 14.538\theta_E$$

### Ecuaciones del tramo A-C

$$M_{AC} = M_{AC}^F + K_{AC} \left( 2\theta_A + \theta_C + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

El apoyo A y el apoyo C tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del segundo piso.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{AC} = 10.384 \left( 2\theta_A + \theta_C + \frac{3}{2,8}\Delta_2 \right)$$

$$M_{AC} = 20.768\theta_A + 10.384\theta_C + 11.125,7\Delta_2$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto C con respecto al punto A, se tiene:

$$M_{CA} = M_{CA}^F + K_{AC} \left( \theta_A + 2\theta_C + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

El apoyo A y el apoyo C tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del segundo piso.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{CA} = 10.384 \left( \theta_A + 2\theta_C + \frac{3}{2,8}\Delta_2 \right)$$

$$M_{CA} = 10.384\theta_A + 20.768\theta_C + 11.125,7\Delta_2$$

### Ecuaciones del tramo B-D

$$M_{BD} = M_{BD}^F + K_{BD} \left( 2\theta_B + \theta_D + \frac{3}{L}\Delta \right)$$

El apoyo B y el apoyo D tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del segundo piso.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{BD} = 10.384 \left( 2\theta_B + \theta_D + \frac{3}{2,8} \Delta_2 \right)$$

$$M_{BD} = 20.768\theta_B + 10.384\theta_D + 11.125,7\Delta_2$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto D con respecto al punto B, se tiene:

$$M_{DB} = M_{DB}^F + K_{BD} \left( \theta_B + 2\theta_D + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

El apoyo B y el apoyo D tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del segundo piso.

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{DB} = 10.384 \left( \theta_B + 2\theta_D + \frac{3}{2,8} \Delta_2 \right)$$

$$M_{DB} = 10.384\theta_B + 20.768\theta_D + 11.125,7\Delta_2$$

### Ecuaciones del tramo C-F

$$M_{CF} = M_{CF}^F + K_{CF} \left( 2\theta_C + \theta_F + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

El apoyo C y el apoyo F tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del primer piso. Además, se tiene que el apoyo F es un empotramiento, por lo que el  $\theta_F = 0$ .

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{CF} = 9.086 \left( 2\theta_C + (0) + \frac{3}{3,2} \Delta_1 \right)$$

$$M_{CF} = 18.172\theta_C + 8.518\Delta_1$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto F con respecto al punto C, se tiene:

$$M_{FC} = M_{FC}^F + K_{CF} \left( \theta_C + 2(0) + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

El apoyo C y el apoyo F tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del primer piso. Además, se tiene que el apoyo F es un empotramiento, por lo que el  $\theta_F = 0$ .

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{FC} = 9.086 \left( \theta_C + 2(0) + \frac{3}{3,2} \Delta_1 \right)$$

$$M_{FC} = 9.086\theta_C + 8.518\Delta_1$$

### Ecuaciones del tramo D-G

$$M_{DG} = M_{DG}^F + K_{DG} \left( 2\theta_D + (0) + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

El apoyo D y el apoyo G tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del primer piso. Además, se tiene que el apoyo F es un empotramiento, por lo que el  $\theta_G = 0$ .

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

$$M_{DG} = 9.086 \left( 2\theta_D + (0) + \frac{3}{3,2} \Delta_1 \right)$$

$$M_{DG} = 18.172\theta_D + 8.518\Delta_1$$

Determinando la ecuación de momento desde el punto G con respecto al punto D, se tiene:

$$M_{GD} = M_{GD}^F + K_{DG} \left( \theta_D + 2(0) + \frac{3}{L} \Delta \right)$$

El apoyo D y el apoyo G tienen desplazamiento horizontal uno con respecto al otro, entonces  $\Delta$  equivale al desplazamiento relativo del primer piso. Además, se tiene que el apoyo F es un empotramiento, por lo que el  $\theta_G = 0$ .

Reemplazando los datos en la ecuación, se tiene:

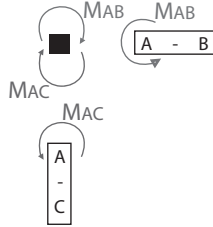
$$M_{GD} = 9.086 \left( \theta_D + 2(0) + \frac{3}{3,2} \Delta_1 \right)$$

$$M_{GD} = 9.086\theta_D + 8.518\Delta_1$$

El método dice que todos los momentos deben asumirse positivos en las barras, con el fin de identificar cuál será la dirección correcta de las incógnitas de giros y desplazamientos. Siguiendo las convenciones estipuladas para la presente guía, los momentos en sentido antihorario, es decir, en contra de la rotación de las manecillas del reloj, serán positivos.

### Equilibrio en el nudo A

Figura 3.66. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en A



Se realiza *sumatoria de momentos*:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = -M_{AB} - M_{AC} = 0$$

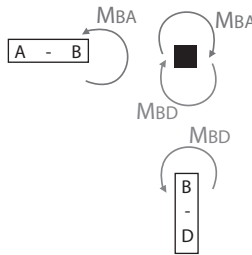
$$M_{AB} + M_{AC} = 0$$

$$31,25 + 11.630\theta_A + 5.815\theta_B + 20.768\theta_A + 10.384\theta_C + 11.125,7\Delta_2 = 0$$

$$32.398\theta_A + 5.815\theta_B + 10.384\theta_C + 11.125,7\Delta_2 = -31,25 \text{ (Ec.3.6.2.1)}$$

### Equilibrio en el nudo B

Figura 3.67. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en B



Se realiza *sumatoria de momentos*:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = -M_{BA} - M_{BD} = 0$$

$$M_{BA} + M_{BD} = 0$$

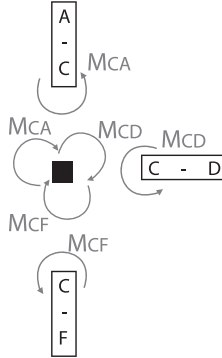
$$-31,25 + 5.815\theta_A + 11.630\theta_B + 20.768\theta_B + 10.384\theta_D + 11.125,7\Delta_2 = 0$$

$$5.815\theta_A + 32.398\theta_B + 10.384\theta_D + 11.125,7\Delta_2 = 31,25 \text{ (Ec.3.6.2.2)}$$



### Equilibrio en el nudo C

Figura 3.68. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en C



Se realiza *sumatoria de momentos*:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = -M_{CA} - M_{CD} - M_{CF} = 0$$

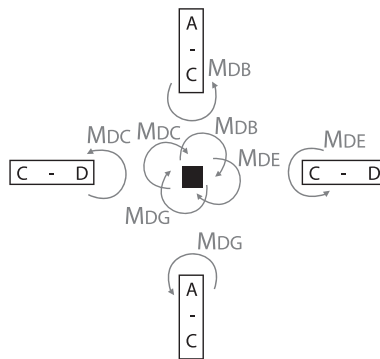
$$M_{CA} + M_{CD} + M_{CF} = 0$$

$$10.384\theta_A + 20.768\theta_C + 11.125,7\Delta_2 + 41,667 + 11.630\theta_C + 5.815\theta_D + 18.172\theta_C + 8.518\Delta_1 = 0$$

$$10.384\theta_A + 50.570\theta_C + 5.815\theta_D + 8.518\Delta_1 + 11.125,7\Delta_2 = -41,667 \text{ (Ec.3.6.2.3)}$$

### Equilibrio en el nudo D

Figura 3.69. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, equilibrio en E



Se realiza *sumatoria de momentos*:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = -M_{DC} - M_{DE} - M_{DG} = 0$$

$$M_{DC} + M_{DE} + M_{DG} = 0$$

$$-41,667+5.815\theta_C+11.630\theta_D+10.384\theta_B+20.768\theta_D+11.125,7\Delta_2+16+14.538\theta_D \\ + 7.269\theta_E+18.172\theta_D+8.518\Delta_1=0$$

$$10.384\theta_B+5.815\theta_C+65.108\theta_D+7.269\theta_E+8.518\Delta_1+11.125,7\Delta_2=25,667 \text{ (Ec.3.6.2.4)}$$

### Equilibrio en el nudo E

El apoyo del nudo E es un apoyo articulado de primer orden; por lo tanto, el momento es igual a cero:

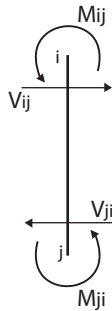
$$M_{ED}=0$$

$$-10,667+7.269\theta_D+14.538\theta_E=0$$

$$7.269\theta_D+14.538\theta_E=10,667 \text{ (Ec.3.6.2.5)}$$

El sistema presenta un total de siete incógnitas, y hasta el momento se han determinado cinco ecuaciones, por lo que no tiene una solución real. Es por ello que se hace necesario hallar las dos ecuaciones restantes.

**Figura 3.70. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, cortantes de una barra**



Cinco de las incógnitas del sistema equivalen a los cinco giros en los nudos que permiten rotación, y las otras dos incógnitas son los desplazamientos horizontales que tiene la estructura debido a las fuerzas en dicha dirección aplicada en los nudos. De tal manera que las ecuaciones faltantes se determinan al hacer el equilibrio en los cortantes que produce la aplicación de las fuerzas en los nudos anteriormente nombrados.

Por principios de la estática, se tiene que los cortantes se determinan de la siguiente manera:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_i = M_{ij} + M_{ji} - V_{ji} * L = 0$$

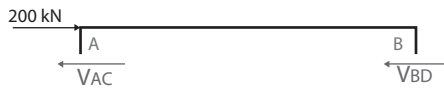
Despejando la incógnita de cortante, se tiene:

$$V_{ji} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

Donde  $V_{ji} = V_{ij}$ .

### Equilibrio en los cortantes de las columnas AC y BD

Figura 3.71. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, cortante en columnas AC y BD



Aplicando la ecuación de cortante para los tramos AC y BD, se tiene:

$$V_{ji} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

#### Tramo AC

$$V_{AC} = \frac{M_{AC} + M_{CA}}{2,8}$$

$$2,8V_{AC} = M_{AC} + M_{CA}$$

$$2,8V_{AC} = 20.768\theta_A + 10.384\theta_C + 11.125,7\Delta_2 + 10.384\theta_A + 20.768\theta_C + 11.125,7\Delta_2$$

$$2,8V_{AC} = 31.152\theta_A + 31.152\theta_C + 22.251,4\Delta_2$$

$$V_{AC} = \frac{31.152\theta_A + 31.152\theta_C + 22.251,4\Delta_2}{2,8}$$

#### Tramo BD

$$V_{BD} = \frac{M_{BD} + M_{DB}}{3,2}$$

$$2,8V_{BD} = M_{BD} + M_{DB}$$

$$2,8V_{BD} = 20.768\theta_B + 10.384\theta_D + 11.125,7\Delta_2 + 10.384\theta_B + 20.768\theta_D + 11.125,7\Delta_2$$

$$2,8V_{BD} = 31.152\theta_B + 31.152\theta_D + 22.251,4\Delta_2$$

$$V_{BD} = \frac{31.152\theta_B + 31.152\theta_D + 22.251,4\Delta_2}{2,8}$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en X se tiene lo siguiente:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 200 - V_{AC} - V_{AC} = 0$$

Despejando los cortantes en función de momentos:

$$200 - V_{AC} - V_{AC} = 0$$

$$V_{AC} + V_{AC} = 200$$

$$\frac{31.152\theta_A + 31.152\theta_C + 22.251,4\Delta_2}{2,8} + \frac{31.152\theta_B + 31.152\theta_D + 22.251,4\Delta_2}{2,8} = 200$$

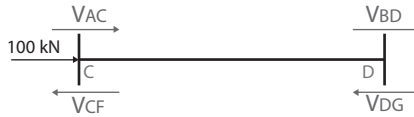
Simplificando la ecuación, se tendría:

$$31.152\theta_A + 31.152\theta_C + 22.251,4\Delta_2 + 31.152\theta_B + 31.152\theta_D + 22.251,4\Delta_2 = 200 \cdot (2,8)$$

$$31.152\theta_A + 31.152\theta_B + 31.152\theta_C + 31.152\theta_D + 44.502,8\Delta_2 = 560 \text{ (Ec.3.6.2.6)}$$

### Equilibrio en los cortantes de las columnas AC y BD

Figura 3.72. Ejercicio 2 método de pendiente-deflexión, cortante en columnas CF y DG



Aplicando la ecuación de cortante para los tramos CF y DG, se tiene:

$$V_{ji} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

#### Tramo CF

$$V_{CF} = \frac{M_{CF} + M_{FC}}{3,2}$$

$$3,2V_{CF} = M_{CF} + M_{FC}$$

$$3,2V_{CF} = 18.172\theta_C + 8.518\Delta_1 + 9.086\theta_C + 8.518\Delta_1$$

$$3,2V_{CF} = 27.258\theta_C + 17.036\Delta_1$$

$$V_{CF} = \frac{27.258\theta_C + 17.036\Delta_1}{3,2}$$

**Tramo DG**

$$V_{DG} = \frac{M_{DG} + M_{GD}}{3,2}$$

$$3,2V_{DG} = M_{DG} + M_{GD}$$

$$3,2V_{DG} = 18.172\theta_D + 8.518\Delta_1 + 9.086\theta_D + 8.518\Delta_1$$

$$3,2V_{DG} = 27.258\theta_D + 17.036\Delta_1$$

$$V_{DG} = \frac{27.258\theta_D + 17.036\Delta_1}{3,2}$$

Haciendo sumatoria de fuerzas en X, se tiene lo siguiente:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 100 + V_{AC} + V_{AC} - V_{CF} - V_{DG} = 0$$

Teniendo en cuenta que  $V_{AC} + V_{AC} = 200$  y reemplazando en la ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 100 + 200 - V_{CF} - V_{DG} = 0$$

Despejando los cortantes en función de momentos:

$$300 - V_{CF} - V_{DG} = 0$$

$$V_{CF} + V_{DG} = 300$$

$$\frac{27.258\theta_C + 17.036\Delta_1}{3,2} + \frac{27.258\theta_D + 17.036\Delta_1}{3,2} = 300$$

Simplificando la ecuación, se tendría:

$$27.258\theta_C + 17.036\Delta_1 + 27.258\theta_D + 17.036\Delta_1 = 300*(3,2)$$

$$27.258\theta_C + 27.258\theta_D + 34.072\Delta_1 = 960 \text{ (Ec.3.6.2.7)}$$

Cuando ya se tenga la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, se puede proceder a dar solución al sistema de ecuaciones. Para este caso, se hará por medio de un sistema matricial.

**Resumen de ecuaciones**

$$32.398\theta_A + 5.815\theta_B + 10.384\theta_C + 11.125,7\Delta_2 = -31,25 \text{ Ec.3.6.2.1}$$

$$5.815\theta_A + 32.398\theta_B + 10384\theta_D + 11125,7\Delta_2 = 31,25 \text{ Ec.3.6.2.2}$$

$$10.384\theta_A + 50.570\theta_C + 5815\theta_D + 8518\Delta_1 + 11125,7\Delta_2 = -41,667 \text{ Ec.3.6.2.3}$$

$$10.384\theta_B + 5.815\theta_C + 65.108\theta_D + 72.69\theta_E + 85.18\Delta_1 + 11.125,7\Delta_2 = 25,667 \quad \text{Ec.3.6.2.4}$$

$$7.269\theta_D + 14.538\theta_E = 10,667 \quad \text{Ec.3.6.2.5}$$

$$31.152\theta_A + 31.152\theta_B + 31.152\theta_C + 31.152\theta_D + 44.502,8\Delta_2 = 560 \quad \text{Ec.3.6.2.6}$$

$$27.258\theta_C + 27.258\theta_D + 34.072\Delta_1 = 960 \quad \text{Ec.3.6.2.7}$$

Se organizan las ecuaciones en un sistema matricial:

$\theta_A$	$\theta_B$	$\theta_C$	$\theta_D$	$\theta_E$	$\Delta_1$	$\Delta_2$				
32.398	5.815	10.384	0	0	0	11.125,7		$\theta_A$	=	-31,25
5.815	32.398	0	10.384	0	0	11.125,7		$\theta_B$	=	31,25
10.384	0	50.570	5.815	0	8.518	11.125,7	*	$\theta_C$	=	-41,667
0	10.384	5.815	65.108	7.269	8.518	11.125,7		$\theta_D$	=	25,667
0	0	0	7.269	14.538	0	0		$\theta_E$	=	10,667
31.152	31.152	31.152	31.152	0	0	44.502,8		$\Delta_1$	=	560
0	0	27.258	27.258	0	34.072	0		$\Delta_2$	=	960

El sistema matricial tiene la siguiente forma:

$$[K][\Delta]=[F]$$

[K] son las rigideces de las barras, [\Delta] son los desplazamientos en los nudos, y [F] son los momentos de fijación en los nudos.

Se despejan las incógnitas [\Delta]:

$$[\Delta]=[K]^{-1} [F]$$

Donde [K]<sup>-1</sup> es la matriz inversa, la cual se presenta de la siguiente manera:

$$| 4,31E-05 \ 2,45E-06 \ -9,1E-07 \ 6,86E-06 \ -3,4E-06 \ -1,3E-05 \ -1,5E-06 |$$

$$| 2,45E-06 \ 4,38E-05 \ 9,23E-06 \ -2,9E-07 \ 1,44E-07 \ -1,4E-05 \ -2,2E-06 |$$

$$[K]^{-1} = \begin{vmatrix} -9,1E-07 & 9,23E-06 & 3,11E-05 & 5,17E-06 & -2,6E-06 & -1,1E-05 & -9,1E-06 \\ 6,86E-06 & -2,9E-07 & 5,17E-06 & 2,35E-05 & -1,2E-05 & -8,8E-06 & -7,2E-06 \\ -3,4E-06 & 1,44E-07 & -2,6E-06 & -1,2E-05 & 7,47E-05 & 4,4E-06 & 3,58E-06 \\ -4,8E-06 & -7,2E-06 & -2,9E-05 & -2,3E-05 & 1,15E-05 & 1,6E-05 & 4,23E-05 \\ -3,6E-05 & -3,9E-05 & -3,1E-05 & -2,5E-05 & 1,23E-05 & 5,51E-05 & 1,4E-05 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la matriz inversa con el vector de momentos de fijación, se tiene la siguiente solución:

$$\theta_A = -0,0097 \text{ rad}$$

$$\theta_B = -0,0090 \text{ rad}$$

$$\theta_C = -0,0158 \text{ rad}$$

$$\theta_D = -0,0118 \text{ rad}$$

$$\theta_E = 0,0066 \text{ rad}$$

$$\Delta_1 = 0,0503 \text{ m}$$

$$\Delta_2 = 0,0450 \text{ m}$$

Con los desplazamientos que se determinaron, se procede a hallar los momentos finales en cada uno de los nudos y, con ellos, realizar el diagrama de momentos:

$$M_{AB} = 31,25 + 11630\theta_A + 5815\theta_B = 31,25 + 11630(-0,0097) + 5815(-0,0090)$$

$$M_{AB} = -133,90 \text{ kNm}$$

$$M_{BA} = -31,25 + 5.815\theta_A + 11.630\theta_B = -31,25 + 5.815(-0,0097) + 11.630(-0,0090)$$

$$M_{BA} = -192,33 \text{ kNm}$$

$$M_{CD} = 41,667 + 11.630\theta_C + 5.815\theta_D = 41,667 + 11.630(-0,0158) + 5.815(-0,0118)$$

$$M_{CD} = -210,70 \text{ kNm}$$

$$M_{DC} = -41,67 + 5.815\theta_C + 11.630\theta_D = -41,67 + 5.815(-0,0158) + 11.630(-0,0118)$$

$$M_{DC} = -270,78 \text{ kNm}$$

$$M_{DE} = 16 + 14.538\theta_D + 7.269\theta_E = 16 + 14.538(-0,0118) + 7.269(0,0066)$$

$$M_{DE} = -107,57 \text{ kNm}$$

$$M_{ED} = -10,667 + 7.269\theta_D + 14.538\theta_E = -10,67 + 7.269(-0,0118) + 14.538(0,0066)$$

$$M_{ED} = 0$$

$$M_{AC} = 20.768\theta_A + 10.384\theta_C + 11.125,7\Delta_2$$

$$M_{AC} = 20.768(-0,0097) + 10.384(-0,0158) + 11.125,7(0,0450)$$

$$M_{AC} = 135,14 \text{ kNm}$$

$$M_{CA} = 10.384\theta_A + 20.768\theta_C + 11.125,7\Delta_2$$

$$M_{CA} = 10.384(-0,0097) + 20.768(-0,0158) + 11.125,7(0,0450)$$

$$M_{CA} = 71,80 \text{ kNm}$$

$$M_{BD} = 20.768\theta_B + 10.384\theta_D + 11.125,7\Delta_2$$

$$M_{BD} = 20.768(-0,0090) + 10.384(-0,0118) + 11.125,7(0,0450)$$

$$M_{BD} = 191,21 \text{ kNm}$$

$$M_{DB} = 10.384\theta_B + 20.768\theta_D + 11.125,7\Delta_2$$

$$M_{DB}=10.384(-0,0090)+20.768(-0,0118)+11.125,7(0,0450)$$

$$M_{DB}=162,14 \text{ kNm}$$

$$M_{CF}=18.172\theta_C+8.518\Delta_1=18.172(-0,0158)+8.518(0,0503)$$

$$M_{CF}=141,34 \text{ kNm}$$

$$M_{FC}=9.086\theta_C+8.518\Delta_1=9.086(-0,0158)+8.518(0,0503)$$

$$M_{FC}=284,90 \text{ kNm}$$

$$M_{DG}=18.172\theta_D+8.518\Delta_1=18.172(-0,0118)+8.518(0,0503)$$

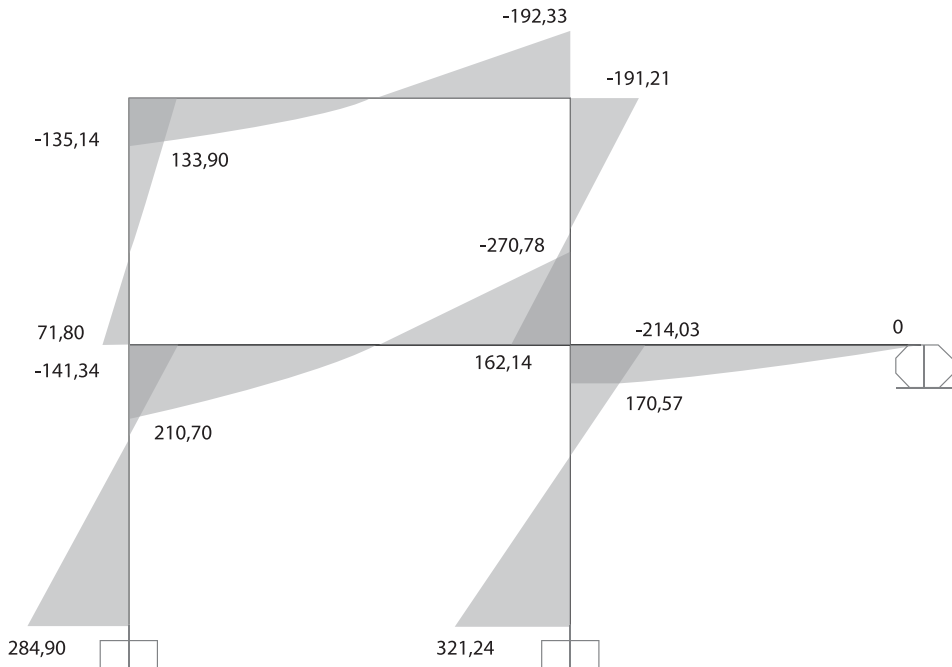
$$M_{DG}=214,03 \text{ kNm}$$

$$M_{GD}=9.086\theta_D+8.518\Delta_1=9.086(-0,0118)+8.518(0,0503)$$

$$M_{GD}=321,24 \text{ kNm}$$

Con los momentos finales anteriormente hallados, se dibuja el diagrama de momentos (figura 3.73).

**Figura 3.73. Diagrama de momentos del ejercicio 2 método de pendiente-deflexión**

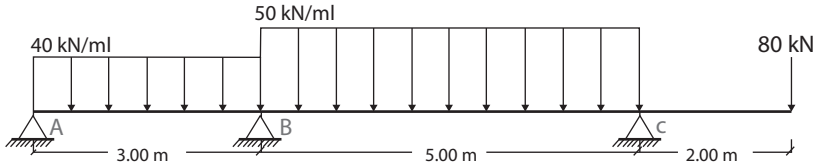




### 3.7. Ejercicios propuestos

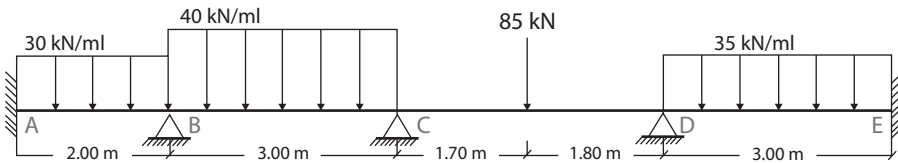
- Calcular las reacciones, el diagrama de cortantes y el diagrama de momentos de la viga hiperestática siguiendo el método del principio de superposición.

**Figura 3.74. Ejercicio propuesto 1**



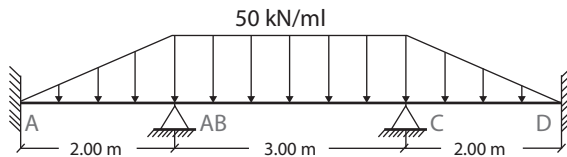
- Determinar las reacciones y los diagramas de cortante y momentos de la viga hiperestática a través de los métodos del segundo teorema de Castigliano y tres momentos. Además, comparar los resultados.

**Figura 3.75. Ejercicio propuesto 2**



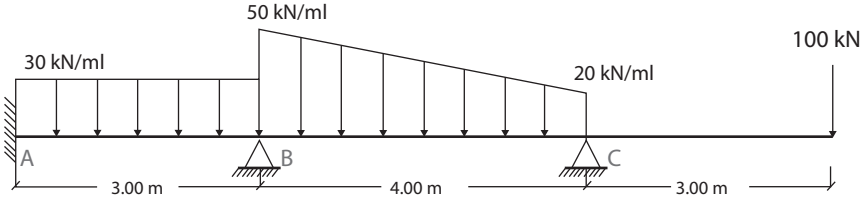
- Calcular las reacciones, el diagrama de cortantes y el diagrama de momentos de la viga hiperestática siguiendo el método del segundo teorema de Castigliano.

**Figura 3.76. Ejercicio propuesto 3**



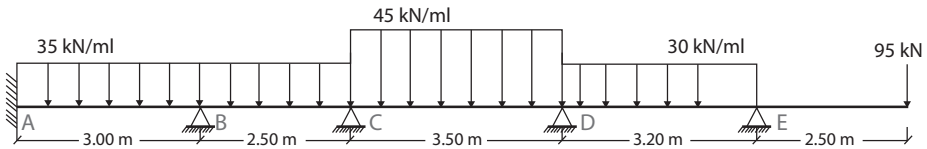
- Determinar las reacciones y los diagramas de cortante y momentos de la viga hiperestática a través de los métodos del principio de superposición y tres momentos.

Figura 3.77. Ejercicio propuesto 4



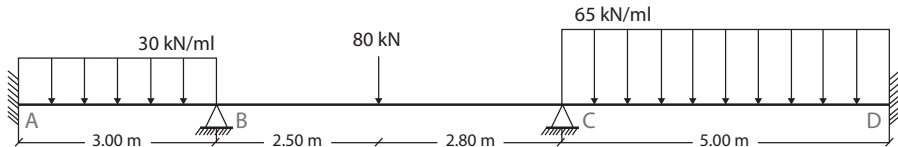
- Determinar las reacciones y los diagramas de cortante y momentos de la viga hiperestática a través de los métodos del segundo teorema de Castigliano y tres momentos. Además, comparar los resultados.

Figura 3.78. Ejercicio propuesto 5



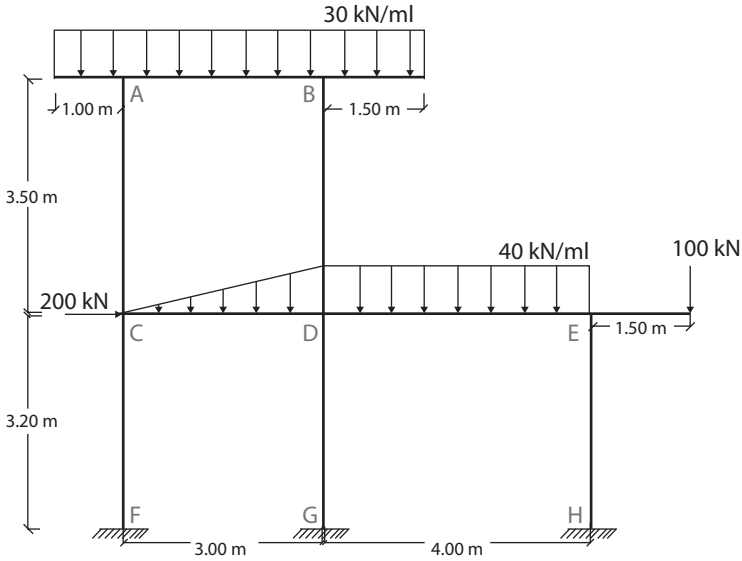
- Determinar las reacciones y los diagramas de cortante y momentos de la viga hiperestática a través de los métodos del segundo teorema de Castigliano, principio de superposición y tres momentos. Además, comparar los resultados.

Figura 3.79. Ejercicio propuesto 6



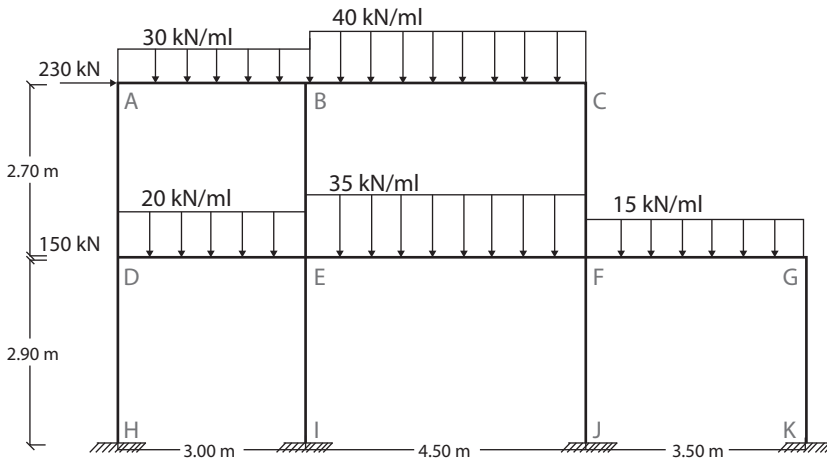
- Calcular los giros y desplazamientos en todos los nudos del pórtico usando el método de pendiente-deflexión y dibujar el diagrama de momentos. Los materiales son  $f'_c = 28 \text{ MPa}$ ,  $E = 3.900 \sqrt{f'_c}$ , vigas con secciones de  $30 \times 40$  y columnas con secciones de  $40 \times 40$ .

**Figura 3.80. Ejercicio propuesto 7**



- Calcular los giros y desplazamientos en todos los nudos del pórtico usando el método de pendiente-deflexión y dibujar el diagrama de momentos. Los materiales son  $f'_c = 24,5 \text{ MPa}$ ,  $E=4.700\sqrt{f'_c}$ , vigas con secciones de 35 x 50 y columnas con secciones de 45 x 45.

**Figura 3.81. Ejercicio propuesto 8**



# BIBLIOGRAFÍA



Hibbeler, R. C. (2012). *Análisis estructural*. Octava edición. México: Pearson Education, S. A.

McCormac, J. (2010). *Análisis de estructuras. Métodos clásicos y matricial*. Cuarta edición. México: Alfaomega Grupo Editorial, S. A.

Ortiz, D. (2015). *Análisis de estructuras: problemas resueltos*. Segunda edición. México: Independiente, Distribuidora Virtual, CivilGeeks.

Uribe, J. (julio de 2000). *Análisis de estructuras*. Segunda edición. Bogotá: Centro Editorial, Escuela Colombiana de Ingeniería.

Este libro fue compuesto en caracteres Minion  
a 11 puntos, impreso sobre papel Bond de 75  
gramos y encuadernado con el método hot melt,  
en julio de 2019, en Bogotá, Colombia.

# ANÁLISIS ESTRUCTURAL I

## GUÍA ACADÉMICA

Este texto enseña a analizar el comportamiento de las estructuras por medio de ejercicios prácticos de vigas y pórticos planos, aplicando principios de estática y de equilibrio en cuerpos rígidos, por medio de distintas metodologías matemáticas.

El libro se divide en tres capítulos, el primero presenta los principios de la estática requerida como base para el análisis de estructuras; el segundo, aplica las metodologías con las cuales se determina la deformación de las estructuras isostáticas, es decir estáticamente determinadas; por último, el tercer capítulo desarrolla las metodologías para el análisis de estructuras hiperestáticas, es decir, estáticamente indeterminadas.

Dirigido a estudiantes de Ingeniería Civil, y demás personas interesadas en aprender a analizar matemáticamente las estructuras isostáticas e hiperestáticas de forma autodidacta.

## Incluye

- ▶ Explicaciones de fácil comprensión para los lectores en torno al análisis de estructuras por diferentes metodologías.
- ▶ Enseñanza sobre soluciones estáticas de vigas y pórticos planos del tema que se requiere como base para el análisis de estructuras.
- ▶ Ejercicios resueltos de alta complejidad que le permiten al lector formarse una visión más amplia acerca del comportamiento de estructuras.
- ▶ Comparación de resultados entre los diferentes métodos de análisis estructural.

### José Rafael Cáceres Rubio

Ingeniero Civil, Especialista en Estructuras, Magister en Ciencia y Tecnología de Materiales. Coordinador de la Especialización en Estructuras de la Universidad Francisco de Paula Santander, docente de cátedra adscrito al departamento de construcciones civiles, vías y transporte con 18 años de experiencia en ingeniería civil enfocado al diseño de estructuras sismoresistentes.

### Jhan Piero Rojas Suárez

Ingeniero Civil, Especialista en Sistemas de Información Geográfico de la U. Distrital Francisco José de Caldas, Especialista en Sistemas Gerenciales de Ingeniería, Magíster en Ingeniería Civil de la U. de los Andes y estudiante de Doctorado en Proyectos en la U. Internacional Iberoamericana. Actualmente es Vicerrector Asistente de Investigación y Extensión de la misma institución e investigador de los grupos Euler y GITOC.

### Javier Alfonso Cárdenas Gutiérrez

Ingeniero Civil, Especialista en Alta Gerencia, Magister en Administración de Empresas con Especialidad en Dirección de Proyectos y estudiante de Doctorado en Proyectos en la U. Internacional Iberoamericana. Director del Programa Académico de Ingeniería Civil de la Universidad Francisco de Paula Santander y Jefe del Departamento de Construcciones Civiles, Vías, Transporte, Hidráulica y Fluidos. Actualmente es profesor de Planta de la UFPS, Director del Grupo de Investigación GITOC.



Universidad Francisco  
de Paula Santander  
Vigilada Mineducación

