	<b>GESTIÓN DE SERVICIOS ACADÉMICOS Y BIBLIOTECARIOS</b>	<b>CÓDIGO</b>	FO-GS-15
		<b>VERSIÓN</b>	02
<b>ESQUEMA HOJA DE RESUMEN</b>		<b>FECHA</b>	03/04/2017
		<b>PÁGINA</b>	1 de 1
<b>ELABORÓ</b>	<b>REVISÓ</b>	<b>APROBÓ</b>	
Jefe División de Biblioteca	Equipo Operativo de Calidad	Líder de Calidad	

## RESUMEN TRABAJO DE GRADO

AUTOR(ES): NOMBRES Y APELLIDOS COMPLETOS

NOMBRE(S): REINALDO JOSÉ APELLIDOS: VELÁSQUEZ GÓMEZ

FACULTAD: INGENIERÍA

PLAN DE ESTUDIOS: INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DIRECTOR:

NOMBRE(S): DINAEEL APELLIDOS: GUEVARA IBARRA

TÍTULO DEL TRABAJO (TESIS): UN MODELO DE DOS RAYOS MODIFICADO CON UTD Y EFECTOS ATMOSFÉRICOS: ANÁLISIS DE REFLEXIÓN EN TERRENOS INCLINADOS.

En este proyecto de investigación se desarrolló una novedosa manera de considerar efectos refractivos en la propagación de ondas electromagnéticas en la atmosfera, reflejados en un modelo analítico basado en el modelo clásico de dos rayos y conceptos de óptica geométrica, el cual, junto con un modelo de UTD (Teoría Uniforme de la Difracción), cuenta con la capacidad de considerar reflexiones y difracciones generadas en las superficies de un terreno irregular para altas frecuencias. Además de esto, con la finalidad de validar la formulación desarrollada, se realizaron y analizaron cálculos de pérdidas de camino para el caso de estudio de una cuña con pérdidas en condiciones de atmosfera estándar. Los resultados obtenidos fueron comparados con la técnica numérica SSPE (Ecuación Parabólica de Paso Dividido).

PALABRAS CLAVES: PROPAGACIÓN MULTICAMINO, MODELO DE DOS RAYOS, UTD, REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA, TERRENOS IRREGULARES.

CARACTERÍSTICAS:

PÁGINAS: 67 PLANOS: 0 ILUSTRACIONES: 12 CD ROOM: 0

UN MODELO DE DOS RAYOS MODIFICADO CON UTD Y EFECTOS ATMOSFÉRICOS:  
ANÁLISIS DE REFLEXIÓN EN TERRENOS INCLINADOS.

REINALDO JOSÉ VELÁSQUEZ GÓMEZ

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
SAN JOSÉ DE CUCUTA

2021

UN MODELO DE DOS RAYOS MODIFICADO CON UTD Y EFECTOS ATMOSFÉRICOS:  
ANÁLISIS DE REFLEXIÓN EN TERRENOS INCLINADOS.

Presentado por:

REINALDO JOSÉ VELÁSQUEZ GÓMEZ

Director:

PhD. DINAEL GUEVARA IBARRA

Codirector:

MSc. DIEGO ANDRES PARADA ROZO

Anteproyecto para optar por el título de Ingeniero Electrónico

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

SAN JOSÉ DE CUCUTA

2021

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE UN TRABAJO DE GRADO

Fecha: CÚCUTA, 27 DE MAYO DE 2021  
Hora: 16:00  
Lugar: MODALIDAD REMOTA SINCRÓNICO  
Plan de Estudios: INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
Título de la Tesis: "UN MODELO DE DOS RAYOS MODIFICADO CON UTD Y EFECTOS ATMOSFÉRICOS ANÁLISIS DE REFLEXIÓN EN TERRENOS INCLINADOS."  
Jurados: IE, MSc ANGELO JOSEPH SOTO VERGEL  
IE, PhD FRANCISCO ERNESTO MORENO GARCÍA  
Director: IE, PhD. DINAEL GUEVARA IBARRA  
Codirector: IE, MSc. DIEGO ANDRÉS PARADA ROZO

Nombre del Estudiante	Código	Calificación
REINALDO JOSÉ VELÁSQUEZ GÓMEZ	1161420	CINCO, CERO (5,0)

### LAUREADA

  
ANGELO JOSEPH SOTO VERGEL

  
FRANCISCO ERNESTO MORENO GARCÍA



**DINAEL GUEVARA IBARRA**  
Coordinador Comité Curricular  
Ingeniería Electrónica

**CARTA DE AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA  
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL Y LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL  
TEXTO COMPLETO.**

San José de Cúcuta, 28 de Julio de 2021.

Señores:

BIBLIOTECA EDUARDO COTE LAMUS

Cordial saludo,

Yo, Reinaldo José Velásquez Gómez, identificado con la cédula de ciudadanía No 1.090.522.971, autor del trabajo de grado, en modalidad proyecto de investigación, titulado “UN MODELO DE DOS RAYOS MODIFICADO CON UTD Y EFECTOS ATMOSFÉRICOS: ANÁLISIS DE REFLEXIÓN EN TERRENOS INCLINADOS” presentado y aprobado en el año 2021 como requisito para optar al título de Ingeniero Electrónico; autorizo a la biblioteca de la Universidad Francisco de Paula Santander, Eduardo Cote Lamus, para que con fines académicos, muestre a la comunidad en general la producción intelectual de esta institución educativa, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- los usuarios pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página web de la Biblioteca Eduardo Cote Lamus y en las redes de información del país y el exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad Francisco de Paula Santander.
- Permita la consulta, la reproducción, a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc.; y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Lo anterior, de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la ley 1982 y el artículo 11 de la decisión andina 351 de 1993, que establece que “**los derechos morales del trabajo son propiedad de los autores**”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

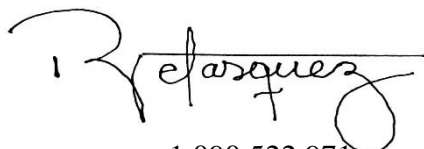
  
1.090.522.971

Tabla de Contenido.		Página
Resumen.		11
1. Planteamiento del problema.		12
2. Justificación.		14
2.1. Impacto Esperado.		14
2.2. Beneficios Tecnológicos.		14
2.3. Beneficios Académicos.		15
2.4. Beneficios Institucionales.		15
3. Alcances.		16
3.1. Tipo de proyecto.		16
4. Limitaciones y Delimitaciones.		17
4.1. Limitaciones.		17
4.2. Delimitaciones.		17
5. Objetivos.		18
5.1. Objetivo General.		18
5.2. Objetivos Específicos.		18
6. Marco Referencial.		19
6.1. Estado del arte de la investigación.		19
6.2. Marco Teórico.		21
6.2.1. Propiedades electromagnéticas de los materiales.		21

6.2.2. Los tres mecanismos básicos de la propagación.	22
6.2.3. Técnica de trazado de rayos.	25
6.2.4. Modelo de dos rayos clásico.	26
6.2.5. Refracción Troposférica.	28
6.2.6. Método de la Ecuación Parabólico de paso dividido (SSPE).	30
7. Diseño Metodológico.	32
7.1. Metodología.	32
8. Desarrollo de la formulación de un modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD bajo efectos atmosféricos para terrenos inclinados.	34
8.1. Modelo de dos rayos modificado bajo efectos atmosféricos para tierra plana.	34
8.2. Análisis de reflexión.	39
8.3. Modelado de terrenos irregulares.	47
8.4. Detección de intersecciones.	48
8.5. Consideración de las propiedades electromagnéticas del terreno.	49
8.6. Cálculo de la longitud de los rayos ópticos.	50
8.7. Modelado de difracción.	51
9. Simulaciones y resultados.	55
10. Conclusiones y trabajos futuros.	64
Producción.	66
Referencias.	67

Lista de figuras.	Página
Figura 1. Ray-Path de los rayos directos y reflejados para medios no homogéneos en un modelo de dos rayos clásico. Fuente: Autor.	28
Figura 2. Efectos de los gradientes de la refractividad y refractividad modificada en la propagación de los rayos. Fuente: [3].	30
Figura 3. Ray-Path del rayo reflejado bajo efectos de refractividad atmosférica en un modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD para tierra plana. Fuente: Autor.	35
Figura 4. Geometría de las longitudes de trayecto óptico. Fuente: Autor.	38
Figura 5. Ray path bajo efectos de refracción atmosférica para los casos de reflexión y recepción: a) en el mismo segmento. b) en diferentes segmentos. Fuente: Autor.	40
Figura 6. Perfil de terreno representado mediante aproximación por segmentación lineal. Fuente: Autor.	47
Figura 7. Geometría de la difracción por una cuña. Fuente: Autor.	52
Figura 8. Geometría de los escenarios canónicos establecidos. Fuente: Autor.	55
Figura 9. Ray path considerando una cuña con pérdidas para un barrido de la coordenada de recepción a) horizontal. b) vertical. Fuente: Autor.	57
Figura 10. Perfiles de campo eléctrico vertical para escenarios: a) I. b) II. c) III. Fuente: código SSPE-UFGM.	58
Figura 11. Perfil de Path loss horizontal para escenario: a) I. b) II. c) III. Fuente: Autor.	60
Figura 12. Perfil de Path loss vertical para escenarios: a) I. b) II. c) III. Fuente: Autor.	61



	Lista de tablas.	Página
Tabla 1.	Parámetros de simulación.	56
Tabla 2.	Resultados estadísticos de path loss para los casos canónicos establecidos.	62

### **Resumen.**

En este proyecto de investigación se desarrolló un novedoso modelo analítico de propagación electromagnética, fundamentado en Óptica Geométrica (Geometrical Optics, GO) y el modelo de dos rayos, para incluir los efectos atmosféricos y características del terreno en la propagación de ondas, el cual, junto con un modelo de Teoría Uniforme de la Difracción (Theory Uniform of Diffraction, UTD), cuenta con la capacidad de considerar reflexiones y difracciones generadas en las superficies de un terreno irregular. Su mayor ventaja, con respecto a los métodos numéricos existentes, radica en el cálculo preciso de parámetros de camino, tales como intensidad de campo, fase, longitud óptica y polarización de la onda. Asimismo, con la finalidad de validar la precisión y aplicabilidad del modelo propuesto, se implementó en MATLAB la formulación desarrollada en comparación con la técnica numérica de Ecuación Parabólica (Parabolic Equation, PE), destacada por su rapidez y desempeño, para predicción de pérdidas de camino (Path loss) en diferentes casos canónicos conformados por un terreno irregular bajo condiciones de atmosfera estándar. A partir de esto, se realizaron cálculos estadísticos, tales como Desviación Estándar y Diferencia Media Absoluta en donde los resultados obtenidos mostraron un comportamiento similar que fue incrementando con base en la frecuencia.

## 1. Planteamiento del problema.

Los escenarios de radiopropagación tienden a ser entornos complejos para ser modelados debido a que requieren de consideraciones, tales como, factores de terreno y caracterización electromagnética de superficies, los cuales producen efectos refractivos y difractivos en la propagación de las ondas. Inclusive, usando algunos algoritmos numéricos, tales como, FDTD (Diferencias finitas en el dominio del tiempo), FEM (Métodos de elementos finitos) y MoM (Método de Momentos) se requiere de un alto costo computacional dependiendo de la complejidad en el modelado del escenario. Es por esto que las constantes mejoras en los sistemas de comunicaciones inalámbricas causadas por el aumento de la demanda de mejoras en tecnología, despiertan el interés en modelos de propagación electromagnética basados en soluciones analíticas [1], [2].

Recientemente, muchos estudios han demostrado el papel y la importancia de los métodos basados en GO (Óptica Geométrica) para el análisis de propagación troposférica [3]–[8]. El modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD (Teoría Uniforme de la Difracción) bajo efectos atmosféricos es un modelo asintótico determinista de radiopropagación fundamentado en GO, el cual considera un camino directo y un camino de propagación reflejado en el suelo entre una antena transmisora y una antena receptora. Este modelo se utiliza para calcular el punto de primera reflexión en el suelo con la finalidad de predecir el cálculo del campo eléctrico en el escenario, considerando el comportamiento de las ondas electromagnéticas como un rayo óptico que describe una trayectoria curvada debido a los efectos de refractividad atmosférica en medios no homogéneos. A pesar de esto, este modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD bajo efectos de refractividad atmosférica, estudiado en trabajos previos, solamente es válido para los casos donde el radio enlace se implementa en tierra plana con línea de visión despejada, es

decir, la propagación de las ondas electromagnéticas se encuentra libre de objetos entre el transmisor y receptor [7], por este motivo, se busca un enfoque más abierto hacia terrenos irregulares.

Con base en lo descrito anteriormente, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Es el modelo de dos rayos modificado con UTD y efectos atmosféricos una técnica capaz de abordar problemas de radiopropagación que incluyen terrenos inclinados, garantizando la precisión de sus resultados?

## **2. Justificación.**

La propuesta de investigación se enfoca en un análisis de reflexión sobre un terreno inclinado en un modelo de dos rayos modificado con UTD bajo efectos refractivos, ya que debido a la creciente demanda de una constante mejoría en los sistemas de comunicaciones inalámbricas, surge la necesidad de modelos deterministas que operen para altas frecuencias en los servicios de radiocomunicaciones, a fin de que su implementación represente una disminución en los recursos computacionales en comparación con los modelos numéricos existentes.

Así, la propuesta de investigación consiste en una alternativa más factible que los algoritmos numéricos implementados en los problemas de radiopropagación troposférica y con presencia de perfiles de terreno.

### **2.1. Impacto Esperado.**

Por medio de la evaluación de los resultados obtenidos de la comparación entre el modelo determinista planteado y un algoritmo numérico DMFT-SSPE (Ecuación Parabólica de paso dividido complementado con la Transformada Mixta de Fourier Discreta), se espera validar un modelo de dos rayos modificado con UTD bajo efectos refractivos como un modelo determinista asintótico preciso, en donde su principal ventaja reside en la relativa simplicidad de su implementación para casos en los cuales los efectos de la reflexión y la difracción provocados por objetos en el terreno presentan una contribución significativa en la predicción de campo eléctrico.

### **2.2. Beneficios Tecnológicos.**

- El desarrollo de modelos deterministas para el análisis de propagación troposférica es un factor clave para escenarios complejos donde la información topográfica detallada consume demasiados recursos de computación y tiempo de ejecución para los algoritmos computacionales.

- El desarrollo de modelos de propagación de ondas de radio es un factor clave en la planificación, análisis y optimización de las redes inalámbricas.

### **2.3. Beneficios Académicos.**

- El desarrollo de trabajos de investigación implica fortalecer tanto el desarrollo de las competencias investigativas en docentes y estudiantes como la producción intelectual con la finalidad de dar respuestas a las problemáticas del entorno.
- La divulgación de la investigación en revistas científicas, seminarios nacionales e internacionales, entre otros dará a conocer las capacidades investigativas de los estudiantes del programa de ingeniería electrónica.

### **2.4. Beneficios Institucionales.**

- El desarrollo de investigaciones de los estudiantes da reconocimiento a la institución y al programa académico, mejorando los índices de calidad y el deber institucional.
- El compromiso para el desarrollo de proyectos de investigación liderado por docentes como orientadores de los estudiantes, facilitando los recursos para la ejecución del proyecto demuestra el compromiso del programa de Ingeniería Electrónica con la educación de alta calidad.

### **3. Alcances.**

La propuesta de esta investigación ofrece la formulación y aplicación del cálculo del punto de primera reflexión para el escenario canónico: obstrucción en la línea de visión por un terreno inclinado bajo efectos de refractividad atmosférica para un modelo de dos rayos modificado y complementado con los principios de UTD. En el modelo será evaluada su precisión y aplicabilidad mediante una comparación de los resultados obtenidos con un algoritmo numérico DMFT-SSPE implementado en trabajos previos por el Grupo de Antenas, Propagación y Teoría Electromagnética (GAPTEM) de la Universidad Federal de Minas Gerais en [5], [6].

#### **3.1. Tipo de proyecto.**

Debido a que el proyecto busca un modelo de dos rayos modificado y complementado con los principios de UTD más realista mediante el cálculo del punto de primera reflexión de los rayos sobre un terreno inclinado y bajo efectos de refractividad atmosférica, se enmarca en el tipo de investigación científica, que, como menciona Hernández Sampieri, se concibe como un conjunto de procesos sistemáticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno; es dinámica, cambiante y evolutiva [9].

## **4. Limitaciones y Delimitaciones.**

### **4.1. Limitaciones.**

La evaluación de la precisión y aplicabilidad del modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD en el escenario canónico propuesto se realizará mediante una comparación de los resultados obtenidos con un algoritmo numérico DMFT-SSPE por medio de una simulación en MATLAB. Por lo tanto, la simulación está restringida por el uso de la licencia del software.

El escenario canónico que se plantea en la propuesta de investigación consiste en una cuña como terreno inclinado que obstaculiza la propagación de la onda entre las antenas transmisora y receptora, en donde la interpretación correcta de su geometría influye en gran parte en los fenómenos de reflexión y difracción que experimentan las ondas recibidas por la antena receptora.

### **4.2. Delimitaciones.**

La propuesta de investigación fue enfocada para un escenario canónico conformado por terreno plano y un terreno inclinado dentro de la línea de visión de las antenas, además de considerar los efectos refractivos en una atmosfera estándar.

El desarrollo de esta propuesta de investigación se llevó a cabo en un periodo de 6 meses, contados a partir de la fecha de aprobación.



## **5. Objetivos.**

Para el desarrollo de la propuesta de investigación se plantearon los siguientes objetivos.

### **5.1. Objetivo General.**

Proponer un análisis del fenómeno de reflexión sobre terrenos inclinados dentro de un modelo de dos rayos modificado con UTD y efectos atmosféricos.

### **5.2. Objetivos Específicos.**

Dentro del desarrollo de la propuesta de investigación se siguieron los siguientes objetivos específicos.

1. Realizar una revisión bibliográfica sobre los modelos de propagación basados en GO y modelo de dos rayos para los casos de efectos de refractividad atmosférica.
2. Proponer un análisis de reflexión sobre un terreno inclinado dentro de un modelo de dos rayos bajo efectos refractivos.
3. Obtener una ecuación para el cálculo del punto de reflexión sobre un terreno inclinado en un modelo de dos rayos modificado con UTD bajo efectos de refractividad atmosférica.
4. Establecer los casos canónicos para aplicar el modelo propuesto y definir los parámetros de simulación.
5. Implementar en MATLAB el modelo propuesto aplicado a problemas canónicos.
6. Comparar los resultados obtenidos en la implementación del modelo propuesto con un algoritmo DMFT-SSPE.
7. Divulgar los resultados obtenidos del proyecto de investigación.

## **6. Marco Referencial.**

A continuación, se describen artículos de investigación que se tomaron como base teórica para el desarrollo de la propuesta de investigación.

### **6.1. Estado del arte de la investigación.**

Modelar con precisión los fenómenos de radio propagación representa el factor clave en los diseños y futuros avances de los sistemas de comunicación inalámbricos. En los sistemas de radio propagación, debido a fenómenos como reflexión y difracción, se presentan señales de radio en la recepción provenientes de caminos diferentes del directo. Además de estos fenómenos, tan pronto como los radares meteorológicos se volvieron asequibles, inusuales efectos atmosféricos comenzaron a ser detectados en la propagación de ondas, los cuales corresponden con el fenómeno de la refracción atmosférica, dicho fenómeno, consiste en la curvatura de la trayectoria de ondas electromagnéticas debido a la variación de refractividad en las capas más bajas de la atmosfera.

Con el paso del tiempo se fueron desarrollando métodos numéricos para considerar los diferentes fenómenos en la propagación de ondas en las atmosfera, de los cuales la técnica de la ecuación parabólica tomó un papel preponderante con respecto a los demás métodos numérico por su rapidez y desempeño, sin embargo, estos se comenzaron a volver obsoletos a consecuencia de un alto costo computacional y tiempos de simulación que no lograron satisfacer las necesidades que demandan los sistemas de comunicación con base en las constantes mejoras en tecnología. Con base en esto, el desarrollo de modelos analíticos de propagación electromagnética que incluyan las propiedades de refractividad en la atmosfera representa una solución viable para los problemas que conlleva la aplicación de los métodos numéricos.

Recientemente, muchos estudios han mostrado el papel y la importancia de la técnica Ray Tracing (trazado de rayos) en el análisis de propagación atmosférica [3], [4], esta técnica analítica,

basada en conceptos de óptica geométrica, consiste en el lanzamiento de múltiples rayos desde un transmisor, cada uno con un ángulo diferente, de tal forma que los rayos lleguen hasta un receptor. Con base en esto, el grupo de Investigación y Desarrollo en Electrónica y Telecomunicaciones (GIDET) en cooperación con el Grupo de Antenas, Propagación y Teoría electromagnética (GAPTEM) de la Universidad Federal de Minas Gerais, para hacer frente a los problemas mencionados y cumplir con los requerimientos de los avances tecnológicos, postularon primeramente un modelo de dos rayos modificado bajo efectos atmosféricos. Este modelo, basado en conceptos de óptica geométrica, asume que de los múltiples rayos lanzados desde el transmisor en la técnica Ray Tracing, existe un rayo en la recepción por medio de un camino directo y otra producto de una reflexión sobre el terreno, dicha formulación permite incluir los efectos de refracción atmosférica en la propagación de las ondas para un escenario conformado por tierra plana. Asimismo, se implementó el modelo propuesto en comparación con un algoritmo de ecuación parabólica desarrollado por los mismos autores para tierra plana perfectamente conductora bajo condiciones de atmosfera estándar, los resultados obtenidos mostraron un comportamiento similar entre ellos [5].

Posterior a ello, como consecuencia de que la base de la formulación no incluía el fenómeno de la difracción en la propagación de las ondas, se desarrolló un modelo UTD [10] y, posteriormente, fue incorporado en el modelo de dos rayos modificado bajo efectos atmosféricos. El modelo de dos rayos modificado bajo efectos atmosféricos, complementado con el modelo UTD, demostró tener la capacidad de presentar resultados con precisión, con respecto a la técnica de ecuación parabólica, para un caso canónico representado por un terreno con forma de cuña perfectamente conductora [6].

Después de esto, el foco de estudio en el modelo de dos rayos modificado con UTD y efectos

atmosféricos fue incluir la caracterización electromagnética del terreno, para ello, anterior a esto, se desarrollaron mejoras en el algoritmo numérico tales como la inclusión de caracterización electromagnética mediante la Transformada Discreta Mixta de Fourier y la inclusión del término Back Ward en el algoritmo [2]. Con base en esto, la formulación fue validada, considerando como referencia el nuevo algoritmo DMFT-SSPE, para el caso de estudio de una cuña con pérdidas [7].

No obstante, aunque se consiguieron resultados cercanos, el modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD bajo efectos atmosféricos seguía estando limitado para análisis de reflexión en tierra plana. Por tal motivo, el enfoque de estudio en este proyecto de investigación, consiste en el aporte de un análisis de reflexión junto con una novedosa formulación de trazado de rayos para terrenos inclinados. Además de esto, cabe destacar que la formulación desarrollada en este proyecto de investigación considera modelamiento de perfiles de terreno mediante aproximación por segmentos de línea para aplicaciones en futuros casos prácticos.

## **6.2. Marco Teórico.**

Para la propuesta de un análisis de reflexión bajo efectos de refractividad atmosférica sobre un terreno inclinado se consideran las bases teóricas descritas a continuación.

### **6.2.1. Propiedades electromagnéticas de los materiales.**

Las características electromagnéticas del terreno inclinado planteado en el escenario canónico de la propuesta de investigación se deben considerar para analizar el comportamiento de la onda reflejada sobre el terreno. Estas características electromagnéticas pueden ser calculadas a partir de las propiedades electromagnéticas de un material, tales como la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y la conductividad eléctrica.

#### *6.2.1.1. Permitividad eléctrica ( $\epsilon$ ) y Permeabilidad magnética ( $\mu$ ).*

La permitividad eléctrica y permeabilidad magnética son parámetros físicos que describen la

capacidad de un material, medios o sustancias de afectar o ser afectados por los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente. Estos parámetros están dados por (1):

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \quad (1)$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

Donde  $\epsilon_r$  se conoce como permitividad relativa y es la razón de la permitividad del material a la del vacío ( $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m$ ) y  $\mu_r$  es la permeabilidad relativa y es la razón de la permeabilidad del material a la del vacío ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} H/m$ ).

#### 6.2.1.2. Conductividad eléctrica ( $\sigma$ ).

Es la medida de la capacidad de un material, medio o sustancia para dejar pasar la corriente eléctrica a través de él, sus unidades en el sistema ingles son  $S/m$  (siemens por metro).

### 6.2.2. Los tres mecanismos básicos de la propagación.

La reflexión, difracción y dispersión son los tres mecanismos básicos de propagación que se presentan en un radioenlace. Estos mecanismos permiten conocer los diferentes fenómenos que se pueden presentar en la transmisión de las ondas como se explicará a continuación.

#### 6.2.2.1. Dispersión.

La dispersión ocurre cuando el medio donde una onda electromagnética se propaga está conformado de objetos con dimensiones pequeñas en comparación con la longitud de onda del rayo propagante [11]. Por lo tanto, la dispersión es un fenómeno que nunca sucederá para los escenarios de modelos basados en óptica geométrica, puesto que como se ha mencionado anteriormente en la propuesta de investigación, en la óptica geométrica los objetos que conforman el escenario se caracterizan por tener dimensiones mucho más grandes que la longitud de onda del rayo propagante, esto a fin de que el comportamiento de los rayos se puedan aproximar como el comportamiento de un rayo óptico, facilitando el estudio de estos.

### 6.2.2.2. Reflexión.

La reflexión ocurre cuando una onda electromagnética que se propaga en un medio colisiona con otro medio con propiedades electromagnéticas diferentes, donde la onda incidente en el medio es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida. En los modelos de dos rayos, las componentes del campo eléctrico incidente y reflejado se relacionan a través del coeficiente de reflexión de Fresnel (símbolo  $\Gamma = \frac{E_r}{E_i}$ ), el cual es una función de las propiedades del material que depende generalmente de la polarización de la onda, el ángulo de incidencia y la frecuencia. Ahora bien, cuando una onda electromagnética incide en un conductor perfecto su energía no consigue pasar de medio, por lo cual toda su energía es reflejada, matemáticamente esto implica que la magnitud del coeficiente de reflexión de Fresnel ( $|\Gamma|$ ) tome un valor unitario, donde el signo del coeficiente es dependiente de la polarización de la onda independientemente del ángulo de incidencia.

Solamente dos tipos de polarización precisan ser considerados para resolver problemas generales de reflexión, polarización paralela y polarización perpendicular, las cuales se caracterizan según el comportamiento del campo eléctrico con respecto al plano de incidencia, por lo tanto, como el coeficiente de reflexión de Fresnel es dependiente de la polarización, en las ecuaciones (2) y (3) se definen el coeficiente de reflexión para cada uno de los casos de polarización.

Coeficiente de reflexión de Fresnel paralelo  $\Gamma_{||}$  :

$$\Gamma_{||} = \frac{\eta_2 \text{sen} \alpha_t - \eta_1 \text{sen} \alpha_i}{\eta_2 \text{sen} \alpha_t + \eta_1 \text{sen} \alpha_i} \quad (2)$$

Coeficiente de reflexión de Fresnel perpendicular  $\Gamma_{\perp}$  :

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \text{sen} \alpha_i - \eta_1 \text{sen} \alpha_t}{\eta_2 \text{sen} \alpha_i + \eta_1 \text{sen} \alpha_t} \quad (3)$$

Donde  $\alpha_i$  representa el ángulo de la componente incidente,  $\alpha_t$  es el ángulo de la componente transmitida,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son las impedancias intrínsecas del medio 1 y 2 respectivamente. La impedancia intrínseca del medio definida en (4) es la razón entre el campo eléctrico y magnético para una onda de plano uniforme en un medio particular.

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (4)$$

Con respecto a los modelos de dos rayos como se verá más adelante en el documento, para el estudio de los rayos ópticos reflejados que se presentan en el escenario se emplea la ley de reflexión de Snell, la cual cómo puede inferirse en (5) afirma que el producto del índice de refracción por el seno del ángulo de incidencia con respecto a la normal es constante para cualquier rayo óptico sobre la superficie que separa dos medios.

$$n_1 \text{sen} \alpha_i = n_2 \text{sen} \alpha_r \quad (5)$$

Donde  $\alpha_r$  es el ángulo de la componente reflejada,  $n_1 = c\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$  y  $n_2 = c\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$  son los índices de refracción del medio 1 y 2 respectivamente. El índice de refracción está definido como el cociente de la velocidad de la luz ( $c = 3 \cdot 10^8$  m/s) respecto a la velocidad de fase ( $v_p$ ).

Por otra parte, las condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell se pueden usar para derivar las ecuaciones (2) y (3), así como las ecuaciones (6) y (7).

$$\alpha_i = \alpha_r \quad (6)$$

$$E_r = \Gamma E_i \quad (7)$$

$$E_t = (1 + \Gamma)E_i$$

### 6.2.2.3. *Difracción.*

El fenómeno de difracción puede ser explicado por el principio de Huygens, que afirma que todos los puntos en un frente de onda pueden ser considerados como fuentes puntuales para la producción de ondas secundarias, y esas ondas secundarias se combinan para producir un nuevo frente de onda en la dirección de propagación [11].

Respecto al modelo de dos rayos modificado, el fenómeno de la difracción sucede cuando los caminos de propagación de los rayos directos y/o reflejados entre la antena transmisora y la antena receptora son obstruidos por una superficie irregular con aristas, concretamente una cuña con pérdidas para el caso canónico propuesto en este documento. Para esos casos los bordes de la cuña actúan como un emisor de fuentes secundarias permitiendo que las ondas se propagan alrededor y por detrás de la cuña (región sombreada), donde la intensidad del campo de una onda difractada en la región sombreada es la suma vectorial de los componentes de campo eléctrico de todas las ondas secundarias.

### **6.2.3. Técnica de trazado de rayos.**

El trazado de rayos es un modelo determinista de radiopropagación, se implementa para conocer la trayectoria del camino de los rayos que se presentan en un medio homogéneo desde una antena transmisora hasta una antena receptora junto con el cálculo de las componentes de los campos presentes en el escenario. El trazado de rayos se fundamenta en la aplicación de GO y los principios de UTD, estos modelos serán explicados rápidamente a continuación.

#### *6.2.3.1. Óptica Geométrica.*

La óptica geométrica es un modelo determinista para altas frecuencias que se emplea en el tratamiento de problemas de radiopropagación en medios homogéneos o aquellos medios que varían lentamente en comparación con la longitud de onda del rayo propagante. A medida que la



frecuencia aumenta, la primera zona de Fresnel, que es la que concentra la mayor parte de la energía, tiende a estrecharse y se puede simular como un rayo óptico. Los rayos ópticos forman trayectorias lineales o curvadas que son perpendiculares al frente de onda.

Por otra parte, de los tres mecanismos básicos de la propagación, la difracción y la dispersión son los mecanismos que la óptica geométrica no toma en cuenta. Por lo tanto, GO solamente contempla la reflexión, donde en la mayoría de los casos, la óptica geométrica resulta poco practica cuando se utiliza sin el acompañamiento de otros modelos para casos complejos.

#### *6.2.3.2. Teoría Uniforme de la Difracción.*

La Teoría Uniforme de la Difracción es una solución asintótica utilizada en gran medida para predecir el campo en una región de sombra provocada por los bordes de un terreno irregular. La formulación de la UTD es rigurosa debido a que la caracterización del escenario mediante los coeficientes de difracción, jugando un papel importante la geometría del borde junto con la amplitud, fase y polarización de la onda incidente en el terreno inclinado [1]. La propuesta de investigación se utilizó junto con un modelo UTD existente, donde este último es implementado para estudiar la difracción de las ondas con el objetivo de predecir el campo eléctrico para la región de sombra causada por los bordes de una cuña, el modelo está basado en la formulación de Luebbers, el cual fue implementado en trabajos de investigación previos, realizados en cooperación entre el GAPTEM y el Grupo de Investigación y Desarrollo en Electrónica y Telecomunicaciones (GIDET) perteneciente a la Universidad Francisco de Paula Santander [1].

#### **6.2.4. Modelo de dos rayos clásico.**

El modelo de reflexión en el suelo de dos rayos o simplemente modelo de dos rayos es un modelo de radiopropagación que se sustenta en la óptica geométrica limitado para los casos canónicos donde la antena transmisora y la antena receptora se encuentran en LOS para medios

homogéneos y en tierra plana. El modelo de dos rayos clásico considera un camino directo y un camino reflejado en el suelo para la propagación de las ondas electromagnéticas entre las antenas transmisora y receptora. Los caminos que contempla el modelo de dos rayos describen trayectorias rectas debido a la consideración de modelos homogéneos, lo cual permite facilitar de manera importante los cálculos de los campos en el escenario. El modelo se considera razonablemente preciso para predecir la intensidad de los campos para distancias de varios kilómetros en sistemas de radio móvil que utilizan torres con alturas que superan los 50 metros [11].

En la Figura 1 se muestran los Ray Path (camino de rayo) que se presentan en el modelo clásico, donde  $Z_T$  y  $Z_R$  son las alturas de las antenas transmisora y receptora respectivamente,  $x_R$  es la distancia en el punto que sucede la reflexión en el suelo y  $R$  la distancia comprendida entre las antenas, donde el campo eléctrico total recibido está dado por (8).

$$E_{TOTAL} = \frac{E_0 \sqrt{G_{LOS}^t G_{LOS}^r}}{l_{LOS}} e^{-j\frac{\omega}{c} l_{LOS}} + \Gamma \frac{E_0 \sqrt{G_R^t G_R^r}}{l_R} e^{-j\frac{\omega}{c} l_R} \quad (8)$$

La expresión en (8) representa el campo eléctrico total  $E_{TOTAL}$  recibido para una frecuencia  $\omega$ , el cual se compone de la suma de la componente directa (LOS) y la componente reflejada en el suelo, donde  $G_{LOS}^t/r$  y  $G_{LOS}^r/r$  son las ganancias de la antena receptora y transmisora en sus respectivas direcciones,  $l_R$  y  $l_{LOS}$  son las longitudes de trayecto óptico que recorren los rayos reflejados en el suelo y directos, respectivamente.

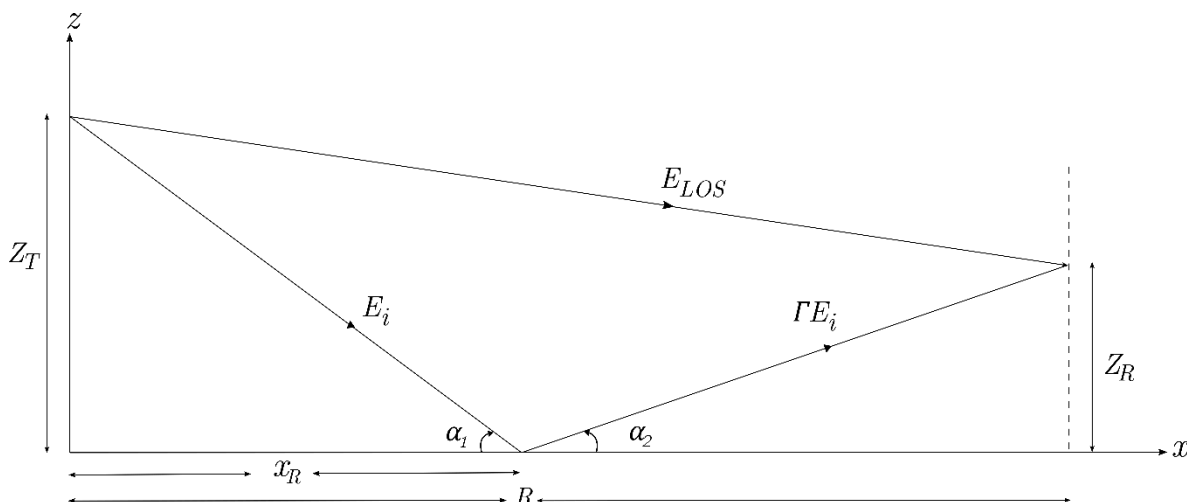


Figura 1. Ray-Path de los rayos directos y reflejados para medios no homogéneos en un modelo de dos rayos clásico. Fuente: Autor.

### 6.2.5. Refracción Troposférica.

En los problemas relacionados con la óptica geométrica es usual asumir un medio homogéneo puesto que para dicho caso el índice de refracción (*símbolo*  $n$ ) se caracteriza por ser constante en cualquier punto del escenario, por lo tanto la luz se propaga en línea recta facilitando de forma significativa el análisis de los fenómenos ópticos. No obstante, para los casos de estudio de radio propagación troposférica, las propiedades refractivas del aire con respecto a la altura hacen que la troposfera sea un medio mayormente estratificado, generando así como consecuencia que la trayectoria que describen los rayos sea curvada.

Las propiedades refractivas del aire pueden expresarse en términos del índice de refracción ( $n$ ) o de la refractividad (*símbolo*  $N$ ) mediante las expresiones (9) y (10).

$$n = 1 + N \cdot 10^{-6} \quad (9)$$

$$N = \frac{77.6}{T} \left( \rho + \frac{4810 \cdot e}{T} \right) \quad \text{unidades } N \quad (10)$$

Donde  $T$  es la temperatura del aire ( $K$ ),  $\rho$  es la presión atmosférica ( $hPa$ ) y  $e$  es la presión del vapor de agua ( $hPa$ ). Por otra parte, el efecto del gradiente de refracción del medio  $\left(\delta = \frac{dn(z)}{dz}\right)$  sobre la curvatura de las ondas puede expresarse utilizando el radio de curvatura de un rayo ( $R$ ) que representa la onda electromagnética tal como se aprecia en (11).

$$\frac{1}{R} = -\frac{dn(z)}{dz} = -\frac{dN(z)}{dz} \cdot 10^{-6} \quad (11)$$

En consecuencia, para la propagación troposférica, con respecto a los parámetros para una atmosfera estándar, el radio de curvatura del rayo bajo el gradiente estándar es aproximado al radio de la curvatura de la tierra ( $R_e = 6378 \text{ km}$ ). Como resultado, se puede derivar la expresión (11) en (12):

$$\frac{dN(z)}{dz} = -157 \frac{N}{\text{km}} \quad (12)$$

Otra magnitud que resulta útil para caracterizar las condiciones de propagación es la refractividad modificada (símbolo  $M$ ), la cual indica que para valores de  $M$  constante el radio de la curvatura del rayo tiende a ser similar al radio de la curvatura de la tierra. La refractividad modificada  $M$  se define en (13).

$$M = N + \frac{z}{R_e \cdot 10^{-6}} \quad (13)$$

$$M = N + 157 \cdot z$$

$$M = (m - 1) \cdot 10^6$$

Donde  $m$  es el índice de refractividad modificada y  $z$  es la altura expresada en km.

Los efectos de los gradientes de la refractividad y refractividad modificada con respecto a la altura ( $h$ ) se ilustran con mayor detalle en la Figura 2, donde se muestra la curvatura que presentan las ondas electromagnéticas en comparación con la curvatura de la tierra. Así mismo, se puede

notar que para el caso del rayo que se propaga bajo el gradiente de la refracción  $\frac{dN(h)}{dh} = -157 \frac{N}{km}$  es paralelo a la superficie de la tierra, puesto que como se explicó anteriormente, para valores de  $M$  constante el radio de curvatura del rayo tiende a ser el mismo al de la tierra.

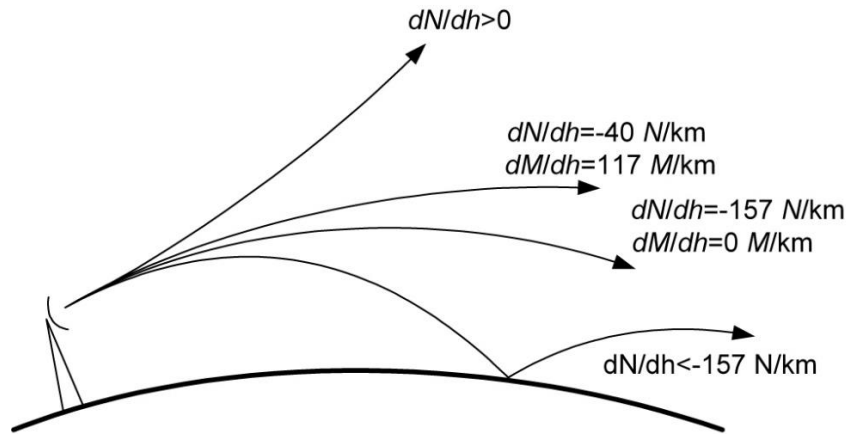


Figura 2. Efectos de los gradientes de la refractividad y refractividad modificada en la propagación de los rayos. Fuente: [3].

#### 6.2.6. Método de la Ecuación Parabólico de paso dividido (SSPE).

La ecuación parabólica es una técnica que se ha implementado extensivamente en el modelado de problemas de radio propagación, en este caso en específico, una herramienta que permite evaluar difracciones junto con efectos atmosféricos presentes en un radio enlace para un terreno irregular, por este motivo, es considerada como herramienta de comparación para evaluar la formulación obtenida en el desarrollo de la propuesta de investigación. La ecuación parabólica es obtenida considerando como base la ecuación Helmholtz con respecto a un plano cartesiano  $xz$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0 n^2 \psi = 0 \quad (14)$$

Donde  $x$  y  $z$  son la distancia y altura del escenario, respectivamente, el término  $\psi(x, z)$  corresponde con la componente de campo eléctrico,  $k_0$  es el número de onda en el espacio libre y  $n$  representa el índice de refracción del medio. En adición, empleando una función auxiliar

reducida  $u(x, z) = e^{-ikx}\psi(x, z)$ , (14) es redefinida en términos de esta función como:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2(n^2 - 1) \right] u(x, z) = 0 \quad (15)$$

Donde la expresión anterior es solucionada mediante la implementación de la transformada de Fourier de paso dividido (Split-Step Fourier Transform o SSFT) obtenido como resultado:

$$u(x + \Delta x, z) = e^{\left[ ik_0(n^2-1)\frac{\Delta x}{2} \right]} F^{-1} \left\{ e^{\left( ip^2 \frac{\Delta x}{2k_0} \right)} F \{ u(x, z) \} \right\} \quad (16)$$

En (16),  $F$  y  $F^{-1}$  son las denotaciones de transformada de Fourier rápida y su respectiva inversa, los términos  $u(x, z)$  y  $u(x + \Delta x, z)$  son las sucesiones de los pasos anterior y siguiente, respectivamente y  $p = k_0 \sin(\theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo de propagación.

Además de lo mencionado anteriormente, el método SSPE requiere de un valor de campo inicial  $E_0$  para una distancia inicial  $x_0$ . A partir de estos valores, considerando un terreno aproximado mediante escalonamiento, SSPE realiza cálculos iterativos con la finalidad de obtener, paso a paso, un perfil de campo, en el cual es considerado el valor de campo en la posición anterior.

Por otro lado, el algoritmo SSPE está complementado con DMFT, lo cual permite considerar terrenos con pérdidas en los casos de estudio.

## 7. Diseño Metodológico.

Para el desarrollo de la propuesta de investigación, se estableció la metodología descrita en los siguientes ítems.

### 7.1. Metodología.

**Objetivo 1:** Realizar una revisión bibliográfica sobre los modelos de propagación basados en GO y modelo de dos rayos para los casos de efectos de refractividad atmosférica.

**Metodología:** Se hizo una revisión de las referencias relacionadas con el desarrollo de los modelos deterministas de radiopropagación basados en óptica geométrica junto con bases teóricas de los mecanismos básicos de propagación para el análisis de propagación troposférica con el fin de deducir el comportamiento de los rayos en el escenario canónico propuesto. Las referencias teóricas fueron tomadas de artículos de revistas de investigación científica y libros.

**Objetivo 2:** Proponer un análisis de reflexión sobre un terreno inclinado dentro de un modelo de dos rayos bajo efectos refractivos.

**Metodología:** Se hizo la deducción las funciones que describen la trayectoria de un rayo directo, incidente y reflejado bajo efectos de refracción atmosférica para un terreno aleatorio, para esto, se consideró como base del modelo, el modelo clásico de dos rayos y la ecuación Eikonal para altas frecuencias.

**Objetivo 3:** Obtener una ecuación para el cálculo del punto de reflexión sobre un terreno inclinado en un modelo de dos rayos modificado con UTD bajo efectos de refractividad atmosférica.

**Metodología:** Se obtuvo una ecuación para el cálculo de la coordenada de reflexión sobre un terreno aleatorio, tomando en cuenta las características geométricas y electromagnéticas del perfil de terreno, junto con los efectos de refractividad atmosférica presentes en el escenario.

**Objetivo 4:** Establecer los casos canónicos para aplicar el modelo propuesto y definir los parámetros de simulación.

**Metodología:** Se establecieron los parámetros de simulación tales como, gradiente de refractividad constante, frecuencia de operación, la geometría del terreno junto con su caracterización electromagnética y ubicación espacial, la descripción de las antenas transmisora y receptora en MATLAB, para diferentes casos de estudio.

**Objetivo 5:** Implementar en MATLAB el modelo propuesto aplicado a problemas canónicos.

**Metodología:** Se implementó en MATLAB los algoritmos DMFT-SSPE y del modelo de dos rayos modificado con UTD bajo efectos de refractividad atmosférica propuesto para un terreno inclinado bajo condiciones que se establecieron como escenario de investigación anteriormente.

**Objetivo 6:** Comparar los resultados obtenidos de la implementación del modelo de dos rayos modificado propuesto con un algoritmo DMFT-SSPE.

**Metodología:** Se evaluó la precisión y aplicabilidad del modelo analítico mediante la comparación de los resultados obtenidos en la implementación computacional.

**Objetivo 7:** Divulgar los resultados obtenidos del proyecto de investigación.

**Metodología:** Se dio a conocer a la comunidad universitaria el cumplimiento de los objetivos planteados para la propuesta de investigación por medio de publicación de los resultados obtenidos en el 15th congreso de investigación de European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP) 2021 bajo el artículo titulado “A Modified Two-Ray Model with UTD and Atmospheric Effects: Analysis of Reflected Ray over Sloping Terrain” [12].



## 8. Desarrollo de la formulación de un modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD bajo efectos atmosféricos para terrenos inclinados.

A continuación se presenta el análisis realizado para la formulación del modelado matemático de un modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD considerando efectos refractivos y un terreno irregular, para su posterior evaluación considerando como referencia un método SSPE explicado anteriormente en este libro.

### 8.1. Modelo de dos rayos modificado bajo efectos atmosféricos para tierra plana.

Para el desarrollo de la propuesta de investigación se consideró un modelo existente conocido como modelo de dos rayos modificado bajo efectos atmosféricos para tierra plana, el cual incluye en el modelo de dos rayos clásico efectos refractivos (representados por un gradiente de refractividad) en la propagación de las ondas electromagnéticas para un plano coordenado cartesiano  $xz$  mediante (17), la cual es una derivada de la ecuación Eikonal que relaciona la trayectoria del rayo durante su propagación con el índice de refracción en el medio establecido.

$$\frac{d}{dx} \left( n(z) \cdot \frac{dz}{dx} \right) = n(z) \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \nabla n(z) = \frac{d}{dx} n(z) + \frac{d}{dz} n(z) = \delta \quad (17)$$

$$\rightarrow n(z) \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = \frac{d}{dz} n(z) = \delta$$

Donde  $n(z)$  es el índice de refracción de la atmosfera dependiente de la altura, mientras que  $x$  y  $z$  representan la distancia y altura del rayo en la Figura 3, respectivamente.

La Figura 3 muestra para un terreno plano, la trayectoria curvada de un rayo directo y reflejado en el suelo debido a los efectos de refracción atmosférica para una antena transmisora y receptora separadas por una distancia  $R$ , donde la trayectoria del rayo incidente hasta el punto de primera reflexión forma un ángulo  $\alpha_1$  con el paralelo al plano terrestre. Así mismo, observando la Figura 3, se puede deducir en la trayectoria del rayo incidente, mediante la definición de la recta tangente

a la curva, que  $z_i'(0) = \tan(\alpha_1)$ , donde  $z_i(x)$  es la función de la altura del rayo incidente comprendida desde el transmisor hasta el punto de primera reflexión  $(X, 0)$ , además de que la trayectoria del rayo incidente comienza desde una altura inicial  $Z_T$ , en la cual  $Z_T$  y  $Z_R$  son las alturas de la antena transmisora y receptora, donde esta última se encuentra ubicada en el punto  $(R, Z_R)$ , respectivamente.

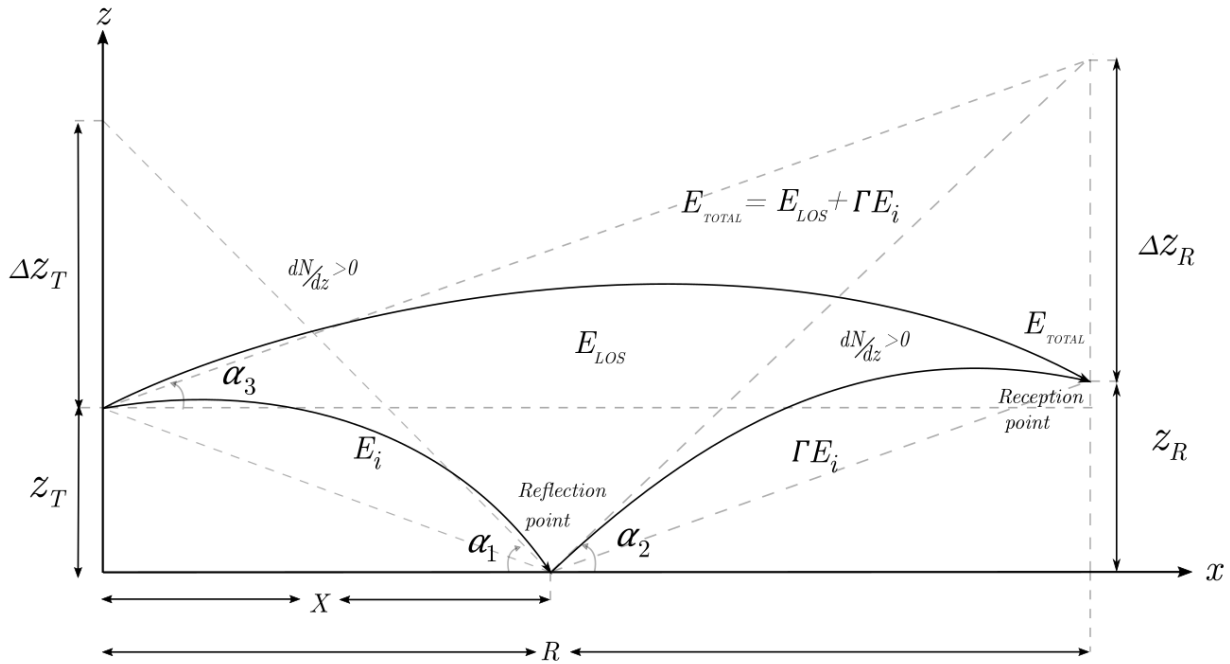


Figura 3. Ray-Path del rayo reflejado bajo efectos de refractividad atmosférica en un modelo de dos rayos modificado y complementado con UTD para tierra plana. Fuente: Autor.

Considerando lo mencionado anteriormente, y en base a cuando el índice de refracción de la atmosfera  $n(z)$  es muy cercano a 1 para cualquier altura, la ecuación diferencial (17) se puede simplificar en (18) para el cálculo de la función de la altura del rayo incidente  $z_i(x)$ .

$$\frac{d^2 z_i(x)}{dx^2} = \delta \quad (18)$$

condiciones iniciales:  $z_i(0) = Z_T$   $z_i'(0) = \tan(\alpha_1) = K_i$   $z_i(X) = 0$

La solución de (18) está dada por (19):

$$z_i(x) = \frac{\delta \cdot x^2}{2} + K_i \cdot x + Z_T \quad 0 < x < X \quad (19)$$

$$\text{donde, } \Delta Z_T = -\frac{\delta \cdot X^2}{2} - 2 \cdot Z_T \quad \& \quad \alpha_1 = \tan^{-1} \left( -\frac{\delta \cdot X}{2} - \frac{Z_T}{X} \right)$$

De igual forma, reescribiendo (17) una vez más, se deriva la función del índice de refracción de la atmosfera dependiente de la altura del rayo propagante dada por (20), donde típicamente el valor del índice de refracción en la superficie de la tierra es considerado como  $n_0 = 1.0003$ .

$$n(z) = \delta \cdot z(x) + n_0 \quad (20)$$

Del mismo modo que en el análisis de altura del rayo directo, para las componentes reflejada y directa se plantean las ecuaciones diferenciales (21) y (23), con sus respectivas soluciones en (19) y (21), donde  $z_r(x)$  y  $z_d(x)$  son las alturas en el rayo reflejado y directo bajo efectos refractivos considerando el escenario planteado en la Figura 3.

$$\frac{d^2 z_r(x)}{dx^2} = \delta \quad (21)$$

$$\text{condiciones iniciales: } z_r(X) = 0 \quad z_r'(X) = \tan(\alpha_2) = K_r \quad z_r(R) = Z_R$$

$$z_r(x) = \frac{\delta \cdot (x - X)^2}{2} + K_r \cdot (x - X) \quad X < x < R \quad (22)$$

$$\text{donde, } \Delta Z_T = -\frac{\delta \cdot (R-X)^2}{2} + R \quad \alpha_2 = \tan^{-1} \left( -\frac{\delta \cdot (R-X)}{2} + \frac{R}{R-X} \right)$$

$$\frac{d^2 z_d(x)}{dx^2} = \delta \quad (23)$$

$$\text{condiciones iniciales: } z_d(0) = Z_T \quad z_d'(0) = \tan(\alpha_3) = K_d \quad z_d(R) = Z_R$$

$$z_d(x) = \frac{\delta \cdot x^2}{2} + K_d \cdot x + Z_T \quad 0 < x < R \quad (24)$$

$$\text{donde, } \Delta Z_T = -\frac{\delta \cdot R^2}{2} \quad \alpha_3 = \tan^{-1} \left( -\frac{\delta \cdot R}{2} - \frac{Z_R - Z_T}{R} \right)$$

Por otra parte, debido a la ley de Snell, los ángulos de incidencia  $\alpha_1$  y reflexión  $\alpha_2$  sobre el terreno plano deben ser equivalentes, como consecuencia, se obtiene la condición:

$$-\frac{\delta \cdot X}{2} - \frac{Z_T}{X} = -\frac{\delta \cdot (R - X)}{2} + \frac{R}{(R - X)} \quad (25)$$

Factorizando la expresión anterior, se obtiene como resultado (26), donde  $X$  corresponde a la distancia en el punto de primera reflexión en el suelo para el caso canónico planteado en la Figura 3, cuya solución está dada por una raíz real positiva:

$$X^3(\delta) - X^2 \left( \frac{3\delta R}{2} \right) + X \left( \frac{\delta R^2}{2} - Z_R - Z_T \right) + RZ_T = 0 \quad (26)$$

El campo eléctrico total recibido está constituido por una componente directa y una reflejada tal y como se expresa en (8). En este caso, las longitudes de la componente directa  $l_{LOS}$  y reflejada corresponden con las longitudes de un rayo óptico. Por definición, la longitud de trayecto óptico entre dos puntos en un medio no homogéneo, es la suma del producto por partes del índice de refracción con elementos infinitesimales de la longitud del camino. De forma integral, la expresión de un OPL (Longitud de trayecto Óptico) está dado por (27):

$$OPL = \int_A^B n(r) \cdot ds \quad (27)$$

Donde  $r$  es el vector que representa la posición del rayo óptico y  $ds$  es el trayecto infinitesimal que recorre el rayo en el trayecto AB. Por lo tanto, observando el comportamiento de los rayos reflejado y directo mostrados en la Figura 4, la expresión en (27) se puede reescribir en (28) para calcular  $l_{LOS}$  y  $l_R$ .

$$l_{LOS} = \int_0^R n(z) \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_d(x) \right]^2} dx = n_0 \int_0^R [n_0 + \delta \cdot z_d(x)] \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_d(x) \right]^2} dx \quad (28)$$

$y$

$$l_R = n_0 \int_0^X n(z) \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_i(x) \right]^2} dx + n_0 \int_X^R n(z) \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_r(x) \right]^2} dx$$

donde,

$$\int_0^X n(z) \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_i(x) \right]^2} dx = n_0 \int_0^X [n_0 + \delta \cdot z_i(x)] \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_i(x) \right]^2} dx$$

$$\int_X^R n(z) \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_r(x) \right]^2} dx = n_0 \int_X^R [n_0 + \delta \cdot z_r(x)] \sqrt{1 + \left[ \frac{d}{dx} z_r(x) \right]^2} dx$$

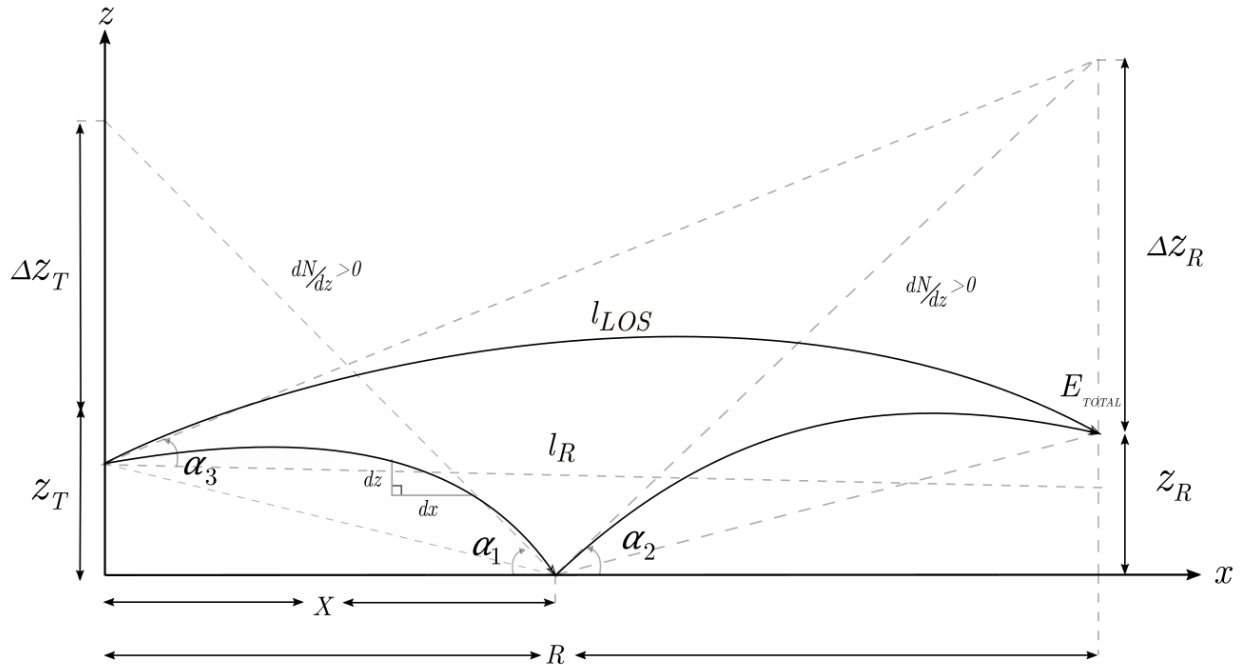


Figura 4. Geometría de las longitudes de trayecto óptico. Fuente: Autor.

## 8.2. Análisis de reflexión.

En esta sección, se presenta como resultado de la propuesta de investigación la formulación de un modelo de dos rayos modificado, el cual se destaca por estar diseñado para un terreno irregular representado mediante aproximación por segmentación lineal, considerar efectos de refracción atmosférica en la propagación de las ondas electromagnéticas para altas frecuencias, además de difracciones que se puedan presentar en el escenario.

Como se ha mencionado en este capítulo, la ecuación Eikonal, fundamentada en los conceptos de la óptica geométrica, permite relacionar la trayectoria que describe un rayo con respecto al índice de refracción, por este motivo, esta ecuación se implementa en el modelamiento de la trayectoria de los rayos presentes en un escenario. Por otra parte, considerando que el estudio de la refracción atmosférica en radiopropagación tiene mayor importancia en la troposfera, puesto que para alturas mayores el gradiente de refracción  $\delta$  tiende a ser constante, se asumió el escenario como un medio estratificado horizontalmente en un plano coordenado cartesiano  $xz$ , lo cual implica que el índice de refracción está solamente en función de la altura, donde el eje  $x$  representa la distancia y el eje  $z$  es la altura. Por consiguiente, la ecuación Eikonal aproximada para altas frecuencias en (17), satisface las condiciones planteadas anteriormente.

En la Figura 5.a, se presenta un modelo de las trayectorias que describen los rayos bajo los efectos atmosféricos, en el cual, un rayo incidente y directo son lanzados con un ángulo inicial de lanzamiento desde un transmisor con altura  $H_T$  hasta un receptor con altura  $\Delta z$  con respecto al terreno. De la misma forma como en el modelo de dos rayos clásico, el rayo incidente es reflejado en una coordenada desconocida  $(X, mX_c + z_1)$  en dirección de una coordenada de recepción deseada  $(R, \Delta z + m(R - x_1) + z_1)$ , donde se asumió que ambos sucesos ocurren en el mismo segmento de línea.



Además de lo mencionado anteriormente, la trayectoria en cada uno de los rayos será explicada con detalle a continuación considerando las siguientes relaciones, con respecto a la Figura 5.a:

$$x_c = X - x_1 \quad (29)$$

$$Z_T = H_T - m(x_1 - X) - z_1 \quad (30)$$

$$Z_R = \Delta z + m(R - X) \quad (31)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta Z_R + Z_R + mx_c + z_1 - H_T}{X} \right) \quad (32)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta Z_R + \Delta z}{R - X} \right) \quad (33)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta Z_R + \Delta z}{R} \right) \quad (34)$$

En (32), (33) y (34) las variables  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  son los ángulos iniciales de lanzamiento con respecto a la horizontal de los rayos incidente, reflejado y directo, respectivamente.

Además de esto, el segmento de línea fue modelado matemáticamente de la siguiente manera:

$$z_{(x)} = m(x - x_2) + z_2 \quad (35)$$

$$m = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = \tan(\theta)$$

Donde las coordenadas  $(x_1, z_1)$  y  $(x_2, z_2)$  representan los extremos del segmento de línea y  $m$  corresponde con la pendiente.

A consecuencia de que la ecuación diferencial en (17) modela la trayectoria de cada uno de los rayos que se presentan en la Figura 5, se deducen las condiciones iniciales correspondientes a la función de altura en cada uno los rayos presentes en la Figura 5.a:

Condiciones iniciales del rayo directo  $z_d(x)$ :

$$z_d(0) = H_T \quad \dot{z}_d(0) = \tan(\theta_3) = K_d \quad z_d(R) = \Delta z + m(R - x_1) + z_1 \quad (36)$$

Condiciones iniciales del rayo incidente  $z_i(x)$ :



$$z_i(0) = H_T \quad \dot{z}_i(0) = \tan(\theta_1) = K_i \quad z_i(X) = mx_c + z_1 \quad (37)$$

Condiciones iniciales del rayo reflejado  $z_r(x)$ :

$$z_r(X) = mx_c + z_1 \quad \dot{z}_r(X) = \tan(\theta_2) = K_r \quad z_r(R) = \Delta z + m(R - x_1) + z_1 \quad (38)$$

El cálculo de la función de altura del rayo directo mediante la transformada de Laplace fue realizado mediante (17) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 z_d(x)}{dx^2}\right] = \mathcal{L}[\delta] \quad (39)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 z_d(x)}{dx^2}\right] = s^2 Z_d(s) - s z_d(0) - \dot{z}_d(0) = \frac{\delta}{s}$$

Reemplazando (36) en la expresión anterior:

$$Z_d(s) = \frac{\delta}{s^3} + \frac{K_d}{s^2} + \frac{H_T}{s}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, se obtiene:

$$\mathcal{L}^{-1}[Z_d(s)] = z_d(x) = \frac{\delta x^2}{2} + K_d x + H_T \quad \text{para } 0 < x < R$$

Por otra parte, considerando la altura del rayo directo en la coordenada de recepción

$z_d(R) = \Delta z + m(R - x_1) + z_1$  en la expresión anterior:

$$\Delta z + m(R - x_1) + z_1 = \frac{\delta R^2}{2} + \frac{\Delta Z_R + \Delta z}{R} R + H_T$$

entonces

$$\Delta Z_R = -\frac{\delta R^2}{2} + m(R - x_1) - H_T + z_1$$

Como consecuencia, reemplazando (34) en (39) se obtiene (40), que describe la trayectoria de un rayo directo bajo efectos atmosféricos en el modelo planteado en la Figura 5.

$$z_d(x) = \frac{\delta x^2}{2} + K_d x + H_T \quad \text{para} \quad 0 < x < R \quad (40)$$

donde

$$K_d = \tan(\theta_3) = \frac{-\frac{\delta R^2}{2} + m(R - x_1) - H_T + z_1 + \Delta z}{R}$$

De manera análoga, se obtienen (41) y (42), correspondientes con la trayectoria de los rayos incidente y reflejado en el caso planteado en la Figura 5.a, respectivamente:

$$z_i(x) = \frac{\delta x^2}{2} + K_i x + H_T \quad \text{para} \quad 0 < x < X \quad (41)$$

donde

$$K_i = \tan(\theta_1) = \frac{-\frac{\delta X^2}{2} + m(X - x_1) + z_1 - H_T}{X}$$

$$z_r(x) = \frac{\delta(x - X)^2}{2} + K_r(x - X) + m(X - x_1) + z_1 \quad \text{para} \quad X < x < R \quad (42)$$

donde

$$\tan(\theta_2) = \frac{-\frac{\delta(R - X)^2}{2} + \Delta z + m(R - X)}{R - X}$$

Por otro lado, mediante la ley de Snell, los ángulos de incidencia  $\theta_i$  y reflexión  $\theta_r$  en la Figura 5.a se relacionan de la siguiente manera:

$$\theta_i = \theta_r \quad (43)$$

entonces

$$\theta_4 + \theta = \theta_2 - \theta$$

o

$$\tan(\theta_4 + \theta) = \tan(\theta_2 - \theta)$$

Una opción alternativa de la simplificación de (43) está dada por:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_4) - \tan(\theta_2) + 2 \tan(\theta_4) \tan(\theta_2) \tan(\theta) + 2 \tan(\theta) \\ + \tan^2(\theta) (\tan(\theta_2) - \tan(\theta_4)) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

En (44) la variable  $\theta_4$  representa el ángulo de llegada del rayo incidente con respecto a la horizontal, este ángulo se puede calcular mediante la aplicación del teorema de reciprocidad modelando el rayo incidente para el escenario planteado en la Figura 6.a de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 z_i(x)}{dx^2} = \delta \quad (45)$$

Bajo las condiciones iniciales:

$$z_i(0) = mx_c + z_1 \quad \dot{z}_i(0) = \tan(\theta_4) = K_i \quad z_i(X) = H_T$$

Donde, solo para este caso, el ángulo de lanzamiento de la componente incidente  $\theta_4$  se define como:

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta Z_T + Z_T}{X} \right)$$

Solucionando la ecuación diferencial anterior con sus respectivas condiciones iniciales y considerando que la altura de la componente incidente en el punto de recepción es  $z_i(X) = H_T$ , se obtiene:

$$H_T = \frac{\delta X^2}{2} + \frac{\Delta Z_T + Z_T}{X} X + mx_c + z_1$$

entonces

$$\Delta Z_T = -\frac{\delta X^2}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo de llegada de la componente incidente  $\theta_4$  en la Figura 6.a se define como:

$$\tan(\theta_4) = \frac{-\frac{\delta X^2}{2} - m(X - x_1) - z_1 + H_T}{X} \quad (46)$$

Reemplazando (46) en (44) con la finalidad de factorizar en función de la variable desconocida

$X$ , se obtiene (47) que permite el cálculo de la distancia en la coordenada de reflexión  $(X, mX_c + z_1)$  para el escenario planteado en la Figura 5:

$$A \cdot X^4 + B \cdot X^3 + C \cdot X^2 + D \cdot X + E = 0 \quad (47)$$

donde,

$$A = -\delta^2 m$$

$$B = 2\delta^2 mR - 2\delta(1 + m^2)$$

$$C = -\delta^2 mR(R - 1) - \delta(-3R - 2m\Delta z - 3m^2 R - 2m(H_T - z_1))$$

$$D = -\delta(m^2 R^2 + R^2 + 4mR(H_T - z_1) + 4m^2 R x_1 - 2m^2 x_1) \\ + 2(H_T - z_1 + m x_1 + \Delta z + m^2(H_T - z_1) + m^3 x_1 + m^2 \Delta z)$$

$$E = 2\delta(mR^2(H_T - z_1) + m^2 R^2 x_1)$$

$$-2(R(H_T - z_1) + mR x_1 + 2m(H_T - z_1)\Delta z + m^2 R(H_T - z_1) + 2m^2 \Delta z x_1 + m^3 R x_1)$$

Como consecuencia del orden del polinomio en (47), su solución entrega cuatro posibles valores para la distancia en la coordenada de reflexión, donde se considera como solución aquella primera raíz  $X$  capaz de satisfacer la condición  $\{X \in \mathbb{R}^+ : x_1 < X < R\}$ .

No obstante, existe un segundo caso que se puede presentar en el cálculo de la distancia de reflexión como se puede observar en la Figura 5.b, el cual, consiste en una reflexión que se puede presentar en un segmento de línea anterior al segmento en donde se encuentra ubicada la coordenada de recepción. En este caso, si se obtiene de (47) un valor de distancia de reflexión  $X$  que cumpla con la condición  $\{X \in \mathbb{R}^+ : 0 < X < x_1\}$ , se identifica con base a este valor, cuál de todos los segmentos que componen el perfil de terreno contiene el valor de la distancia de reflexión para posteriormente ser modelado matemáticamente. En este caso, el segmento de línea que contiene a la distancia de reflexión previamente calculada mediante (47) es considerado dentro de

la formulación de la siguiente manera:

$$z'_{(x)} = m'(x - x'_2) + z'_2 \quad (48)$$

$$m' = \frac{z'_2 - z'_1}{x'_2 - x'_1} = \tan(\theta')$$

En (48) las coordenadas  $(x'_1, z'_1)$  y  $(x'_2, z'_2)$  representan los extremos del segmento de línea que contiene a la coordenada de reflexión y  $m'$  es la pendiente de dicho segmento.

Una reflexión generada en un segmento de línea diferente del que contiene a la coordenada de recepción implica cambios en las expresiones de la trayectoria del rayo incidente y reflejado, puesto que al rayo directo no lo afectan estos cambios por tener una trayectoria independiente de la distancia de reflexión  $X$ , tal y como se puede apreciar en (40). Por lo tanto, el cambio que se presenta en la trayectoria del rayo incidente es el ángulo de lanzamiento  $\theta_1$  y en el rayo reflejado se altera el ángulo de lanzamiento  $\theta_2$  junto con la altura inicial.

De la misma manera con el proceso implementado en la Figura 5.a, se obtienen las siguientes expresiones acorde con la Figura 5.b considerando (48):

$$\tan(\theta_1) = \frac{-\frac{\delta X^2}{2} + m'(X - x'_1) + z'_1 - H_T}{X}, \quad \text{si } X < x_1 \quad (49)$$

$$z_r(x) = \frac{\delta \cdot (x - X)^2}{2} + K_r(x - X) + m'(X - x'_1) + z'_1 \text{ para } X < x < R \quad (50)$$

donde

$$\tan(\theta_2) = \frac{-\frac{\delta(R - X)^2}{2} + \Delta z + m(R - x_1) + z_1 - (m'(X - x'_1) + z'_1)}{R - X}, \quad \text{si } X < x_1$$

### 8.3. Modelado de terrenos irregulares.

El modelo de dos rayos clásico es un modelo diseñado para aplicaciones en tierra plana, donde la línea de vista entre el transmisor y receptor se encuentra despejada, lo que limita los posibles escenarios donde este modelo puede ser aplicado. Por ese motivo, mediante la propuesta de investigación, se buscó modificar el modelo de dos rayos clásico de tal forma que se pueda aplicar con facilidad en un escenario aleatorio. Por una parte, los modelos de radiopropagación implementan diferentes métodos para considerar los terrenos en los modelos, desde modelamiento matemático del terreno, aproximación del área del terreno mediante pulsos, segmentos de línea o escalonamiento. En el caso de la propuesta de investigación, se consideraron dos segmentos de línea, los cuales pueden ser utilizados para un caso de estudio de terreno irregular como el que se puede apreciar en la Figura 6, puesto que, si se recrea un terreno irregular mediante múltiples segmentos de línea, de todos estos, solo son relevantes en el análisis de reflexión aquellos segmentos que contengan a las coordenadas de recepción y reflexión.

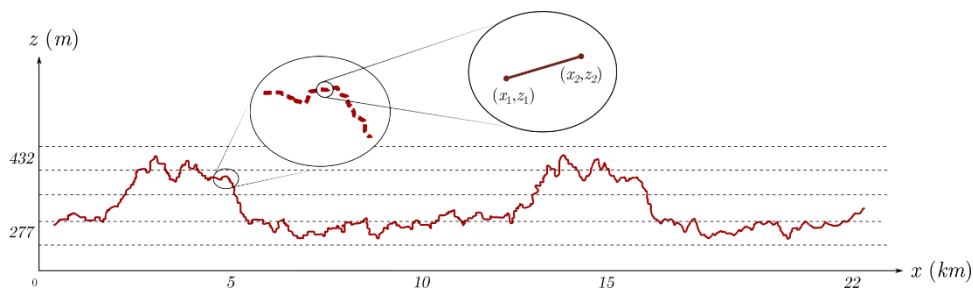


Figura 6. Perfil de terreno representado mediante aproximación por segmentación lineal. Fuente: Autor.

En otras palabras, dada una base de datos que contenga las coordenadas de múltiples segmentos de línea, donde todos juntos modelan la superficie de un terreno irregular, el modelo es implementado primeramente mediante el reconocimiento del segmento de línea que contiene a la coordenada de recepción para posteriormente ser modelado mediante (35), asumiendo que, la coordenada de reflexión se puede presentar en el mismo segmento de línea donde se encuentra la

coordenada de recepción. Una vez efectuado el cálculo de la distancia de reflexión mediante (47), en dado caso que se obtenga en la distancia de reflexión  $X$  un valor que cumpla con la condición de  $\{X \in \mathbb{R}^+ : 0 < X < x_1\}$ , se procede a identificar un nuevo segmento de línea en la base de datos que pueda contener dicha distancia para posteriormente ser modelado mediante (48) y, en consecuencia de esto, realizar los respectivos ajustes en la trayectoria de los rayos correspondientes con (49) y (50).

#### 8.4. Detección de intersecciones.

Un caso que se puede presentar en un escenario de radiopropagación es la intersección de los rayos con el terreno antes de que estos lleguen a la coordenada de recepción, alterando de forma importante los cálculos realizados por el modelo, puesto que se estarían considerando componentes de campo eléctrico que no están presentes en la coordenada de recepción, por lo tanto, se requiere la detección de ese suceso para calcular de forma correcta los parámetros de camino.

Para la detección de una intersección en el trayecto en cada uno de los rayos con el terreno, se consideran  $n$  segmentos de línea consecutivos que modelan todos juntos el perfil de terreno, posteriormente la función de cada uno de estos segmentos es igualado con las correspondientes funciones de cada rayo con la finalidad de obtener una ecuación resultante, de la cual, se obtienen las coordenadas del punto de intersección. En el caso del rayo directo, por ejemplo, el proceso para el cálculo de la función que determina la intersección de este con el terreno es mostrado en (51).

$$z_d(x) = z_k(x) = \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} (x - a_k) + b_k \quad (51)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right) x^2 + \left(K_d + \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k}\right) x + H_T - \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} a_k - b_k = 0$$

Para  $0 < x < R$

En (51)  $z_k(x)$  es la función de cada segmento de línea que conforma el perfil de terreno, donde

los extremos de dicho segmento están dados por las coordenadas  $(a_k, b_k)$  y  $(a_{k+1}, b_{k+1})$ . Además, cabe destacar que para el caso del rayo directo, acorde con su trayectoria, solamente se consideran los segmentos que se encuentran desde el comienzo del terreno hasta el segmento que contiene a la coordenada de recepción, el cual está representado mediante (35) como se mencionó anteriormente.

### 8.5. Consideración de las propiedades electromagnéticas del terreno.

En adición, es importante destacar que las intersecciones entre los rayos incidente y reflejado con el terreno están relacionadas entre sí, puesto que, para que exista un rayo reflejado en la coordenada de recepción, se requiere que el rayo incidente llegue a la coordenada de reflexión sin previamente chocar con el terreno. En otras palabras, acorde con la Figura 5, el campo eléctrico total en la coordenada de recepción, siempre y cuando no se presenten intersecciones en la propagación de los rayos, está dado por:

$$E_{TOTAL} = \Gamma E_i + E_{LOS} \quad (52)$$

Donde en (52), la componente  $E_{LOS}$  es el campo eléctrico correspondiente al rayo directo recibido y la componente  $\Gamma E_i$  corresponde al rayo reflejado recibido.

El coeficiente de reflexión  $\Gamma$  acorde con la Figura 5 puede presentarse de las siguientes maneras según la polarización paralela o perpendicular que presentan las ondas:

Coeficiente de reflexión de Fresnel paralelo  $\Gamma_{\parallel}$  :

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \sin(\theta_t) - \eta_1 \sin(\theta_i)}{\eta_2 \sin(\theta_t) + \eta_1 \sin(\theta_i)} \quad (53)$$

$$\Gamma_{\parallel} = 1 \quad \text{para un conductor perfecto}$$

Coeficiente de reflexión de Fresnel perpendicular  $\Gamma_{\perp}$  :



$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \sin(\theta_i) - \eta_1 \sin(\theta_t)}{\eta_2 \sin(\theta_i) + \eta_1 \sin(\theta_t)} \quad (54)$$

$$\Gamma_{\perp} = -1 \quad \text{para un conductor perfecto}$$

Tanto para (53) como (54),  $\eta_1$  es la impedancia intrínseca del medio I, el cual corresponde con aire acorde con la Figura 6, por lo tanto se define la impedancia intrínseca del medio I como:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (55)$$

Así mismo,  $\eta_2$  es la impedancia intrínseca del medio II, correspondiente con el perfil de terreno y se define de forma general de la siguiente manera:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega(\epsilon'_r - i\epsilon''_r)\epsilon_0}} \quad (56)$$

En (56) la permitividad  $\epsilon$  es definida como permitividad compleja, donde  $\epsilon'_r$  y  $\epsilon''_r$  corresponden a la parte real e imaginaria de la permitividad relativa, respectivamente.

Mediante la ley de Snell, el ángulo de transmisión correspondiente con los coeficientes de reflexión de Fresnel  $\theta_t$  en la Figura 5 se define de la forma:

$$\theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\theta_i)\right) \quad (57)$$

### 8.6. Cálculo de la longitud de los rayos ópticos.

Después de identificar los rayos recibidos en la coordenada de recepción, se requiere conocer la longitud recorrida por el rayo durante el trayecto para el cálculo del campo eléctrico. Mediante la aplicación de GO, las ondas electromagnéticas son consideradas como rayos ópticos con la finalidad de incluir los efectos de la refracción atmosférica en la propagación de las ondas. De esta forma, la longitud de las ondas electromagnéticas es igual a la longitud del camino óptico (OPL) que se puede calcular mediante (28).

### 8.7. Modelado de difracción.

En esta sección se presenta el funcionamiento del modelo de difracción implementado junto con la propuesta de investigación en el estudio de propagación de ondas electromagnéticas bajo efectos refractivos. Este modelo UTD aborda el análisis de atenuación de la señal causada por difracción considerando el caso de un rayo que incide con un ángulo  $\varphi_i$  y distancia  $S_i$  desde la fuente (transmisor) en los bordes de una parte del terreno con forma de cuña, por causa de este evento, el objeto actúa como una fuente secundaria, generando un cono de múltiples rayos difractados acorde con el principio de Huygens, donde cabe destacar que, de igual manera como en un modelo de dos rayos clásico, se asume que una componente directa y reflejada en el terreno son recibidas en el receptor, tal y como se puede apreciar en la Figura 7.

El problema de difracción fue considerado en un plano coordenado cilíndrico  $\rho\varphi$  en un medio isotrópico, donde se definió que las caras 0 y  $n$  de la cuña se encuentran para  $\varphi = 0$  y  $\varphi = n\pi$ , respectivamente, la fuente primaria (transmisor) se considera ubicada en un radio de  $\rho = S_i$  con un ángulo  $\varphi_i$  desde la cuña y el punto observador o coordenada de recepción se encuentra en  $(S_d, \varphi_d)$ .

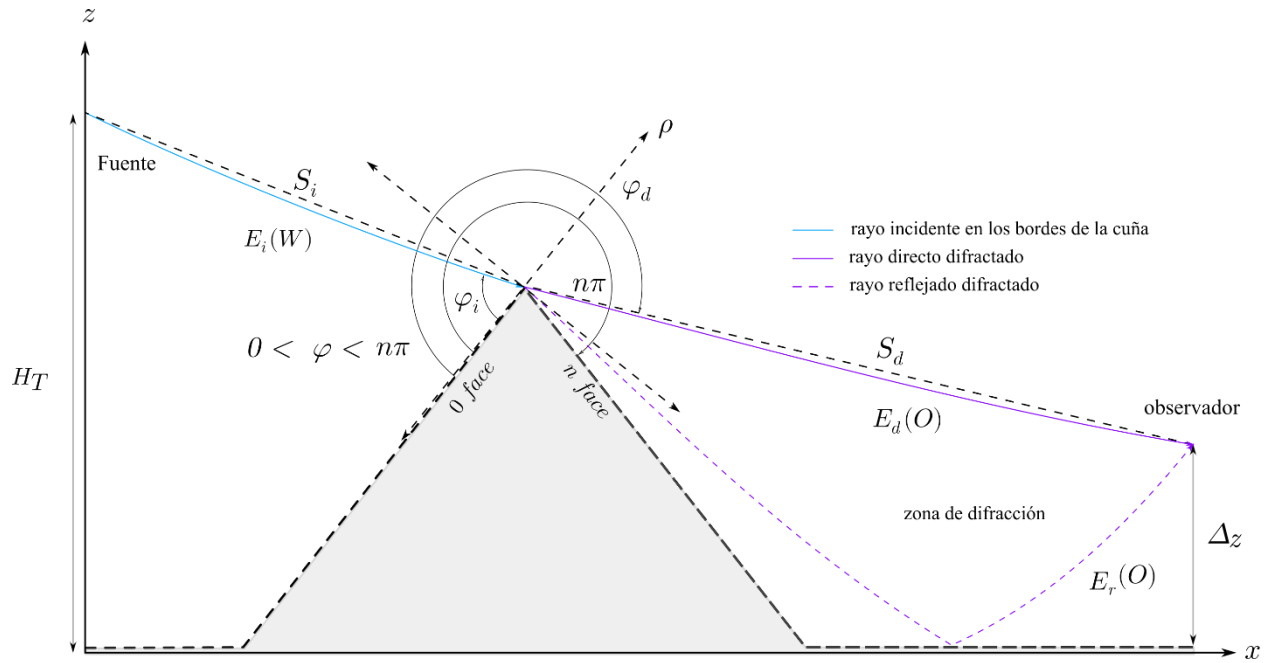


Figura 7. Geometría de la difracción por una cuña. Fuente: Autor.

Con respecto con la Figura 7, el campo eléctrico total en el punto observador ( $S_d, \varphi_d$ ) producto de las difracciones está dado por:

$$E_{TOTAL}(O) = E_d(O) + E_r(O) \quad (58)$$

Donde la contribución de campo eléctrico producto de un rayo directo difractado en la coordenada cilíndrica de recepción ( $S_d, \varphi_d$ ) es correspondiente con la expresión:

$$E_d(O) = E_i(W) \bar{D}^{s,h} A(S_d) e^{-ikS_d} \quad (59)$$

$$\bar{D}^{s,h} = G_0^{s,h} [D_2 + R_0^{s,h}(\alpha_0) D_4] + G_n^{s,h} [D_1 + R_n^{s,h}(\alpha_n) D_3] \quad (60)$$

Con respecto a (59),  $E_i(W)$  es el campo eléctrico incidente en la cuña,  $A(S_d)$  es la amplitud,  $k$  es el número de onda y  $S_d$  es la longitud del rayo directo difractado. Por otra parte, en (60)  $\bar{D}^{s,h}$  es el coeficiente de difracción diádico de Luebber, donde los superíndices  $s$  y  $h$  hacen referencia a superficie lisa (soft) y rugosa (hard), mientras que, los subíndices  $0$  y  $n$  corresponden con las caras de la cuña, respectivamente, los términos  $D_1, \dots, D_4$  son coeficientes de difracción definidos en [10] y los términos  $\alpha_0$  y  $\alpha_n$  son los ángulos de incidencia definidos por Luebber, los cuales acorde

con la Figura 7, se definen de la siguiente manera:

$$\alpha_0 = \varphi_i \quad (61)$$

$$\alpha_n = n\pi - \varphi_d$$

En (61) se obtienen las expresiones correspondientes con el coeficiente de reflexión de Fresnel en superficie lisa para polarización perpendicular y paralela, respectivamente, mientras que (63) corresponde con el coeficiente de reflexión de Fresnel para superficie rugosa:

$$R_{\perp}^s(\alpha_{0,n}) = \frac{\sin(\alpha_{0,n}) - \sqrt{\left(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) - \cos^2(\alpha_{0,n})}}{\sin(\alpha_{0,n}) + \sqrt{\left(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) - \cos^2(\alpha_{0,n})}} \quad (62)$$

$$R_{\parallel}^s(\alpha_{0,n}) = \frac{\left(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) \sin(\alpha_{0,n}) - \sqrt{\left(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) - \cos^2(\alpha_{0,n})}}{\left(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) \sin(\alpha_{0,n}) + \sqrt{\left(\epsilon' - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) - \cos^2(\alpha_{0,n})}}$$

$$R_{\perp,\parallel}^h(\alpha_{0,n}) = R_{\perp,\parallel}^s(\alpha_{0,n}) \cdot \rho \quad (63)$$

De la expresión anterior,  $\rho$  es el factor de atenuación de rugosidad del terreno dado por:

$$\rho^2 = e^{-\beta^2} \quad (64)$$

para

$$\beta = \frac{4\pi\Delta h}{\lambda} \sin(\alpha)$$

Donde  $\Delta h$  corresponde con la desviación típica de la distribución normal de la rugosidad en la superficie.

Los factores  $G_0^{s,h}$  y  $G_n^{s,h}$  son implementados mediante (65) para los casos donde resulta más útil referirse a un ángulo rasante, es decir, al ángulo entre el rayo y la superficie, en vez del ángulo entre el haz y la normal.

$$G_n^{s,h} = \begin{cases} 0.5 & \varphi_i = 0 \\ (1 + R_n^{s,h})^{-1} & \varphi_i = n\pi \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (65)$$

$$G_0^{s,h} = \begin{cases} 0.5 & \varphi_i = n\pi \\ (1 + R_0^{s,h})^{-1} & \varphi_i = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

## 9. Simulaciones y resultados.

En esta sección se presentan los casos de estudio establecidos para evaluar la formulación, presentada en este libro, del modelo de dos rayos modificado bajo efectos refractivos para un terreno irregular, donde cooperativamente un modelo de UTD fue utilizado para analizar los casos de difracción presentes en los escenarios. Así mismo, un método DMFT-SSPE fue implementado como referencia para validar los resultados obtenidos.

La forma designada para evaluar la formulación presentada en este libro es mediante una comparación, con la técnica SSPE, de resultados de cálculo de path loss para un terreno conformado por una cuña con pérdidas. Para ello, tal y como se aprecia en la Figura 8, se consideraron dos casos canónicos alusivos con radio enlaces punto – multipunto, los cuales se caracterizan por una variación de la coordenada de recepción horizontal y vertical.

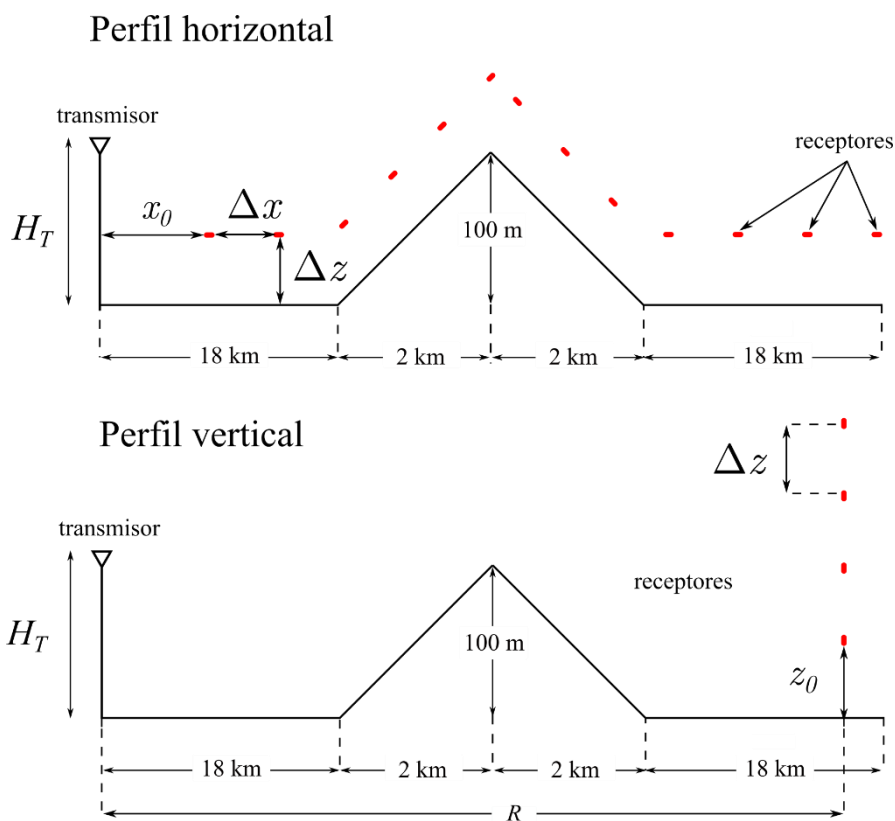


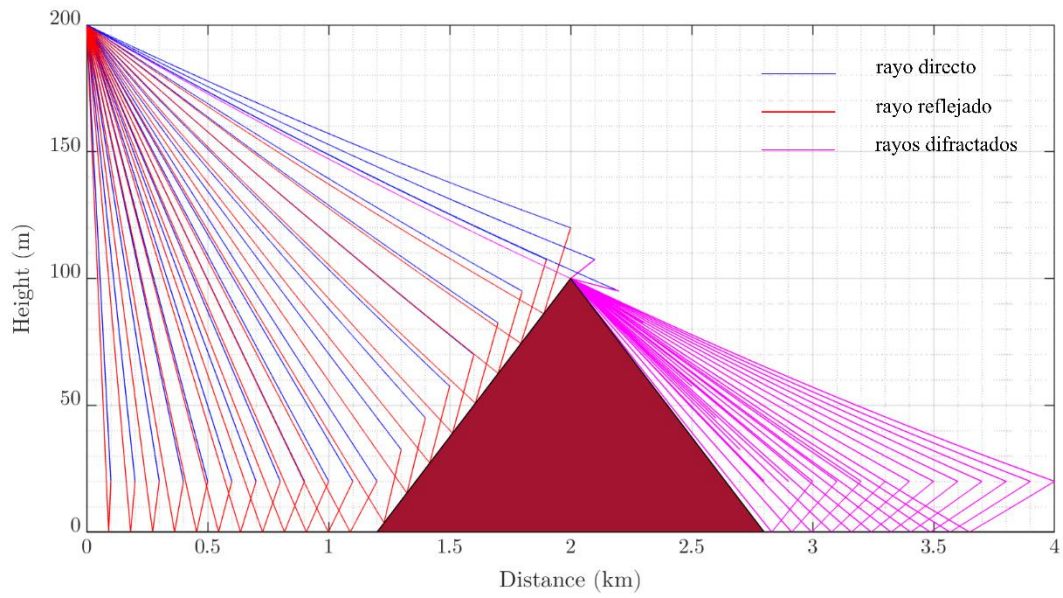
Figura 8. Geometría de los escenarios canónicos establecidos. Fuente: Autor.

Además de esto, con la finalidad de estudiar la precisión de la formulación con base en la frecuencia, se implementaron los casos canónicos para frecuencias de 500 MHz, 1 GHz y 2 GHz, puesto que, debido a la ecuación Eikonal, la formulación es aproximada para altas frecuencias. Los parámetros de simulación correspondientes con cada perfil se presentan en la Tabla 1.

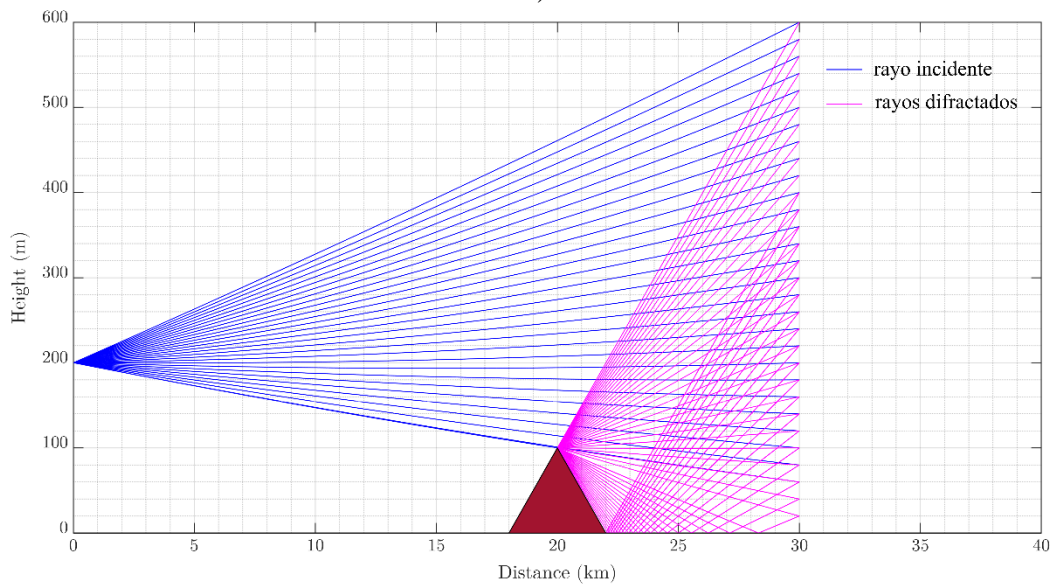
Tabla 1. Parámetros de simulación.

Parámetros de simulación	Escenario I	Escenario II	Escenario III
Frecuencia $f_0$	500 MHz	1 GHz	2 GHz
Polarización	vertical		
Perfil horizontal	$\Delta x = 10 \text{ m}$ $\Delta z = 20 \text{ m}$ $H_T = 200 \text{ m}$ $x_0 = 120 \text{ m}$ $R = x_0 : \Delta x : 40 \text{ km}$		
Perfil vertical	$R = 30 \text{ km}$ $H_T = 200 \text{ m}$ $z_0 = 20 \text{ m}$ $\Delta z = z_0 : 1 : 600 \text{ m}$		
Caracterización de terreno: Atmósfera estándar	$\delta = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ M} \cdot \text{m}^{-1}$ $\sigma = 0.012 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$ $\mu = \mu_0$ $\epsilon = \epsilon_0 \left( 15 - j \frac{\sigma}{2\pi f_0 \epsilon_0} \right)$		

Tal y como se ha mencionado, las trayectorias de los rayos fueron modeladas mediante la ecuación Eikonal aproximada para altas frecuencias, sin embargo, aunque la aplicabilidad de las trayectorias de cada rayo es dependiente de este parámetro, dichas trayectorias no lo son, en otras palabras, las trayectorias de los rayos para los escenarios I, II y III no varían. Con base en esto, se presenta en la Figura 9, la implementación de la formulación para el trazado de rayos presentes en el perfil horizontal y vertical, respectivamente.



a)



b)

Figura 9. Ray path considerando una cuña con pérdidas para un barrido de la coordenada de recepción a) horizontal. b) vertical. Fuente: Autor.



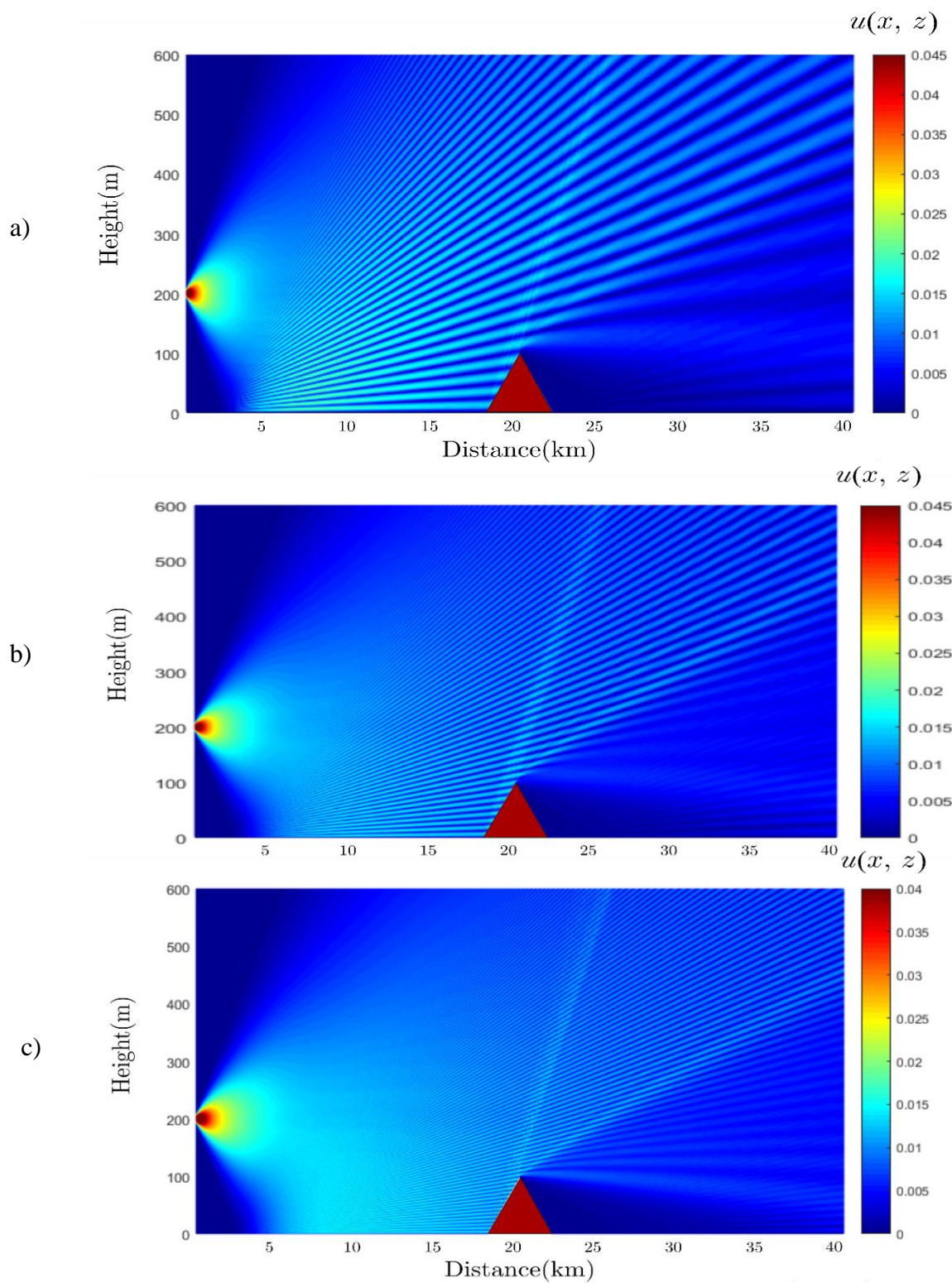


Figura 10. Perfiles de campo eléctrico vertical para escenarios: a) I. b) II. c) III. Fuente: código SSPE-UFMG.

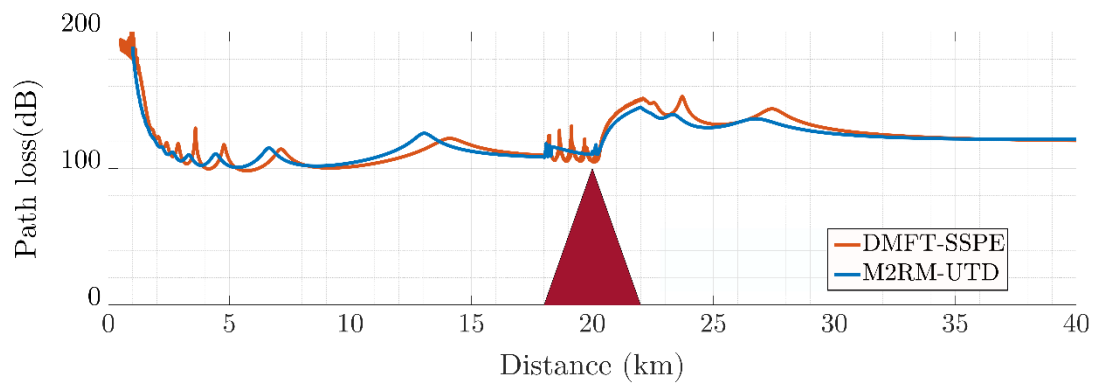
Con base en los trazados de rayos obtenidos por medio de la implementación de la formulación en los casos canónicos establecidos, se calcularon parámetros de camino tales como longitud óptica, polarización, fase, e intensidad de campo eléctrico. A partir de estos parámetros, se calcularon los valores de path loss correspondientes con escenarios I, II y III para el perfil horizontal y vertical. Asimismo, mientras que en la formulación se calculó path loss a partir de las trayectorias de los rayos, en la Figura 10, se presentan los perfiles de intensidad de campo eléctrico calculados mediante la técnica de ecuación parabólica, los cuales fueron la base para el cálculo de path loss por medio de la referencia. En la Figura 11, se presentan las comparaciones entre los valores de path loss obtenidos por medio de la formulación y la ecuación parabólica para los escenarios I, II y III correspondientes con el perfil horizontal. De igual manera, en la Figura 12 se presentan los resultados de path loss obtenidos para los escenarios I, II y III correspondientes con el perfil vertical.

Con la finalidad de evaluar la precisión y aplicabilidad de la formulación desarrollada en este libro, se utilizaron métodos de estadística inferencial tales como la Diferencia Media Absoluta (DMA) (66) y la Desviación Estándar (DS) (67) para analizar los resultados de predicción de path loss en los casos canónicos establecidos.

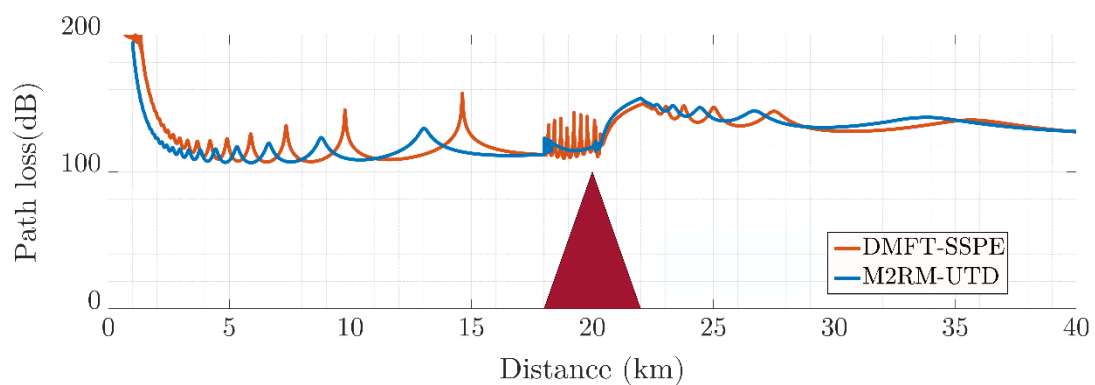
$$DMA = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|}{n} \quad (66)$$

$$DS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \quad (67)$$

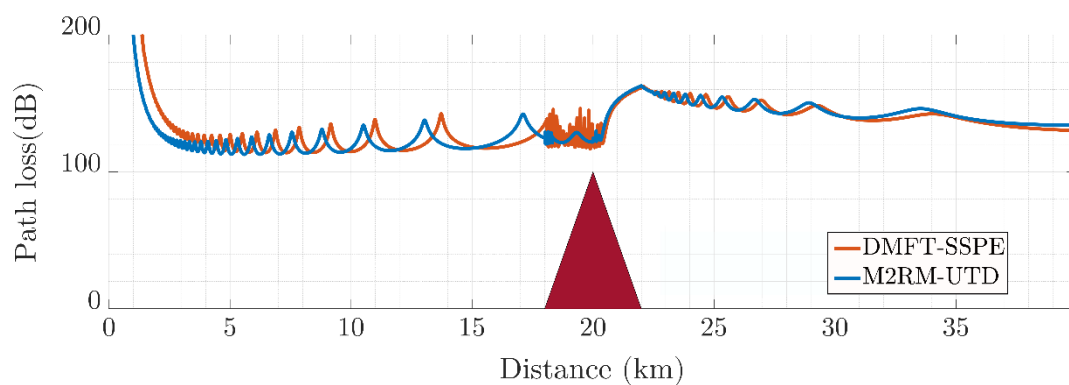
En (66) y (67), las variables  $y_i$  y  $x_i$  corresponden con los valores de path loss obtenidos mediante la ecuación parabólica y la formulación presentada, respectivamente, para una cantidad  $n$  de datos. Los resultados según el caso canónico son presentados en la Tabla 2.



a)

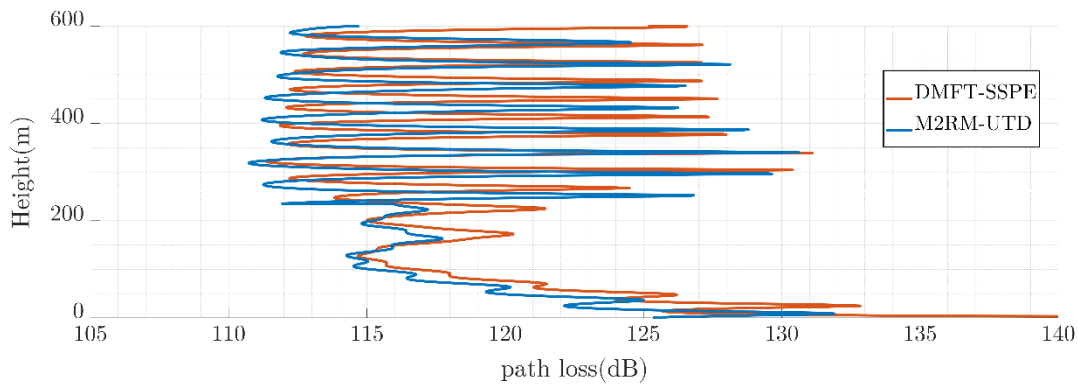


b)

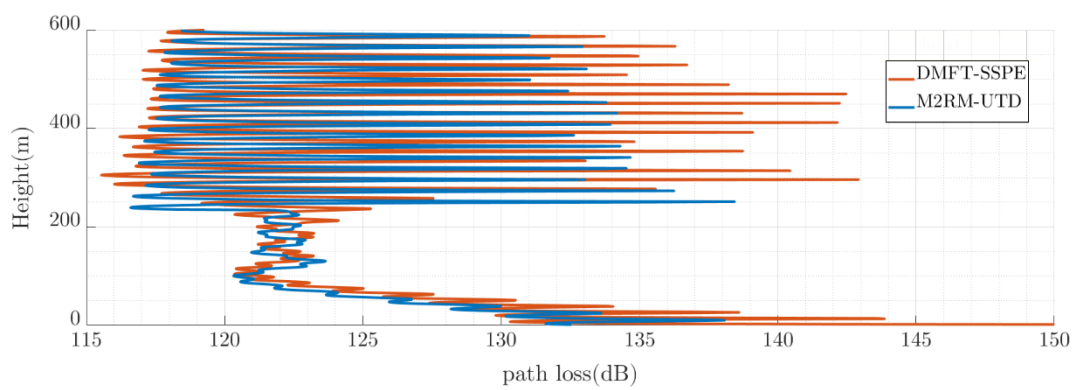


c)

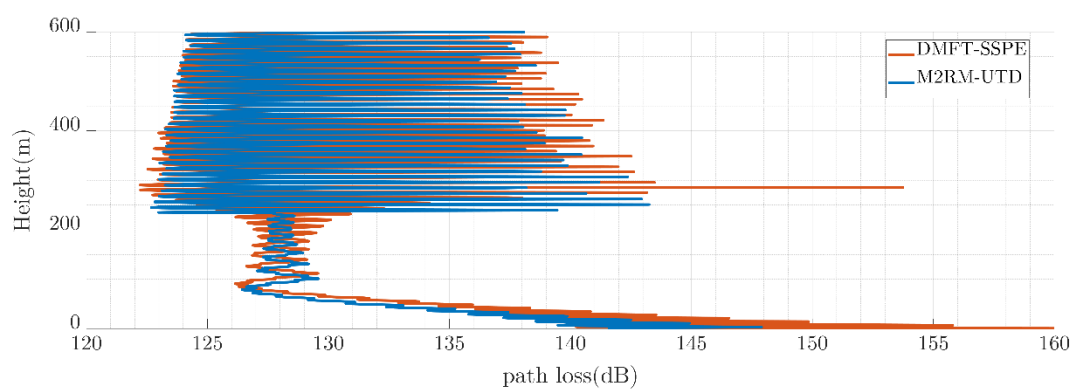
Figura 11. Perfil de Path loss horizontal para escenario: a) I. b) II. c) III. Fuente: Autor.



a)



b)



c)

Figura 12. Perfil de Path loss vertical para escenarios: a) I. b) II. c) III. Fuente: Autor.

Tabla 2. Resultados estadísticos de path loss para los casos canónicos establecidos.

Resultados de simulación	Escenario I	Escenario II	Escenario III
Perfiles Horizontales			
Frecuencia $f_0$	500 MHz	1 GHz	2 GHz
Diferencia Media Absoluta	3,791 dB	5,8969 dB	5,219 dB
Desviación estándar	5,147 dB	8,528 dB	7,970 dB
Perfiles Verticales			
Frecuencia $f_0$	500 MHz	1 GHz	2 GHz
Diferencia Media Absoluta	4,124 dB	3,925 dB	3,675 dB
Desviación estándar	6,218 dB	5,910 dB	5,310 dB

Con base en los resultados estadísticos obtenidos en la Tabla 2, se puede observar como los resultados obtuvieron una mayor concordancia entre sí a medida que la frecuencia fue aumentando, lo cual es un acontecimiento esperado, puesto que este suceso se explica recordando que el desarrollo de la propuesta de investigación está basada en la ecuación de Eikonal, específicamente para altas frecuencias.

Por otra parte, con respecto a los datos de path loss obtenidos en la Figura 11, es conveniente resaltar como estos modelos tienden a tener formas de onda similares en las regiones de tierra

plana mientras que, para los casos donde ambos modelos analizan los segmentos con pendientes, se obtienen valores más lejanos entre ellos, este motivo puede estar relacionado con la forma en que ambos modelos analizan un terreno irregular, puesto que, mientras la formulación desarrollada en este libro modela terrenos mediante segmentos de línea, el método DMFT-SSPE implementa escalonamiento, lo cual para este caso, la referencia podría presentar datos menos exactos debido a que la formulación presenta una mejor representación de la superficie real.

Además de lo anterior, cabe de destacar que, como consecuencia del trazado de rayos de la formulación, se pueden apreciar las componentes de campo existentes en una coordenada de recepción a diferencia de los métodos numéricos, puesto que un método numérico solo aporta datos de intensidad de campo, y por lo tanto, se desconocen los diferentes trayectos que aportan campo en la recepción. Para ejemplificar lo anteriormente dicho, se pueden considerar las simulaciones de trayectorias de rayos para los perfiles horizontales obtenidas por la formulación, en estos casos, se puede inferir que los valores de path loss después de la esquina de la cuña corresponden únicamente con componentes producto de difracción.

## 10. Conclusiones y trabajos futuros.

En este trabajo, se presentó una manera de considerar efectos refractivos en la propagación de ondas en la atmosfera, reflejados en un modelo matemático basado en el modelo clásico de dos rayos y óptica geométrica, el cual, junto con un modelo de UTD, cuenta con la capacidad de considerar reflexiones y difracciones generadas en las superficies de un terreno irregular para altas frecuencias. Así mismo, la formulación desarrollada permite analizar terrenos complejos mediante aproximación por segmentos de línea, permitiendo así, un modelo que puede ser aplicable para una amplia gama de sistemas de comunicaciones de propagación de ondas electromagnéticas en la troposfera. No obstante, debido a que la formulación es incapaz de analizar fenómenos de difracción por su cuenta, se requiere de manera indispensable un algoritmo UTD que pueda analizar difracciones sobre superficies irregulares para casos de estudios más realistas.

Por otra parte, la formulación permite trazar las trayectorias de los rayos presentes en el escenario, lo cual representa una herramienta de estudio que puede entregar otro punto de vista en un radioenlace considerando refracción atmosférica, ya que la formulación da una idea de cómo las características climáticas del entorno (representadas en un gradiente de refracción) pueden alterar las trayectorias los rayos.

Finalmente, se realizaron y analizaron simulaciones de path loss horizontal y vertical con la formulación y un método de ecuación parabólica complementado con transformada de Fourier para el caso de una cuña con pérdidas en diferentes frecuencias, las características del terreno fueron consideradas para una atmosfera estándar, donde los resultados obtenidos por ambos métodos mostraron un comportamiento similar que se fue haciendo más cercano en altas frecuencias.

Por otra parte, como se ha mencionado en este documento, modelar con precisión la propagación de ondas electromagnéticas en escenarios conformados por perfiles de terreno irregular es crucial para un constante desarrollo de los sistemas de comunicación. Es por esto y con base en los resultados obtenidos que, un estudio que puede surgir como derivado del desarrollo de la investigación en este proyecto, es el estudio de la variación de la refracción atmosférica horizontal. Puesto que, como se ha mencionado en este proyecto de investigación, la atmosfera es un medio mayormente estratificado horizontalmente, sin embargo, en un escenario de radiopropagación se pueden presentar objetos en el trayecto de propagación que actúen como fuentes que puedan alterar las características climáticas del medio y, por lo tanto, la refracción atmosférica. Producto de esto, se obtiene un perfil de terreno conformado por diferentes perfiles de refracción en un mismo trayecto.



**Producción.**

Andrés Navarro, Diego Parada, Dinael Guevara, Cássio G. Rego, Rodrigo Oliveira, Reinaldo Velásquez y Lorena Gomezjurado, “A Modified Two-Ray Model with UTD and Atmospheric Effects : Analysis of Reflected Ray Over Sloping Terrain,” in *2021 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP) (EuCAP 2021)*, 2021, no. 2, pp. 2–5.

### Referencias.

- [1] D. Tami *et al.*, “Analysis of Heuristic Uniform Theory of Diffraction Coefficients for Electromagnetic Scattering Prediction,” *Int. J. Antennas Propag.*, vol. 2018, p. 3029152, 2018, doi: 10.1155/2018/3029152.
- [2] J. M. Mendes, C. G. Rego, D. Parada, C. G. Batista, and D. Guevara, “SSPE Method Including Backward Term for an em Propagation Real Case Study,” *Proceedings of the 2019 9th IEEE-APS Topical Conference on Antennas and Propagation in Wireless Communications, APWC 2019*, pp. 289–291, 2019, doi: 10.1109/APWC.2019.8870387.
- [3] P. Valtr and P. Pechač, “Tropospheric refraction modeling using ray-tracing and parabolic equation,” *Radioengineering*, vol. 14, no. 4, pp. 98–104, 2005.
- [4] P. Valtr and P. Pechac, “Analytic tropospheric ray-tracing model for constant refractivity gradient profiles,” in *2006 First European Conference on Antennas and Propagation*, 2006, pp. 1–4.
- [5] D. Parada, D. Guevara, C. G. Rego, J. M. Mendes, B. Araque, and G. L. Ramos, “A Comparison Between a Modified Two-Ray Model with Atmospheric Effects and the SSPE Method for an EM Propagation Case Study,” in *2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*, 2019, pp. 1–4.
- [6] D. Parada, C. G. Rego, J. Mendes, D. Guevara, R. Daza, and G. L. Ramos, “Scattering by a PEC Wedge in a Standard Atmosphere: a Modified Two-Ray Model Versus a SSPE Algorithm,” *SBMO/IEEE MTT-S Int. Microw. Optoelectron. Conf.*, 2019.
- [7] A. Navarro, D. Parada, D. Guevara, C. G. Rego, and R. A. Badillo, “Modified Two-Ray Model with UTD and Atmospheric Effects,” in *2020 14th European Conference on*

- Antennas and Propagation (EuCAP)*, 2020, pp. 1–5.
- [8] P. Valtr, J. Kucera, H. Bartik, and P. Pechac, “Influence of humidity contained in building material on wedge diffraction,” *Eur. Sp. Agency, (Special Publ. ESA SP)*, vol. 626 SP, no. November, pp. 3–6, 2006, doi: 10.1109/eucap.2006.4584778.
- [9] R. Hernández Sampieri, “Definición del alcance de la investigación que se realizará: exploratorio, descriptivo, correlacional o explicativo,” in *Metodología de la Investigación*, VI., McGraw-Hill Education, 2014, pp. 97–98.
- [10] R. J. Luebbers, “A Heuristic UTD Slope Diffraction Coefficient for Rough Lossy Wedges,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 37, no. 2, pp. 206–211, 1989, doi: 10.1109/8.18707.
- [11] O. Ur-Rehman and N. Zivic, *Wireless communications*. 2018.
- [12] D. Parada *et al.*, “A Modified Two-Ray Model with UTD and Atmospheric Effects : Analysis of Reflected Ray Over Sloping Terrain,” in *2021 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP) (EuCAP 2021)*, 2021, no. 2, pp. 2–5.